АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

БЛАЖЕВСЬКИЙ Степан Георгійович

КЛАСИЧНІ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ БАГАТОШАРОВИХ ПЛАСТИН І СИМЕТРИЧНИХ ТІЛ

01.01.03 - математична фізика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

дисертації на здобуття вченого ступеня
кандидата фізико-математичних наук

К и ї в - 1993

Робота виконана на кафедрі диференціальних рівнянь Чернівецького державного університету ім. Ю.Федьковича

Науковий керівник – доктор фізико математичних наук, доцент ЛЕНЮК М.П.

Офіційні опоненти – доктор фізико-математичних наук, професор – ПОДІЛЬЧУК Ю.М.
– кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник – КОЛОМІЄЦЬ В.Г.

Провідна організація – Львівський державний університет ім. І.Франка.

Захист відбудеться "18" січня 1994 р. о 14 год. на засіданні спеціалізованої Ради Д 016.50.02 при Інституті математики АН України за адресою: 252601, Київ. 4, ГСП вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці інституту.

Автореферат розіслано "17" грудня 1993 р.

Вчений секретар
спеціалізованої Ради
доктор фізико-математичних наук Лучка А.Ю.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Розвиток і вдосконалення виробництва на сучасному етапі науково-технічного прогресу пов"язані з широким застосуванням композиційних матеріалів в різного роду технологічних процесах, зварному виробництві, атомній енергетиці та космічній техніці, радіотехніці й радіоелектроніці, будівництві споруд та будинків. Серед численних задач, які виникають при розрахунках на міцність , надійність і довговічність в експлуатації конструкційних елементів машин і механізмів, при конструюванні машин і проектуванні інженерних споруд важливе місце займають задачі розрахунку температурних полів і викликаних ними температурних напружень. Якщо рахувати, що: а) дослідження кінетики цілого ряду фізичних і хіміко-технологічних процесів еквівалентне задачам стаціонарної і нестаціонарної теплопровідності; б) композити - це, як правило, обмежені кусково-однорідні тіла, які складаються з декількох матеріалів, що мають різні фізико-механічні характеристики, - то ми приходимо до необхідності розв"язання лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними з розривними (кусково-постійними) коефіцієнтами.

Широке застосування композиційних матеріалів викликає гостру потребу в розв"язанні широкого класу задач математичної фізики неоднорідних структур. Останнє вимагає, з одного боку, вдосконалення і модифікації існуючого математичного апарату, а з іншого боку, створення нових методів. Ефективним математичним апаратом при розв"язанні таких задач є розроблений на даний час метод гібридних інтегральних перетворень, що дає можливість алгебраїзувати диференціальні рівняння з кусково-неперервними коефіцієнтами.

Проблемі побудови розв"язків класичних нестаціонарних задач теплопровідності для багатошарових пластин і класичних динамічних задач термопружності для симетричних тіл, відсутніх в математичній літературі, методом гібридних інтегральних перетворень присвячена дана кандидатська дисертація.

Мета роботи. Метою даної роботи є побудова нестаціонарних температурних полів в багатошарових ортотропних пластинах і динамічних термопружних полів в багатошарових симетричних тілах.

Методика дослідження. При побудові розв"язків використовувались елементи теорії крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, класичні інтегральні перетворення Фур"є на осі, напівосі і сегменті та їх узагальнення на випадок кусково-однорідного інтервалу, а також гібридні інтегральні перетворення Фур"є-Бесселя і Вебера на полярній осі з n-точками спряження і Ханкеля I-го і 2-го роду на сегменті з n-точками спряження.

Наукова новизна дисертаційної роботи полягає у наступному:

1) побудова у замкнутій формі розв"язків нестаціонарної та стаціонарної задач теплопровідності для необмежених кусково-однорідних нескінченних, напівскінченних та скінченних пластин;

2) побудова у замкнутій формі розв"язків нестаціонарної та стаціонарної задач теплопровідності для напівобмежених кусково-однорідних нескінченних, напівскінченних та скінченних пластин;

3) побудова у замкнутій формі розв"язків нестаціонарної та стаціонарної задач теплопровідності для обмежених кусково-однорідних нескінченних, напівскінченних та скінченних пластин;

4) побудова у замкнутій формі розв"язку квазістатичних і динамічних задач термопружності для кусково-однорідних симетричних просторів;

5) побудова у замкнутій формі розв"язку квазістатичних і динамічних задач термопружності для кусково-однорідних симетричних просторів із симетричною порожниною;

6) побудова у замкнутій формі розв"язку квазістатичних і динамічних задач термопружності для кусково-однорідних суцільних симетричних тіл;

7) побудова в замкнутій формі розв"язку квазістатичних і динамічних задач термопружності для кусково-однорідних порожнистих симетричних тіл.

У всіх випадках в точках стику має місце неідеальний термічний контакт та ідеальний механічний контакт.

Практична цінність. Використаний метод гібридних інтегральних перетворень з його логічною схемою застосування може бути корисним для побудови точних аналітичних розв"язків досить широкого класу задач теорії пружності, гідромеханіки, електростатики і т.д. Отримані при цьому розв"язки носять алгоритмічний характер, що дозволяє використовувати їх з допомогою ЕОМ для числового аналізу з метою застосування одержаних формул для інженерних розрахунків.

Апробація роботи. Основні результати роботи доповідались і обговорювались на науковій конференції молодих вчених в інституті ПМіМ (м.Львів, 1989), на третій (м.Дрогобич, 1991) Всесоюзній конференції "Нові підходи до розв"язання диференціальних рівнянь", на науковій конференції "Нелінійні задачі математичної фізики" (1989 р.,м.Чернівці, 1991 р. м.Донецьк), на міжнародній науковій конференції "Диференціальні і інтегральні рівняння. Математична фізика і спеціальні функції" (м.Самара, 1992 р.), на IУ міжреспубліканському симпозіумі "Залишкові напруження: моделювання і управління" (м.Пермь, 1992 р.), на міжнародній конференції, присвяченій пам"яті академіка М.Ф.Кравчука (Київ-Луцьк, 1993).

В цілому робота доповідалась на науково-методичних семінарах кафедри диференціальних рівнянь Чернівецького державного університету (м.Чернівці, 1992, 1993 рр.), на міському науковому семінарі з проблем диференціальних рівнянь (м.Львів, державний університет, 1993 р.), на науковому семінарі відділу "Нелінійні коливання і рівняння математичної фізики" (м. Київ, Ін-т математики АН України, 1993 р.)

Публікації. По темі дисертації опубліковано 10 робіт .

Структура і об"єм роботи. Дисертація складається із вступу, трьох розділів, висновків, додатку і списку цитованої літератури. Повний об"єм роботи складає 162 сторінки машинопису. Бібліографічний список включає 77 найменувань. Рисунків 8.

ЗМІСТ І ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ

У вступі до дисертації подано короткий огляд літератури по тематиці дисертації, обгрунтовано актуальність теми і описано одержані результати.

В першому розділі реферативного характеру викладено математичний апарат: 1) інтегральні перетворення Фур"є на декартовій осі, напівосі і сегменті з точками спряження; 2) інтегральні перетворення Фур"є-Бесселя і Вебера на полярній осі з n точками спряження; 3) скінченні інтегральні перетворення Ханкеля на сегменті з n точками спряження.

В другому розділі, що складається з трьох параграфів (8, 9, 10), побудовано в замкнутій формі розв"язок задачі про структуру нестаціонарних температурних полів в кусково-однорідних ортотропних пластинах. Внаслідок ідентичності логічної схеми розв"язання задач наведемо результати восьмого параграфу. У цьому параграфі розв"язано задачу про структуру нестаціонарного температурного поля в ортотропній необмеженій кусково-однорідній скінченній пластині. Математично це приводить до побудови обмеженого в області $\mathcal{D}=\{(t,x,y): t>0, x\in(-\infty,0)\cup(0,\infty), y\in(0,b);\ b<\infty\}$ розв"язку сепаратної системи рівнянь теплопровідності

$$\frac{1}{a_j^2}\frac{\partial T_j}{\partial t}+\chi_j^2 T_j-\left(K_{1j}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+K_{2j}^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)T_j(t,x,y)=f_j(t,x,y),\ j=1,2, \tag{1}$$

за початковими умовами

$$T_j(t,x,y)\big|_{t=0}=g_j(x,y),\ j=1,2, \tag{2}$$

крайовими умовами

$$\begin{gathered}\left(-h_{11}\frac{\partial}{\partial y}+h_{12}\right)T_j(t,x,y)\big|_{y=0}=\Psi_{1j}(t,x),\ h_{11}^2+h_{12}^2\neq 0,\ j=1,2,\\ \left(h_{21}\frac{\partial}{\partial y}+h_{22}\right)T_j(t,x,y)\big|_{y=b}=\Psi_{2j}(t,x),\ h_{21}^2+h_{22}^2\neq 0\end{gathered} \tag{3}$$

і умовами неідеального термічного контакту

$$\left[\left(k_1\frac{\partial}{\partial x}+1\right)T_1(t,x,y)-T_2(t,x,y)\right]\Big|_{x=0}=0,$$
$$\left[\lambda_1\frac{\partial}{\partial x}T_1(t,x,y)-\lambda_2\frac{\partial}{\partial x}T_2(t,x,y)\right]\Big|_{x=0}=0 \qquad (4)$$

Обмежений в області $\mathcal{D}$ розв"язок задачі (1)-(4) побудовано методом скінченного інтегрального перетворення Фур"є по геометричній змінній y в поєднанні з інтегральним перетворенням Фур"є на декартовій осі з однією точкою спряження по геометричній змінній x.

Застосуємо до задачі (1)-(4) інтегральне перетворення Фур"є на сегменті по геометричній змінній y за правилом:

$$\Lambda_n[f(y)]=\int_0^{\ell} f(y)\,v_n(y)\equiv f_n, \qquad (5)$$

$$\Lambda_n^{-1}[f_n]=\sum_{n=1}^{\infty} f_n\frac{v_n}{\|v_n\|^2}\equiv f(y), \qquad (6)$$

тут власна функція

$$v_n(y)=\frac{h_{11}\beta_n\cos\beta_n y+h_{12}\sin\beta_n y}{\sqrt{h_{11}\beta_n^2+h_{12}^2}}, \qquad (7)$$

її квадрат норми

$$\|v_n(y)\|^2=\int_0^{\ell}[v_n(y)]^2dy=\frac{b}{2}+\frac{1}{2}\frac{(h_{11}h_{22}+h_{12}h_{21})(h_{11}h_{21}\beta_n^2+h_{12}h_{22})}{(h_{11}^2\beta_n^2+h_{12})(h_{21}^2\beta_n^2+h_{22})}, \qquad (8)$$

β_n - корені трансцендентного рівняння

$$\mathrm{ctg}\,\beta b=\frac{h_{11}h_{21}\beta^2-h_{12}h_{22}}{\beta(h_{12}h_{21}+h_{11}h_{22})}. \qquad (9)$$

При цьому для двічі неперервно диференційованої на сегменті $[0,b]$ функції $f(y)$ має місце основна тотожність інтегрального перетворення диференціального оператора

$$\Lambda_n\left[\frac{d^2f}{dy^2}\right]=-\beta_n^2 f_n+\frac{v_n(b)}{h_{21}}\left(h_{21}\frac{d}{dy}+h_{22}\right)f(y)\Big|_{y=b}+$$
$$+\frac{v_n(0)}{h_{11}}\left(-h_{11}\frac{d}{dy}+h_{12}\right)f(y)\Big|_{y=0}. \qquad (10)$$

Приходимо до задачі побудови обмеженого в області $\mathcal{D}'=\{(t,x):$ $t>0,\ x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\}$ розв"язку сепаратної системи рівнянь теплопровідності

$$\frac{1}{a_j^2}\frac{\partial T_{jn}}{\partial t}+\chi_j^2 T_{jn}-\left(K_{1j}^2\frac{\partial^2 T_{jn}}{\partial x^2}-K_{2j}^2\beta_n^2 T_{jn}\right)=F_{jn}(t,x),\ j=1,2, \tag{I1}$$

за початковими умовами

$$T_{jn}(t,x)\big|_{t=0}=g_{jn}(x) \tag{I2}$$

і умовами спряження

$$\begin{cases}\left[\left(K_1\frac{\partial}{\partial x}+1\right)T_{1n}(t,x)-T_{2n}(t,x)\right]\Big|_{x=0}=0,\\ \left[\lambda_1\frac{\partial T_{1n}(t,x)}{\partial x}-\lambda_2\frac{\partial T_{2n}(t,x)}{\partial x}\right]\Big|_{x=0}=0.\end{cases} \tag{I3}$$

Розв"язок задачі (I1)-(I3) будується методом інтегрального перетворення Фур"є на декартовій осі з точкою спряження:

$$F_1[f(x)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\overline{V(x,\lambda)}\,\sigma(x)\,dx\equiv\tilde f(\lambda), \tag{I4}$$

$$F_1^{-1}[\tilde f(\lambda)]=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{Re}[\tilde f(\lambda)V(x,\lambda)]\,d\lambda\equiv f(x). \tag{I5}$$

При цьому для двічі неперервно-диференційованої на осі функції $f(x)$, що задовольняє умови спряження (I3) і зникає разом із своєю першою похідною на $x=\pm\infty$, справедлива основна тотожність інтегрального перетворення диференціального оператора

$$F_1[\chi(x)\mathcal{I}[f(x)]]=\int_{-\infty}^{0}a_1^2\frac{d^2f}{dx^2}\overline{V_1(x,\lambda)}\sigma_1\,dx+\int_0^{\infty}a_2\frac{d^2f}{dx^2}\overline{V_2(x,\lambda)}\sigma_2\,dx=$$

$$=-\lambda^2\tilde f(x)-\left[\gamma_1^2\int_{-\infty}^{0}f(x)\overline{V_1(x,\lambda)}\sigma_1\,dx+\gamma_2^2\int_0^{\infty}f(x)\overline{V_2(x,\lambda)}\sigma_2\,dx\right]. \tag{I6}$$

Запишемо систему (I1) і початкові умови (I2) у матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial T_{1n}}{\partial t} + a_1^2 T_{1n} - \left(\kappa_{11}^2 \frac{\partial^2 T_{1n}}{\partial x^2} - \kappa_{12}^2 \beta_n^2 T_{1n}\right) \\ \frac{\partial T_{2n}}{\partial t} + a_2^2 T_{2n} - \left(\kappa_{21}^2 \frac{\partial^2 T_{2n}}{\partial x^2} - \kappa_{22}^2 \beta_n^2 T_{2n}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^2 \mathcal{F}_{1n} \\ a_2^2 \mathcal{F}_{2n} \end{bmatrix}, \tag{17}$$

$$\begin{bmatrix} T_{1n}(t,x) \\ T_{2n}(t,x) \end{bmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{bmatrix} g_{1n}(x) \\ g_{2n}(x) \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Інтегральне перетворення F_1, визначене формулою (14), запишемо у вигляді операторної матриці-рядка:

$$F_1[\ldots] = \left[\int_{-\infty}^{0} \ldots \overline{V_1(x,\lambda)} \sigma_1 dx \quad \int_{0}^{\infty} \ldots \overline{V_2(x,\lambda)} \sigma_2 dx \right]. \tag{19}$$

Застосуємо операторну матрицю-рядок (19) за правилами множення матриць до задачі (17)-(18). В силу основної тотожності (16) отримуємо задачу Коші

$$\frac{d\tilde{T}_{1n}}{dt} + (a_1^2\omega_1^2 + \gamma_1^2 + \lambda^2)T_{1n} + \frac{d\tilde{T}_{2n}}{dt} + (a_2^2\omega_2^2 + \gamma_2^2 + \lambda^2)T_{2n} =$$
$$= a_1^2 \mathcal{F}_{n1}(t,\lambda) + a_2^2 \tilde{\mathcal{F}}_{n2}(t,\lambda) \equiv \tilde{\mathcal{F}}_n(t,\lambda); \tag{20}$$
$$\omega_{jn}^2 = x_j^2 + k_{j1}^2 \beta_n^2 ;$$

$$\tilde{T}_n(t,\lambda)\Big|_{t=0} = \left(\tilde{T}_{n1}(t,\lambda) + \tilde{T}_{n2}(t,\lambda)\right)\Big|_{t=0} = g_{1n}(\lambda) + g_{2n}(\lambda) = g_n. \tag{21}$$

Припустимо, що при кожному фіксованому β_n $\max\{a_1^2\omega_1^2, a_2^2\omega_2^2\} = a_2^2\omega_2^2$. Оскільки $(a_2^2\omega_2^2 - a_1^2\omega_1^2) \geq 0$, то, поклавши всюди $\gamma_2^2 = 0$, $\gamma_1^2 + a_1^2\omega_1^2 = a_2^2\omega_2^2$, задачу Коші (20)-(21) перепишемо так:

$$\left[\frac{d}{dt} + (\lambda^2 + \omega_2^2 a_1^2)\right]\tilde{T}_n(t,\lambda) = \mathcal{F}_n(t,\lambda); \ \tilde{T}_n(t,\lambda)\Big|_{t=0} = g_n(\lambda). \tag{22}$$

Безпосередньо перевіряється, що розв"язком задачі (22) є функція

$$\tilde{T}_n(t,\lambda)=e^{-(\lambda^2+a_2^2\omega_{2n}^2)t}\tilde{g}_n(\lambda)+\int_0^t e^{-(\lambda^2+a_2^2\omega_{2n}^2)(t-\tau)}\tilde{F}(t,\lambda)\,d\tau \tag{23}$$

Для відновлення функції $T_n(t,x)=\{T_{1n}(t,x),T_{2n}(t,x)\}$ застосуємо до матриці-елементу $[\tilde{T}_n(t,\lambda)]$ за правилом множення матриць операторну матрицю-стовпець

$$F_1^{-1}[\ldots]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}[\ldots V_1(x,\lambda)]\,d\lambda\\ \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}[\ldots V_2(x,\lambda)]\,d\lambda\end{bmatrix}. \tag{24}$$

У результаті застосування до одержаних функцій $T_{jn}(t,x)$ оберненого інтегрального перетворення Фур"є на сегменті $[0,b]$ за правилом (6) матимемо функції

$$T_j(t,x,y)=\int_0^t\int_{-\infty}^0 \mathcal{H}_{j1}(t-\tau,x,\xi)G_1(\tau,\xi)\,d\xi\,d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^\infty \mathcal{H}_{j2}(t-\tau,x,\xi)G_2(\tau,\xi)\,d\xi\,d\tau,\quad j=1,2, \tag{25}$$

які визначають в області $\mathcal{D}$ розв"язок задачі (1)-(4).

У формулах (25) беруть участь функції

$$G_j(t,x,y)=a_j^2 f_j(t,x,y)+\kappa_{2j}^2\left[\frac{v_n(b)}{h_{21}}\psi_{2j}(t,x)+\right.$$
$$\left.+\frac{v_n(0)}{h_{11}}\psi_{1j}(t,x)\right]+g_j(x,y)\delta_+(t),\quad j=1,2 \tag{26}$$

і функції впливу

$$\mathcal{H}_{jk}(t,x,\xi,y)=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}\left[V_j(x,\lambda)\overline{V}_k(\xi,\lambda)\right]e^{-q_n t}\,d\lambda\,\frac{v_n}{\|v_n\|^2}, \tag{27}$$
$$j,k=1,2,$$

породжені дією теплових джерел (початковим температурним станом).

У дев"ятому та десятому параграфах за наведеною логічною схемою побудовано у замкнутій формі розв"язки нестаціо нерної задачі теплопровідності для напівобмеженої кусково-однорідної напівскінченної пластини та для обмеженої кусково-однорідної нескінченної пластини, при цьому використано інтегральне перетворення Фур"є на декартовій півосі по геометричній змінній y та гібридне інтегральне перетворення Фур"є для декартової півосі з n точками спряження по геометричній змінній x (§ 9), а у десятому параграфі - інтегральне перетворення Фур"є на декартовій осі по геометричній змінній y та інтегральне перетворення Фур"є на сегменті з n точками спряження.

Третій розділ присвячено побудові у замкнутій формі розв"язків незв"язаних динамічних задач термопружності для кусково-однорідних об"єктів: симетричних просторів (§ II), симетричних просторів із симетричною порожниною (§ I2), симетричних суцільних (§ I3) та порожнистих (§ I4) тіл. Внаслідок ідентичності логічної схеми розв"язання задач наведемо один із них (§ II).

Задача про структуру нестаціонарного температурного поля в багатошаровому симетричному просторі приводить до побудови обмеженого на множині $\mathfrak{D}=\{(t,r): t>0, r\in I_n^+=\bigcup_{j=1}^{n+1}(R_{j-1}, R_j);\ R_0=0, R_{n+1}=\infty\}$ розв"язку сепаратної системи диференціальних рівнянь теплопровідності B-параболічного типу:

$$\frac{1}{a_k^2}\frac{\partial T_k}{\partial t}-\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2\alpha_k+1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)T_k(t,r)=f_k(t,r),\ k=\overline{1,n+1}, \tag{28}$$

за умовами неідеального термічного контакту

$$\begin{cases}\left[\left(b_k\frac{\partial}{\partial r}+1\right)T_k(t,r)-T_{k+1}(t,r)\right]\Big|_{r=R_k}=0,\ k=\overline{1,n},\\ \left(\lambda_k\frac{\partial T_k(t,r)}{\partial r}-\lambda_{k+1}\frac{\partial T_{k+1}(t,r)}{\partial r}\right)\Big|_{r=R_k}=0,\end{cases} \tag{29}$$

та початковими умовами

$$T_k(t,r)\big|_{t=0}=g_k(r),\ k=\overline{1,n+1},\ r\in I_n^+. \tag{30}$$

Розв"язок задачі (28)-(30) будується методом інтегрального перетворення Фур"є-Бесселя на полярній осі $r\geqslant 0$ з n точками спряження:

$$H_{(\alpha);n}[f(r)] = \int_0^\infty f(r) V_{(\alpha)}(r,\lambda)\sigma_{(\alpha)}(r)dr \equiv \tilde{f}(\lambda); \tag{31}$$

$$H^{-1}_{(\alpha);n}[f(r)] = \int_0^\infty \tilde{f}(\lambda) V_{(\alpha)}(r,\lambda)\Omega_{(\alpha);n}(\lambda) \equiv f(r); \tag{32}$$

$$H_{(\alpha);n}[\mathcal{X}(r)\mathcal{L}_{(\alpha)}[f(r)]] \equiv \sum_{k=1}^{n+1} a_k^2 \int_{R_{k-1}}^{R_k} \left[\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2\alpha_k+1}{r}\frac{df}{dr}\right] \times \tag{33}$$

$$\times V_{(\alpha);k}(r,\lambda)\sigma_k r^{2\alpha_k+1} dr = -\lambda^2 \tilde{f}(\lambda),\ R_0 = 0,\ R_{n+1} = \infty.$$

Запишемо систему (28) і початкові умови (30) у матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \left[\frac{\partial}{\partial t} - a_1^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2\alpha_1+1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\right]T_1(t,r) \\ \left[\frac{\partial}{\partial t} - a_2^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2\alpha_2+1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\right]T_2(t,r) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left[\frac{\partial}{\partial t} - a_{n+1}^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2\alpha_{n+1}+1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\right]T_{n+1}(t,r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^2 f_1(t,r) \\ a_2^2 f_2(t,r) \\ \cdots\cdots \\ a_{n+1}^2 f_{n+1}(t,r) \end{bmatrix}, \tag{34}$$

$$\left.\begin{bmatrix} T_1(t,r) \\ T_2(t,r) \\ \cdots\cdots \\ T_{n+1}(t,r) \end{bmatrix}\right|_{t=0} = \begin{bmatrix} g_1(r) \\ g_2(r) \\ \cdots \\ g_{n+1}(r) \end{bmatrix}. \tag{35}$$

Інтегральне перетворення $H_{(\alpha);n}$, визначене формулою (31), записується у вигляді матриці-рядка. Застосувавши його за правилом множення матриць до задачі (34)-(35), в силу основної тотожності (33), у результаті елементарних перетворень отримуємо задачу Коші:

$$\frac{d\tilde{T}(t,\lambda)}{dt}+\lambda^2\tilde{T}(t,\lambda)=\tilde{f}(\lambda);\quad \tilde{T}(t,\lambda)\big|_{t=0}=\tilde{g}(\lambda), \tag{36}$$

розв"язком якої є функція

$$\begin{aligned}\tilde{T}(t,\lambda)&=\int_0^t e^{-\lambda^2(t-\tau)}\left[\tilde{f}(\tau,\lambda)+\delta_+(\tau)\tilde{g}(\lambda)\right]d\tau=\\&=e^{-\lambda^2 t}\tilde{g}(\lambda)+\int_0^t e^{-\lambda^2(t-\tau)}\tilde{f}(\tau,\lambda)\,d\tau.\end{aligned} \tag{37}$$

Для відновлення функції $T(t,r)=\{T_1(t,r), T_2(t,r)\ \dots,$ $T_{n+1}(t,r)\}$ застосовується обернене інтегральне перетворення Фур"є-Бесселя(32), записане у вигляді операторної матриці-стовпця. У результаті елементарних перетворень маємо розв"язок задачі (28)-(29):

$$\begin{aligned}T_k(t,r)&=\sum_{j=1}^{n+1}\int_0^t\int_{R_{j-1}}^{R_j}\mathcal{H}_{kj}(t-\tau,r,\rho)G_j(\tau,\rho)\sigma_j\rho^{2\alpha_j+1}d\rho\,d\tau=\sum_{j=1}^{n+1}\Big\{\int_{R_{j-1}}^{R_j}\mathcal{H}_{kj}(t,r,\rho)\times\\&\times g_j(\rho)\sigma_j\rho^{2\alpha_j+1}d\rho+a_j^2\int_0^t\int_{R_{j-1}}^{R_j}\mathcal{H}_{kj}(t-\tau,r,\rho)f_j(\tau,\rho)\sigma_j\rho^{2\alpha_j+1}d\rho\,d\tau\Big\}.\end{aligned} \tag{38}$$

У формулах (38) беруть участь функції впливу

$$\mathcal{H}_{kj}(t,r,\rho)=\int_0^\infty e^{-\lambda^2 t}V_{(\alpha);k}(r,\lambda)V_{(\alpha);j}(\rho,\lambda)\Omega_{(\alpha);n}(\lambda)\,d\lambda,\qquad k,j=\overline{1,n+1}, \tag{39}$$

і функції

$$G_j(t,r)=a_j^2 f_j(t,r)+g_j(\rho)\delta_+(t),\quad j=\overline{1,n+1}. \tag{40}$$

Динамічне поле напружень в симетричному просторі $\mathcal{S}$, породжене нестаціонарним температурним полем (38), описують відмінні від тотожного нуля центральні компоненти тензора напружень:

$$\sigma_{rr,j}(t,r)\equiv\sigma_{rr,j}=G_{oj}\left(\frac{\partial u_j}{\partial r}+\frac{2\alpha_j+1}{1-\mu_j}\,\frac{\mu_j}{r}u_j-m_{oj}T_j(t,r)\right),$$

$$\sigma_{22,j}(t,r)\equiv\sigma_{\varphi\varphi j}=G_{oj}\left[\frac{\mu_j}{1-\mu_j}\frac{\partial u_j}{\partial r}+\left(1+\frac{2\alpha_j\mu_j}{1-\mu_j}\right)\frac{u_j}{r}-m_{oj}T_j(t,r)\right], \tag{41}$$

$$\sigma_{33,j}(t,r)=G_{oj}\left[\frac{\mu_j}{1-\mu_j}\frac{\partial u_j}{\partial r}+\left(2\alpha_j+\frac{\mu_j}{1-\mu_j}\right)\frac{u_j}{r}-m_{oj}T_j(t,r)\right],$$

$$j=\overline{1,n+1}$$

При цьому радіальні компоненти вектора переміщень мають бути обмеженими на множині $\mathcal{D}$ розв"язком сепаратної системи В-гіперболічних диференціальних рівнянь руху

$$\frac{1}{c_j^2}\,\frac{\partial^2 u_j(t,r)}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial r^2}+\frac{2\alpha_j+1}{r}\,\frac{\partial u_j}{\partial r}-\frac{2\alpha_j+1}{r^2}u_j\right)=m_{oj}\frac{\partial T_j(t,r)}{\partial r} \tag{42}$$

за початковими умовами

$$u_j(t,r)\Big|_{t=0}=\varphi_j(r),\ \frac{\partial u_j}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi_j(r),\ r\in I_n^+,\ j=\overline{1,n+1}, \tag{43}$$

та умовами ідеального механічного контакту

$$\begin{cases}\left[u_j(t,r)-u_{j+1}(t,r)\right]\Big|_{r=R_j}=0\ , \ j=\overline{1,n}\ ,\\ \left[\sigma_{rr,j}(t,r)-\sigma_{rr,j+1}(t,r)\right]\Big|_{r=R_j}=0\end{cases} \tag{44}$$

Розв"язок крайової задачі (42)-(44), побудований також методом гібридного інтегрального перетворення Фур"є-Бесселя на полярній осі $r\geq 0$ з n точками спряження, має структуру:

$$u_j(t,r)=\sum_{k=1}^{n+1}m_{ok}c_k^2\int_0^t\int_{R_{k-1}}^{R_k}\mathcal{E}_{(\alpha+1,\alpha);jk}(t-\tau,r,\rho)T_k(\tau,\rho)\sigma_k\rho^{2\alpha_k+1}d\rho d\tau+ \tag{45}$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\sum_{k=1}^{n+1} C_k^2 \int_{R_{k-1}}^{R_k} \mathcal{R}_{(\alpha+1,\alpha);jk}(t,z,\rho)\varphi_k(\rho)\rho^{2\alpha_k+1}d\rho +$$

$$+\sum_{k=1}^{n+1} C_k^2 \int_{R_{k-1}}^{R_k} \mathcal{R}_{(\alpha+1,\alpha);jk}(t,z,\rho)\Psi_k(\rho)\rho^{2\alpha_k+1}d\rho,\ j=\overline{1,n+1}.$$

У формулах (45) беруть участь функції Коші

$$\mathcal{R}_{(\alpha+1,\alpha);jk}(t,z,\rho)=\int_0^\infty V_{(\alpha+1,\alpha);k}(\rho,\beta)V_{(\alpha+1,\alpha);j}(z,\beta)\Omega(\beta)\frac{\sin\beta t}{\beta}d\beta, \tag{46}$$

породжені початковими умовами і функції

$$\mathcal{T}_{(\alpha+1,\alpha);jk}(t,z,\rho)=$$

$$=\int_0^\infty \frac{\sin\beta t}{\beta}V_{(\alpha+1,\alpha);j}(z,\beta)\left[\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{2\alpha_k+1}{\rho}V_{(\alpha+1,\alpha);k}(\rho,\beta)\right]\Omega_{(\alpha+1,\alpha)}(\beta)d\beta, \tag{47}$$

породжені дією нестаціонарного температурного поля; $j,k=\overline{1,n+1}$. За формулами (41) отримуємо функції $\sigma_{i,j}(t,z)$ $(i=\overline{1,3};\ j=\overline{1,n+1})$, що описують поле напружень в даному просторі.

У дванадцятому параграфі методом гібридного інтегрального перетворення Вебера на полярній осі $z \geq R > 0$ з n точками спряження отримано розв"язок динамічної задачі термопружності для симетричного простору із симетричною порожниною.

У тринадцятому та чотирнадцятому параграфах методом скінченних інтегральних перетворень відповідно Ханкеля 1-го та 2-го роду розв"язана динамічна задача термопружності для симетричних суцільних та порожнистих тіл.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ І ВИСНОВКИ

1. Побудовано у замкнутій формі розв"язки стаціонарної та нестаціонарної задач теплопровідності для необмежених кусково-однорідних нескінченних, напівскінченних та скінченних пластин.

2. Побудовано у замкнутій формі розв"язки стаціонарної та нестаціонарної задач теплопровідності для напівобмежених кусково-однорідних нескінченних, напівскінченних та скінченних пластин.

3. Побудовано у замкнутій формі розв"язки стаціонарної та нестаціонарної задач теплопровідності для напівобмежених кусково-однорідних нескінченних, напівскінченних та скінченних пластин.

4. Побудовано у замкнутій формі розв"язки статичної, квазістатичної та динамічної задач термопружності для кусково-однорідних симетричних просторів.

5. Побудовано у замкнутій формі розв"зки статичної, квазістатичної та динамічної задач термопружності для кусково-однорідних симетричних просторів із симетричною порожниною.

6. Побудовано у замкнутій формі розв"язки статичної, квазістатичної та динамічної задач термопружності для кусково-однорідних симетричних суцільних тіл.

7. Побудовано у замкнутій формі розв"язки статичної, квазістатичної та динамічної задач термопружності для кусково-однорідних симетричних порожнистих тіл.

8. Проведено чисельне дослідження залежності структури нестаціонарного температурного поля і породженого ним динамічного поля переміщень і напружень в двошаровому осесиметричному просторі від коефіцієнта термоопору.

ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ДИСЕРТАЦІЇ ОПУБЛІКОВАНО В НАСТУПНИХ РОБОТАХ:

I. Блажевский С.Г. Моделирование квазистатических термоупругих полей в многослойном симметричном пространстве // IУ Межреспубликанский симпозиум "Остаточные напряжения: моделирование и управление", Пермь, 3-7 июня 1992 г.: тез. докл. - Пермь, 1992. - С, I5.

2. Блажевский С.Г. Статические термоупругие поля в многослойных пространствах с симметричной полостью// Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения: сб. науч. тр. - Киев: Ин-т математики АН Украины, I992. - С. 23-25.

3. Блажевський С.Г. Нестаціонарні температурні поля в багатошарових просторах із симетричною порожниною // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач.- Київ: Ін-т математики АН України, 1992. - Вип.I. - С. 3-I2.

4. Блажевский С.Г. Динамическая задача термоупругости для многослойных пространств с симметричной полостью // Міжнародна конференція, присвячена пам"ті академіка М.П.Кравчука, Київ-Луцьк, 22-28 вересня 1992 р.: тез. доп. - Київ-Луцьк, 1992.- С. 20.

5. Блажевський С.Г. Нестаціонарні температурні поля у багатошарових суцільних симетричних тілах // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. - Київ: Ін-т математики АН України, 1993. - Вип. 2. - С. 3-9.

6. Блажевский С.Г. Моделирование термоупругих полей в пространствах с полым симметричным включением // Проблемы экологии и ресурсосбережения "Экоресурс-I", Черновцы, 23-27 мая 1991 г.: тез. докл. - Черновцы, 1991. - С. 153.

7. Блажевский С.Г. Новые подходы к решению задач термомеханики // Третья Всесоюзная конференция "Новые подходы к решению дифференциальных уравнений": тез. докл. - М.,1992. С.73.

8. Блажевский С.Г. Типовые задачи термомеханики кусочно-неоднородных структур // Нелинейные задачи математической физики и задачи со свободной границей, Донецк, 3-7 сент. 1991 р.: тез. докл. - Донецк, 1991.-С.I7.

9. Блажевский С.Г. Динамические и обобщенные задачи термоупругости многослойных симметричных пространств // Международная научная конференция "Дифференциальные и интегральные уравнения. Математическая физика и специальные функции, Самара, 27-30 мая 1992 г.: тез. докл. - Самара, 1992. - С. 34-35.

I0. Блажевский С.Г., Ленюк М.П. Термоупругое состояние симметричных пространств. - Черновцы: Черновиц. ун-т, 1992. -85 с.

Підп. до друку 12.10.93. Формат 60x84/16. Папір друк. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 0,92 Ум. фарбо-відб. 0,92 Обл.-вид.арк. 0,8
Тираж 100 пр. Зам. 378 Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики АН України
252601 Київ 4, ГСП, вул. Терещенківська, 3

[illegible]