

АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ОРДЕНА ТРУДОВОГО ЧЕРВОНОГО ПРАПОРА
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ АН УКРАЇНИ

На правах рукопису

УДК 517.987

АНТОНІК Олександра Вікторівна

АНАЛІТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ МІР,
АСОЦІЙОВАНИХ З ГІВЕСОВИМИ СИСТЕМАМИ
НА МНОГОВИДАХ

01.01.01 - математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття вченого ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ - 1993



00357710 (N)

Роботу виконано у відділі
Інституту математики АН України

Науковий керівник - доктор фізико-математичних наук,
професор КОНДРАТЬЄВ Ю. Г.

Обізнані опоненти - доктор фізико-математичних наук,
доцент КОЗИЦЬКИЙ В. В.

кандидат фізико-математичних наук,
доцент КОНСТАНТИНОВ О. Д.

Провідна установа - Київський політехнічний інститут,
Міністерство вищої і середньої освіти

Захист дисертації відбудеться "11" січня 1994 р.
о 15 годині на засіданні спеціалізованої ради Д 016.50.01
при Інституті математики АН України за адресою:

252601 Київ - 4, ГСП, вул. Терещенківська, 3

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці інституту

Автореферат розіслано "23" листопада 1993.

Вчений секретар
спеціалізованої ради

В. С.

ГУСАК Д. В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Важливим розділом сучасного функціонального аналізу є теорія міри на нескінченновимірних просторах. Такі міри виникають при строгому математичному описі багатьох моделей математичної фізики, а також є природним об'єктом дослідження в теорії випадкових процесів. В загальній теорії таких мір виділяється клас так званих гладких мір, які припускають побудову зв'язаного з ними досить розвинутого нескінченновимірного аналізу. Вивчення властивостей гладких мір було започатковано і проводилось в роботах В.І.Авербуха, С.Альбеверіо, Ю.М.Березанського, Н.Я.Віленкіна, І.М.Гельфанда, Ю.Л.Далецького, Ю.Г.Кондратьєва, А.В.Скорохоца, О.Г.Смолянова, С.В.Фоміна та інших.

Інший клас мір на нескінченновимірних просторах складають так звані гіббсові міри. Важливість цього класу зумовлюється, по-перше, явним і конструктивним алгоритмом їх побудови.

З точки зору застосувань за допомогою гіббсових мір можуть бути описані рівноважні стани класичних і квантових систем математичної фізики.

Найбільш вивченим є підклас гіббсових мір на зліченному добутку метричних просторів, що відповідають класичним системам статистичної фізики. Їх дослідження в першу чергу пов'язано з роботами Р.Л.Добрушина, О.Е.Ланфорда, В.А.Малишева, Р.Л.Мінлоса, Д.Рюеля, Я.Г.Сінал. При цьому нетривіальну роль відіграють додаткові топологічні обмеження на відповідні метричні простори (типу компактності або \mathcal{C} - компактності).

Строгий аналітичний опис квантових систем математичної фізики в термінах гіббсових мір започатковано в роботах Ф.Альбергеріо, Й.Жинібра, Р.Хег-Крона і розвивався у подальшому, наприклад, в роботах Ф.Дайсона, А.Клейна, Ю.Г.Кондратьєва, Л.І.Ландау, В.Ліба, Л.А.Пастура, Й.М.Парка, Б.Саймона, В.Фрєоліха та багатьох інших.

В дисертації досліджуються два класи гіббсових систем. З одного боку, це системи, пов'язані з так званими гіббсовими станами квантових систем на S^* - алгебрах операторів, які задовольняють певну умову аналітичності Кубо-Мартіна-Швінгера (КМШ). В ряді важливих моделей такі стани можуть бути описані в термінах відповідних їм гіббсових мір. Така відповідність зводить на формальному рівні дослідження квантових станів до задачі вивчення гіббсових мір на певних функціональних просторах періодичних траєкторій. Нескінченновимірність цього простору є основною складністю, яка не дозволяє прямого застосування теорії гіббсових мір в квантовому випадку.

З іншого боку, в дисертації розглядається ситуація гіббсової міри на зліченному добутку ріманових многовидів. У випадку компактних многовидів задача існування і єдиності таких мір вирішена в роботах Р.Л.Добрушина, Л.Гросса, Г.Фьоллмера. Проте некомпактна ситуація досі є лише частково дослідженою навіть відносно проблеми існування та єдиності гіббсових мір. Тим більш складним виявляється питання детального вивчення властивостей таких мір як, наприклад, швидкість спадання кореляцій.

Дисертація присвячена вивченню властивостей гіббсових мір на злічених добутках функціональних просторів та ріманових

многовидів. За допомогою таких мір можуть бути описані модельні системи квантової та класичної математичної фізики, які привертають увагу багатьох дослідників. З цієї точки зору дослідження, проведені в дисертації, є актуальними.

Метод дисертаційної роботи є дослідження мір, асоційованих з гіббсовими системами.

Методика досліджень. В роботі використані методи функціонального аналізу, диференційної геометрії, теорії станів на C^* - алгебрах, теорії представлень операторнозначних функцій, теорії випадкових процесів і теорії рівнянь в частинних похідних.

Наукова новизна і основні результати дисертації.

Всі результати, отримані в дисертаційній роботі, є новими. Назвемо основні з них.

1. Отримано умови існування і єдиності гіббсових евклідових мір для квантових ґраткових систем на компактних ріманових многовидах. Доведено спадання кореляцій* для цих мір.
2. Побудовано квазівільний КМШ - стан квантової ґраткової системи, для якого має місце некомутативна центральна гранична теорема.
3. Отримано необхідні і достатні умови представлення експоненційно опуклих періодичних операторнозначних функцій.
4. Отримано умови єдиності і експоненційно швидкого спадання кореляцій* для гіббсових мір на злієнному добутку некомпактних ріманових многовидів. Ці результати застосовані до класу систем з опуклою негауссовою взаємодією.

Теоретична і практична цінність.

Показано, що центральна гранична теорема для евклідових гіббсових мір дає можливість відтворити квазівільний КМШ - стан, для якого має місце некомутативна центральна гранична теорема. Запропоновано схему дослідження спадання кореляцій для гіббсової міри на зліченному добутку некомпактних ріманових многовидів, що спирається на спеціальні вагові оцінки. Схему застосовано при дослідженні моделей з опуклою негауссовою взаємодією.

Публікації. Результати дисертації опубліковані в роботах [1 - 6].

Структура і об'єм роботи. Дисертація складається зі вступу, трьох розділів і двох додатків, та списку літератури, що нараховує 93 назви і викладена на 129 сторінках машинопису.

ЗМІСТ РОБОТИ

Коротко зупинимось на структурі і основних результатах дисертаційної роботи.

В розділах 1 і 2 вивчаються, так звані, температурні гіббсові системи на ґратці. При цьому відповідна гіббсова міра задається на просторі \mathfrak{S} - періодичних неперервних відображень осі \mathbb{R}^1 в злічений добуток компактних ріманових многовидів.

Розділ 1 присвячений побудові температурного гіббсового стану і вивченню властивостей асоційованої гіббсової міри.

В § I.1 наведено необхідні факти з теорії КМШ і
гіббсових станів на C^* - алгебрах операторів.

Температурним КМШ - станом на C^* - алгебрі \mathcal{B}
називається невід'ємний нормований лінійний функціонал $\int_{\mathcal{B}}$
такий, що існує аналітична у смугі $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \Im z < \beta\}$
і неперервна на границі функція $F_{A,B}(z)$, $A, B \in \mathcal{B}$ така,
що

$$\forall t \in \mathbb{R}^1 : F_{A,B}(t) = \int_{\mathcal{B}} (A \Xi_t(B))$$

$$F_{A,B}(t+i\beta) = \int_{\mathcal{B}} (\Xi_t(B) A)$$

де Ξ_t - деяка фіксована група \ast - автоморфізмів
алгебри \mathcal{B} . Важливою властивістю КМШ-станів є те, що
функції

$$S_{A_1 \dots A_m}(t_1, \dots, t_m) = \int_{\mathcal{B}} (\Xi_{t_1}(A_1) \dots \Xi_{t_m}(A_m)) \quad (I)$$

для $t_1, \dots, t_m \in \mathbb{R}^1$, $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{B}$ припускають
аналітичне продовження у смугу $\{0 \in \Im z_1 \leq \dots \leq \Im z_m \leq \beta\}$
(H. Araki, Publ. Res. Inst. Math. Soc. - 1973. - 9. - P. 165-209).

Останнє дає можливість застосування методів теорії аналітич-
них функцій до вивчення КМШ - станів.

При додатковій умові стохастичної додатності КМШ - стану
з ним може бути пов'язана міра ν_{β} на просторі Ω_{β}
періодичних відображень осі \mathbb{R}^1 в спектр алгебри \mathcal{B}
(A Klein, L.J. Landau, Journ. Funct. An. - 1981 - 43 - P. 368-
428). При цьому по такій мірі можна відновити КМШ - стан,

отримавши явне представлення для аналітичного продовження
функції (I): $S_{A_1 \dots A_m}(it_1, \dots, it_m)$ для $0 = t_1 \leq$
 $\dots \leq t_m \leq \beta$, $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$, де \mathcal{A} комутативна під-
алгебра алгебри \mathcal{B} , така що $\mathcal{B} = \bigcup_t \Xi_t(\mathcal{A})$.

Міра ν_{β} називається температурною мірою, що відповідає

КМШ - стану ρ_β .

В § I.1 також розглядається важливий підклас КМШ-станів, а саме, так звані гіббсові стани, для яких відповідний функціонал

$$\rho_\beta \text{ на } C^* \text{ - алгебрі операторів задається}$$

$$\rho_\beta(A) = [\text{tr}(e^{-\beta H})]^{-1} \text{tr}(A e^{-\beta H})$$

для деякого самоспряженого оператора H з ядерною напівгрупою. При цьому скінченновимірні проєкції відповідної температурної міри ν_β конструюються по ядру напівгрупи оператора H .

В § I.2 реалізується строга процедура побудови гіббсових КМШ - систем на ґратці Z^d як границі відповідних систем в скінченних підоб'ємах $\Lambda \subset Z^d$. Нехай з кожним вузлом ґратки $k = (k_1, \dots, k_d) \in Z^d$ пов'язаний компактний ріманів многовид M_k з рімановим об'ємом B_k . Розглянемо сім'ю трансляційно інваріантних функцій $\{\Phi_A \in C(M^\Lambda), |\Lambda| < \infty, \Lambda \subset Z^d\}$, яка задовольняє наступну умову скінченності радіуса взаємодії:

$$\exists r_0 > 0 : \forall \Lambda \subset Z^d, \text{diam } \Lambda > r_0 \Rightarrow \Phi_\Lambda = 0 \quad (2)$$

Тут $M^\Lambda = \prod_{k \in \Lambda} M_k$.

Гіббсовому стану у скінченному об'ємі $\Lambda \subset Z^d$ на алгебрі обмежених операторів \mathcal{B}_Λ у просторі $L_2(M^\Lambda, \prod_{k \in \Lambda} dB_k)$

$$\rho_\beta^\Lambda(A) = [\text{tr}(e^{-\beta H_\Lambda})]^{-1} \text{tr}(A e^{-\beta H_\Lambda})$$

де $H_\Lambda = - \sum_{k \in \Lambda} \Delta_k + \lambda \sum_{A \subset \Lambda} \Phi_A(x_A)$; $x_A = \{x_k\}_{k \in \Lambda}$

і Δ_k - оператор Лапласа-Бельтрамі на M_k , відповідає температурній мірі $\nu_{\beta, \Lambda}$ на просторі $C(S_\beta, M^\Lambda)$:

$$d\nu_{\beta, \Lambda}^*(\omega_\Lambda^*) = \frac{\exp\{-\lambda \int_0^\beta \sum_{A \subset \Lambda} \Phi_A(\omega_A(\tau)) d\tau\}}{Z_\Lambda} \prod_{k \in \Lambda} d\nu_k(\omega_k(\cdot))$$

де $\omega_A(\cdot) = \{\omega_k(\cdot)\}_{k \in A}$, $\omega_k(\cdot) = \{\omega_k(\tau), \tau \in S_\beta\}$ і ν температурна міра, асоційована з відповідним гіббсовим станом, побудованим по оператору Лапласа-Бельтрамі Δ_k .

Гіббсовий стан \int_β на алгебрі локальних спостережуваних $\mathcal{A}_{loc} = \bigcup_{\Lambda \subset \mathbb{Z}^d} \mathcal{B}_\Lambda$ будується як асоційований з слабкою границею мір $\nu_{\beta, \Lambda}$, коли $|\Lambda| \rightarrow \infty$.

Т е о р е м а 1.2.11. Нехай функції $\{\Phi_A\}$ задовольняють умову (2). Тоді за умови малості добутку $\lambda \cdot \beta$ існує слабка границя $\nu_\beta = w.\lim_{|\Lambda| \rightarrow \infty} \nu_{\beta, \Lambda}$. Крім того,

міра ν_β є єдиною в класі евклідових гіббсових мір з потенціалами $\{\Phi_A\}$ при оберненні температурі β .

Доведення цього факту базується на узагальненні схеми

Л.Гросса (Comm. Math. Phys. - 1979, 68 - P.8-29) і Г.Фоллмера (Journ. Funct. Anal. - 1982 - 46 - P.387-395) на температурний випадок.

В § 1.3 досліджуються властивості температурної міри ν_β . Результати цього параграфу є в певному сенсі підготовчими до вивчення властивостей відповідних температурних станів у розділі 2.

Т е о р е м а 1.3.4. Нехай функції $\{\Phi_A\}$ задовольняють умову (2). Тоді за умови малості добутку $\lambda \cdot \beta$ має місце експоненційно швидке спадання кореляцій для міри ν_β :

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} |\text{cov}_{\nu_\beta}(f, \tau_j g)| e^{\epsilon |j|} < \infty$$

де f, g - неперервні циліндричні по ґраті функції на просторі $\prod_{k \in \mathbb{Z}^d} C(S_\beta, M_k)$ і τ_j позначає оператор

зсуву на вектор $j \in \mathbb{Z}^d$, тобто $[\tau_j f](\omega_A(\cdot)) = f(\omega_{A+j}(\cdot))$.

як наслідок в Теоремі 1.3.5 показано, що має місце
 центральна гранична теорема для міри ν_{β} , тобто збіжність

$$\int_{\Omega_{\beta}} \exp i \lambda f^{\Lambda_n}(\omega(\cdot)) d\nu_{\beta}(\omega(\cdot)) \rightarrow e^{-\frac{\lambda^2}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \omega \nu_{\beta}(f, \tau_k f)} \quad (3)$$

для неперервної циліндричної по ґратці функції $f(\omega(\cdot))$.

Розділ 2 дисертації присвячено побудові так званого квазі-
 вільного ЮМШ - стану і доведенню некомутативної центральної
 граничної теореми.

Нехай ν_{β} є деякий трансляційно інваріантний стан на
 C^* -алгебрі локальних спостережуваних \mathcal{A}_{loc} . Для
 $A \in \mathcal{A}_{loc}$ і скінченної підмножини $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ введемо так звану
 флуктуацію в об'ємі Λ за формулою

$$A^{\Lambda} = \frac{1}{\sqrt{|\Lambda|}}$$

де τ_k позначає \times - автоморфізм алгебри \mathcal{A}_{loc} , індукований
 дією на вектор $k \in \mathbb{Z}^d$. Проблема полягає в дослідженні
 умов певної збіжності A^{Λ} , коли Λ вичерпує \mathbb{Z}^d і в
 характеристиці множини локальних спостережуваних $A \in \mathcal{A}_{loc}$,
 для яких границя існує.

В роботах Д.Гедеріса, А.Вербьора, П.Вотса (Comm Math Phys.
 1990 - 128 P.533-549 1982 - 122 P.249-266) отримано достатні
 умови справедливості некомутативної центральної граничної
 теореми для квантових ґраткових систем. При цьому центральна
 границя $\lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d} A^{\Lambda}$ задає представлення деякого квазівільного
 стану на C^* -алгебрі. Ці умови вказаним авторам вдалося

Перевірити лише у випадку найпростіших систем, в яких фізичний гільбертів простір кожної частинки є скінченновимірним, а відповідна C^* - алгебра спостережуваних є алгеброю скінченновимірних матриць.

В розділі 2 пропонується розв'язок задачі побудови квазівільного стану для випадку систем, описаних в розділі 1, коли відповідна алгебра спостережуваних \mathcal{B}_A є нескінченновимірним банаховим простором операторів. При цьому суттєво використовується зв'язок між КМШ - станами і відповідними температурними мірами.

В § 2.1 наведені необхідні факти з теорії абстрактних гармонійних станів, асоційованих з гауссовими мірами на оснащеному гільбертовому просторі.

В § 2.2 побудовано квазівільний КМШ - стан, для якого має місце некомутативна нейтральна гранична теорема.

Введемо гільбертів простір \mathcal{H}_{cov} як повнення у сенсі скалярного добутку $\langle \cdot, \cdot \rangle_{cov}$ множини $C_{cyl}(M^{\mathbb{Z}^d})$ циліндричних по траті неперервних функцій на $\prod_{k \in \mathbb{Z}^d} M_k$, факторизованої відносно напіскалярного добутку

$$\langle f, g \rangle_{cov} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} cov_{\mathcal{D}_k} (f(\omega(0)), \tau_k g(\omega(0)))$$

Цей скалярний добуток коректно означений в силу зведеного у розділі I (теорема I.3.4) спадання кореляцій для міри \mathcal{D}_k . По операторнозначній функції $C(t)$ у просторі \mathcal{H}_{cov} яка задається співвідношенням

$$\langle f, C(t)g \rangle_{cov} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} cov_{\mathcal{D}_k} (f(\omega(0)), \tau_k g(\omega(t)))$$

існує температурна гауссова міра M_{β} на просторі M_{β} відображень $\gamma: [0, \beta] \rightarrow \mathcal{H}_{cov}$, де \mathcal{H}_{cov} ,

деяке оснащення простору \mathcal{H}_{cov} .

Як наслідок центральної граничної теореми (3) в § 2.2 доводиться збіжність моментів міри ν_{β} до моментів міри

m_{β} у наступному сенсі:

$$\int_{\Omega_{\beta}} \prod_{j=0}^m \exp(i f_j^{\wedge n}(\omega(t_j))) d\nu_{\beta}(\omega(\cdot)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{M}_{\beta}} \prod_{j=0}^m \exp(i \langle f_j, Y(t_j) \rangle_{cov}) d m_{\beta}(Y(\cdot)). \quad (4)$$

З іншого боку операторнозначна функція $C(t)$ має представлення у просторі \mathcal{H}_{cov} :

$$C(t) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ta} + e^{-(\beta-t)a}}{1 + e^{-\beta a}} d\Gamma_+(a) \quad (5)$$

з деякою операторнозначною мірою $\Gamma_+ : \Gamma_+(\mathbb{R}_+) = \mathbb{1}d$.

На основі такого представлення в § 2.2 побудовано КМШ-стан G_{β} , асоційований з гауссовою мірою m_{β} , який грає роль квазівільного КМШ-стану в некомутативній центральній граничній теоремі. Як наслідок збіжності (4) і КМШ-умови отримано твердження некомутативної центральної граничної теореми в наступному сенсі.

Т е о р е м а 2.2.7. Нехай функції $\{ \Phi_{\Delta} \}$ задовольняють умову (2). Тоді при досить малому добутку $\lambda \cdot \beta$ має місце збіжність відповідних аналітичних продовжень функцій (I) на уявні осі

$$\int_{\beta} (\xi_{t_1}(e^{i f_1^{\wedge n}}) \dots \xi_{t_m}(e^{i f_m^{\wedge n}})) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G_{\beta}(\alpha_{t_1}(e^{i \psi_{j_1}(f_1)}) \dots \alpha_{t_m}(e^{i \psi_{j_m}(f_m)}))$$

де ψ_{j+} - певне відображення множини неперервних циліндричних функцій в деяку комутативну підалгебру C^* -алгебри,

всвідомлену з станом G_{β} . Тут $\exists t, \omega_t$ - відповідні

* - автоморфізми для КШ - станів β_{β} і G_{β} .

В § 2.3 досліджуються необхідні і достатні умови того, що операторнозначна міра Γ_+ (5) є розкладом одиниці деякого самоспряженого оператора у просторі $\mathcal{H}_{\omega v}$. Отримано наслідки для відповідних КШ - станів:

При цьому як основний інструмент дослідження використовується теорема про представлення експоненційно опуклої операторнозначної функції. Нагадаємо, що операторнозначна функція $[0, \beta] \ni t \mapsto C(t) \in \mathcal{Z}(\mathcal{H}_{\omega v})$ називається експоненційно опуклою на $[0, \beta]$, якщо для будь-яких $t_1, \dots, t_m \in [0, \beta/2]$, $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{H}_{\omega v}$ має місце нерівність

$$\sum_{i,j=1}^m \langle f_i, C(t_i + t_j) f_j \rangle_{\mathcal{H}_{\omega v}} \geq 0$$

Т е о р е м а 2.3.3. Слабо неперервна операторнозначна функція $C(t) \in \mathcal{Z}(\mathcal{H}_{\omega v})$, $t \in [0, \beta]$ має представлення

$$C(t) = (1 + e^{-\beta H})^{-1} (e^{-tH} + e^{-(\beta-t)H})$$

з деяким самоспряженим оператором H у просторі $\mathcal{H}_{\omega v}$ тоді і лише тоді, коли $C(t)$ симетрична відносно $\beta/2$, експоненційно опукла на $[0, \beta]$, $C(0) = Id$ і задовольняє співвідношення $\forall s \in [0, \beta/2]$:

$$C(s + \beta/4) = [C(s) + C(s + \beta/2)] (C(0) + C(\beta/2))^{-1} C(\beta/4)$$

Розділ 3 дисертації присвячено вивченню класичних гіббсових систем, тобто структури і властивостей множини гіббсових мір на зліченному добутку некомпактних метричних просторів.

Підхід, запропонований Р.Л.Добрушиним (Теория вероятностей и прил. - 1968 - 13 - С.197-224, Функцион.анализ и прил. - 1968 - 2 - 305-312), С.Е.Лантордом і Д.Роелем (Comm. Math. Phys. - 1969 - 11 - 194-215) до задання міри на зліченному добутку метричних просторів як гіббсової з фіксованими умовними мірами, дав можливість отримати ефективні критерії існування і єдиності таких мір. У роботах Л.Гросса і В.Сармона (Comm. Math. Phys. - 1979 - 68 - # 1,2) було показано, що в основі критеріїв типу Добрушина у випадку компактних метричних просторів лежать певні оцінки відсутності по варіації між умовними мірами. В некомпактному випадку наявність таких оцінок принципово відсутня через можливу необмеженість взаємодії. Наявні тут результати стосуються мір, що мають спеціальні додаткові властивості, такі як, наприклад, гауссова мажоранія взаємодії або відбиткова додатність. В цьому напрямку відомі результати М.Кассандро, Й.Лебовіца, В.А.Малишева, Р.А.Мінлоса, Е.Олів'єрі, А.Пеллагрінотті, Е.Презутті, С.В.Шлосмана.

В третьому розділі дисертації наведено схему дослідження спадання кореляцій і структури множини гіббсових мір на зліченному добутку некомпактних ріманових многовидів. Запропонований підхід спирається на спеціальну вагову оцінку, що відображає поведінку в емодії, і застосовується при дослідженні систем з опуклою негауссовою взаємодією.

В § 3.1 введено клас гіббсових мір на зліченному добутку некомпактних ріманових многовидів і доведено оцінку щільності у спектрі певного оператора Діріхле, пов'язаного з гіббсовою мірою. Нехай M - гладкий зв'язний ріманів многовид з рімановим об'ємом \mathcal{C} і ймовірнісна міра μ має щільність

$\Phi \in C^2(M)$, тобто $d\mu = \exp(-\Phi) d\mathcal{C}$. Міра μ

є рівномірно логарифмічно опуклою, якщо

$$\exists \lambda > 0 : \forall x \in M : Ric_{\mu}(x) = Ric(x) + \nabla \nabla \Phi(x) \geq \lambda$$

де Ric позначає тензор кривини Річчі і ∇ є оператором коваріантного диференціювання.

Т е о р е м а 3.1.2. Для рівномірно логарифмічно опуклої міри з щільністю $\Phi \in C^2$ має місце наступна нерівність:

$$\int_M \left(\int_M \xi d\mu \right)^2 d\mu \leq \int_M \langle R_{\mu}^{-1} \nabla f, \nabla f \rangle \quad (6)$$

для $\xi \in C_0^{\infty}(M)$. Тут $\langle \cdot, \cdot \rangle$ позначає скалярний рімановий добуток.

Нерівність (6) є узагальненням нерівності щільності у спектрі для оператора $H_{\mu} = \nabla^* \nabla$, де ∇^* позначає спряжений градієнт у просторі $L_2(M, \mu)$.

Нехай кожному вузлу ґратки $k \in \mathbb{Z}^d$ відповідає гладкий зв'язний ріманів многовид M_k . Розглянемо сім'ю функцій $\{\Phi_k \in C^3(M_k), W_{kj} \in C^3(M_k \times M_j), k+j\}$, що задовольняє наступні умови:

- 1) $\int_{M_k} \exp(-\Phi_k) d\sigma_k < \infty$ і $\exists \alpha_{kj} \in \mathbb{R}^1 : W_{kj} \geq \alpha_{kj}$
- 2) скінченність радіуса взаємодії

$$\exists r_0 > 0 : \forall k, j \in \mathbb{Z}^d : |k-j| \geq r_0 \Rightarrow W_{kj} = 0$$

- 3) рівномірна логарифмічна опуклість 'одноточкових' умовних мір: $\exists \varepsilon_k > 0 \exists B_k \in C^{\infty}(M_k)$:

$$Ric_k(x_k) + \nabla_k \nabla_k (\Phi_k + \lambda \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} W_{kj}) \geq B_k(x_k) \geq \varepsilon_k$$

Умовні міри $\{\mu_\Lambda\}$ в скінченних підоб'ємах ґратки $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ з граничною умовою $y \in M^{\mathbb{Z}^d}$ задаються співвідношенням

$$d\mu_\Lambda^y(x_\Lambda) = \frac{\exp\{-\sum_{k \in \Lambda} \Phi_k(x_k) - \alpha \sum_{\{k, j\} \cap \Lambda \neq \emptyset} W_{kj}(z)\}}{Z_\Lambda(y)} \prod_{k \in \Lambda} d\delta_k \quad (7)$$

де $Z_\Lambda(y)$ - нормуючий множник і $z = (x_\Lambda, y_{\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda})$.

Як наслідок нерівності (6) доведено наступну теорему про оцінку коливань одноточкових умовних мір.

Т е о р е м а 3.1.5. Нехай функції $\{\Phi_k, W_{kj}\}$ задовольняють умови 1) - 3) і

$$\forall k, j \in \mathbb{Z}^d: C_{kj} = 2 \sup_{x \in M^{\mathbb{Z}^d}} |B_k^{-1/2} B_j^{-1/2} \nabla_x \nabla_j W_{kj}| < \infty$$

Тоді має місце оцінка

$$\delta_j\left(\int_{M_\Lambda} f d\mu_\Lambda^y\right) \leq \delta_j(f) + \alpha C_{jk} \delta_k(f) \quad (8)$$

де

$$\delta_j(h) = \sup_{x, z \in M^{\mathbb{Z}^d}} \left\{ \frac{|h(x) - h(z)|}{\rho_j(x_j, z_j)}, x_i = z_i, i \neq j \right\}$$

Тут метрика ρ_j на многовиді M_j задається співвідношенням

$$\rho_j(x_j, z_j) = \inf_{\gamma: [0, T] \rightarrow M_j} \int_0^T \langle B_j(\gamma(\tau)) \dot{\gamma}(\tau), \dot{\gamma}(\tau) \rangle^{1/2} d\tau$$

$\gamma(0) = x_j, \gamma(T) = z_j$

В § 3.2 досліджуються питання єдиності і спадання кореляцій для гібсових мір в області Р.Л.Добручина (Теория вероятностей и прил. - 1970 - 15 С. 458-465), тобто для гібсових мір з умовними мірами (7), що задовольняють умову

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}^d} \int_{M^{\mathbb{Z}^d}} \rho_k(x_k, y_k) d\mu(x) < \infty$$

з деяким $y \in M^{\mathbb{Z}^d}$.

Основні результати § 3.2 містяться в т е о р е м а х 3.2.4 і 3.2.8 і можуть бути сформульовані наступним чином

Т е о р е м а. Нехай функції $\{\Phi_k, W_{kj}\}$ задовольняють умови 1) - 3) і

$$\alpha = \sup_{k \in \mathbb{Z}^d} \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} e^{\varepsilon |k-j|} C_{kj} < \infty$$

Тоді для $\lambda \in (0, 1/2)$

1. Для будь-яких гібсових мір μ, ν з умовними мірами (7), що задовольняють (9) з деяким $y \in M^{\mathbb{Z}^d}$, маємо $\mu = \nu$.
2. Для міри μ (9) з умовними мірами (7) має місце експоненціально швидке спадання кореляцій, тобто

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |\text{cov}_\mu(f, \tau_k g)| e^{\varepsilon |k|} < \infty \quad (10)$$

де f, g - неперервні циліндричні по ґраті фінітні функції на $M^{\mathbb{Z}^d}$ і $(\tau_k g)(x_j) = g(x_{k+j})$.

В § 3.3 схема § 3.2 застосована при дослідженні систем з опуклою негауссовою взаємодією на $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$. Відповідна сім'я функцій $\{\Phi_k, W_{kj}\}$ задовольняє умови:

1') існує парна функція $F \in C^2(\mathbb{R}^d)$ така, що $F'(t) \geq \varepsilon > 0$

$$\Phi_k(x_k) = F(x_k), \quad k \in \mathbb{Z}^d$$

2') існують парні опуклі функції $G_j \in C^2(\mathbb{R}^d)$, $j \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$

$$\forall k, j \in \mathbb{Z}^d : W_{kj}(x_k, x_j) = G_{k-j}(x_k - x_j)$$

3') скінченність радіуса взаємодії

$$\exists r_0 > 0 : \forall j : |j| > r_0 \Rightarrow G_j = 0.$$

Л е м а 3.3.1 доведено непорожність множини гібсових мір μ з умовними мірами (7) і функціями $I' - 3'$, які належать області Добрушина (9) з $y=0 \in \mathbb{R}^{2d}$

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}^d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} g^2(x_k) d\mu(x) < \infty \quad (II)$$

де $g(t) = \int_0^t \sqrt{F''(\tau)} d\tau$.

Т е о р е м а 3.3.2. Нехай функції $\{F_k, W_{kj}\}$ задовольняють умови $I' - 3'$ і

$$\gamma = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} e^{\varepsilon |k|} \sup_{x \in \mathbb{R}^{2d}} \left| \frac{G_k(x_k - x_0)}{\sqrt{F''(x_k)} \sqrt{F''(x_0)}} \right| < \infty$$

Тоді для $\lambda \in (0, 1/2\gamma)$

1. Множина гібсових мір (7), (II) складається тільки з однієї точки μ .
2. Для міри μ має місце експоненційно швидке спадання кореляцій (10).
3. Для $a_j > 0, \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} a_j < \infty$ множина

$$\{y \in \mathbb{R}^{2d} : \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k g^2(y_k) < \infty\}$$

є множиною повної μ - міри.

На закінчення автор вважає необхідним висловити вдячність науковому керівникові професору Юрію Григоровичу Кондратьєву за допомогу і увагу до роботи.

Основні результати дисертації
опубліковані в наступних роботах

1. Антонюк А.Викт. Кластерные разложения для функциональных интегралов, отвечающих гиббсовским состояниям квантовых решеточных систем // Методы функционального анализа в задачах математической физики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. - С.21-30.
2. Антонюк А.Викт., Кондратьев Ю.Г. Кластерные разложения для гиббсовских мер квантовых решеточных систем при нулевой температуре // Применение методов функционального анализа в математической физике. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1991. - С.14-20.
3. Antonjuk A.Val., Antonjuk A.Vict., Kondratiev Yu.G. The construction of macroscopic Gibbs states via functional integration // Methods of functional analysis in problems of mathematical physics. - Kiev: Inst. of Math. Acad. Sci. of Ukraine, 1992. - P.13-35.
4. Antonjuk A.Val., Antonjuk A.Vict. Gibbs measures on the infinite product of manifolds and Hermitian realizations of formal Hamiltonians // Methods of functional analysis in problems of mathematical physics. - Kiev: Inst. of Math. Acad. Sci. of Ukraine, 1992. - P.36-46.
5. Antonjuk A.Val., Antonjuk A.Vict. Smoothing properties of semi-groups for Dirichlet operators of Gibbs measures. - Kiev, 1993. - 59 p. - (Preprint Acad. Sci. of Ukraine. - Inst. of Math.: N 93.22.)
6. Antonjuk A.Val., Antonjuk A.Vict. Weighted spectral gap and Log-Sobolev inequalities and their applications. - Kiev, 1993. - 68 p. - (Preprint Acad. Sci. of Ukraine. - Inst. of Math.: N 93.33.)

Підп. до друку 20.11.93. Формат 60x84/16. Папір друк. Офс. д
Ум. друк. арк. 0,93 Ум. фарб.-відб. 0,93 Офл.-вид. арк. 0,8
Тираж 100 пр. Зам. 400 Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики АН України
252601 Київ 4, ГСП, вул. Героївківська, 3

AB 28891
AB 28.891