АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ

На правах рукописи

ЛАПУСТА Юрий Николаевич

# ТРЕХМЕРНАЯ ТЕОРИЯ ПРИПОВЕРХНОСТНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТОВ ПРИ СЖАТИИ

01.02.04 - механика деформируемого
твердого тела

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Киев - 1993

Диссертацией является рукопись.

Работа выполнена в Институте механики АН Украины.

Научный консультант - академик АН Украины
ГУЗЬ Александр Николаевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор ПЕЛЕХ Богдан Любомирович

доктор физико-математических наук, профессор БАБИЧ Иван Юрьевич

доктор технических наук, профессор АКБАРОВ Сурхай Джаббар оглы

Ведущая организация: Донецкий университет.

Защита состоится "28" 12 1993 г. в 10 часов на заседании специализированного ученого совета Д 016.49.01 при Институте механики АН Украины по адресу: 252057, Киев, ул. Нестерова, 3.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института механики АН Украины (Киев, ул. Нестерова, 3).

Автореферат разослан "16" 11 1993 г.

Ученый секретарь
специализированного ученого совета
доктор технических наук, профессор И. Черн. ЧЕРНЫШЕНКО И.С.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертационная работа посвящена развитию трехмерной теории приповерхностной неустойчивости волокнистых композитов при сжатии исходя из строгой постановки применительно к модели кусочно-однородной среды и исследованию на ее основе ряда основных классов задач.

Актуальность темы. Научно-технический прогресс во многих отраслях промышленности и строительства неразрывно связан со все более широким применением композитных материалов, среди которых важное место занимают волокнистые композитные материалы. Отличительной особенностью таких материалов является наличие четко выраженной ориентированной микроструктуры, что позволяет эффективно сочетать высокие прочность и жесткость армирующих элементов с технологическими характеристиками связующих и получать композиции, обладающие оптимальным набором свойств. Интенсивное нарастание использования таких материалов в технике, а также при создании инженерных сооружений вызывает необходимость ускоренного развития исследований по механике разрушения композитных материалов, включая вопросы исследования несущей способности и механизмов разрушения композитов в рамках строгих подходов.

Одним из характерных механизмов разрушения волокнистых композитов при сжатии является механизм, начальная стадия которого определяется потерей устойчивости волокон в связующем. Указанный механизм разрушения наблюдается наиболее явно в однонаправленных волокнистых композитах при осевом сжатии вдоль волокон. Кроме этого, данный механизм может реализовываться при сжатии композитных материалов с незначительным армированием в направлении, перпендикулярном направлению основного армирования, при двухосном нагружении с существенно большими нагрузками вдоль армирования по сравнению с нагрузками в поперечном направлении и в сжатых зонах при изгибе элементов конструкций из композитных материалов. Отмеченные явления в структуре композита могут существенно ограничивать несущую способность материала и приводить к его эксплуатационной непригодности либо разрушению. Из вышеизложенного следует, что изучение вопросов потери устойчивости армирующих элементов в волокнистых композитах при сжатии являются в настоящее время весьма актуальными.

Исследования вопросов потери устойчивости армированных волокнами материалов при сжатии можно условно разделить на две основные группы.

К первой группе можно отнести работы, выполненные с привлечением дополнительных упрощающих гипотез, характеризующих распределение усилий и взаимодействие между наполнителем и связующим, а также с использованием при исследовании потери устойчивости различных упрощенных двухмерных и одномерных моделей. К данному направлению можно отнести работы Л.Б.Грещука, М.Ф.Дау, Л.И.Карпенко, В.А.Терлецкого, Б.А.Ляшенко, С.Т.Милейко, А.А.Хвостункова, Б.У.Розена, М.А.Садовского, С.Л.Пу, М.А.Хуссейна, Т.Хайаши, Л.Р.Херрмана, В.Е.Масона, С.Т.Чана, Х.Шерха и других. Отметим, что упрощения, связанные с применением одно- и двумерных моделей при исследовании потери устойчивости, а также введение других упрощающих гипотез, указанных выше, могут приводить к результатам, являющимся следствием приближенности вводимых гипотез и упрощений и, поэтому, не всегда соответствующим сути исследуемого явления в микроструктуре волокнистого композита. Поэтому, для определения пределов применимости и достоверности результатов, полученных в рамках прикладных теорий, обычно необходимы дополнительные исследования, выполнные в рамках более строгих подходов.

Ко второй группе можно отнести работы, выполненные с привлечением к исследованию рассматриваемых явлений трехмерной линеаризированной теории устойчивости деформируемых тел. Следует отметить, что использование трехмерных линеаризированных уравнений, полученных в результате строгой линеаризации соотношений нелинейной механики деформируемых тел, без перехода к двумерным либо одномерным задачам и привлечения различных упрощающих гипотез, обеспечивает получение строгих решений и позволяет исключать неточности, характерные для работ первой группы. Данный подход впервые предложен в работах А.Н.Гузя и позволил ему в рамках континуальной модели среды получить объяснение характера разрушения и определить теоретический предел прочности армированного материала при сжатии применительно к внутреннему и поверхностному разрушению.

Наиболее строгие результаты по неустойчивости волокнистых композитов можно получить в рамках подхода, основанного на привлечении трехмерной линеаризированной теории устойчивости в рамках модели кусочно-однородной среды. Этот подход впервые предложен А.Н.Гузем и затем развит и обоснован в его последующих монографиях. Данный подход сопряжен со значительными трудностями математического и вычислительного характера, однако он свободен от ограничений и неточностей, характерных для упрощенных подходов, что позволяет строго исследовать качественные механические эффекты и получать результаты, которые можно считать эталонными при определении пределов применимости приближенных расчетных схем. Кроме того, иногда он применим к задачам, достоверное решение которых невозможно получить в рамках других подходов. В рамках данного подхода применительно к явлению внутренней неустойчивости (т.е. для бесконечной матрицы) были решены задачи устойчивости для одного, двух, периодического ряда и двоякопериодической системы волокон в матрице при сжатии. Этими и родственными задачами занимались: А.Н.Гузь, И.Ю.Бабич, С.Д.Акбаров, М.А.Черевко, И.Н.Гаращук, М.С.Бабаев и др. Наиболее полное представление о полученных результатах по внутренней неустойчивости волокнистых композитов, полученных в рамках вышеуказанного строгого подхода, можно получить из монографии А.Н.Гузя "Механика разрушения композитных материалов при сжатии" (Киев: Наук. думка, 1990.- 632 с.), а также из специального выпуска международного журнала "Applied Mechanics Reviews" (США) (1992.- Т.45, № 2.- С. 13-101), озаглавленном "Micromechanics of composite materials: Focus on Ukrainian research" (под редакцией А.Н.Гузя, авторы - А.Н.Гузь, С.Д.Акбаров, Н.А. Шульга, И.Ю.Бабич, Вик.Н.Чехов).

Однако, до настоящего времени <u>отсутствовали исследования</u> трехмерных проблем приповерхностной неустойчивости волокнистых композитов при сжатии, выполненные в рамках строгого подхода на основе модели кусочно-однородной среды. Эти вопросы представляют значительный интерес, так как все реальные тела имеют граничные поверхности и, поэтому, строгий учет влияния края композита на устойчивость волокон в связующем позволит полнее выявить особенности потери устойчивости в реальных композитах.

Целью настоящей работы является развитие трехмерной теории приповерхностной неустойчивости волокнистых композитов при сжатии исходя из строгой постановки применительно к модели кусочно-однородной среды, включая:

1) общую постановку различных классов трехмерных линеаризированных задач;
2) разработку методов исследования указанных проблем, включая случай композита с произвольной конфигурацией волокон в матрице;
3) численное исследование основных классов задач, анализ численных результатов и выявление новых механических эффектов, характерных для изучаемого круга вопросов.

Научная новизна и значимость работы заключается в следующем. На основе применения трехмерных линеаризированных уравнений к каждому компоненту волокнистого композитного материала впервые дана постановка и предложены методы решения различных классов трехмерных линеаризированных задач приповерхностной неустойчивости волокнистых композитов при сжатии в направлении армирования с учетом влияния свободной границы материала, а также с одновременным учетом взаимовлияния волокон в различных структурах при потере устойчивости. Исследования проводятся в общем виде для теории конечных докритических деформаций и различных вариантов теории малых докритических деформаций, для сжимаемых и несжимаемых материалов волокон и матрицы. Разработанные методы позволяют точно удовлетворить граничным условиям на свободной плоской поверхности, а также на свободной круговой цилиндрической поверхности матрицы. На основе вышеуказанной строгой постановки и разработанных подходов впервые решены различные классы трехмерных задач приповерхностной неустойчивости волокнистых композитов при сжатии применительно к конкретным моделям сред. Определены критические параметры нагружения и волнообразования, реализуемые формы потери устойчивости. Проведен анализ численных результатов, исследовано влияние механических и геометрических параметров задач на величины критических параметров нагружения. Оценено влияние свободной границы на устойчивость различных структур волокон. Выявлены новые механические эффекты, характерные для рассматриваемого круга вопросов.

Достоверность результатов и выводов работы обеспечивается строгостью используемого подхода, основанного на применении трехмерных линеаризированных уравнений к каждому компоненту волокнистого композита и точном удовлетворении граничных условий на свободной поверхности и поверхностях раздела сред; применением апробированных моделей сред; контролируемой точностью вычислений; совпадением результатов в ряде частных и предельных случаев с ранее известными.

Практическая ценность работы состоит в: разработке методик, позволяющих в рамках используемого строгого подхода определять критические значения параметров нагружения и волнообразования, а также установить области изменения параметров нагружения, механических и геометрических параметров волокнистых композитов, при которых их состояние равновесия является устойчивым; вычислении в работе значений критических укорочений для конкретных моделей материалов волокон и матриц; формулировке выводов о закономерностях приповерхностной потери устойчивости волокнистых композитов при сжатии вдоль волокон. Результаты работы могут быть использованы для оценки погрешностей результатов исследования неустойчивости волокнистых композитов, полученных в рамках более простых подходов, в которых не учитывалось влияние свободного края материала, для определения областей применимости указанных более простых подходов, а также при проектировании и расчетах новых конструкционных материалов, армированных волокнами, с целью избежания нежелательных явлений приповерхностной потери устойчивости в процессе их эксплуатации.

Апробация работы. Основные результаты диссертации были представлены в разное время на семинарах отдела динамики и устойчивости сплошных сред Института механики АН Украины (Киев, 1984-1993 г.г.); XI-ХУШ конференциях молодых ученых Института механики АН Украины (Кийлов, Киев, 1986-1993 г.г.), П и Ш Всесоюзных конференциях "Механика неоднородных структур" (Львов, 1987, 1991 г.г.), ХП конференции молодых ученых Института машиноведения АН СССР (Москва, 1989 г.), У Всесоюзной научно-технической конференции по методам расчета изделий из высокоэластических материалов (Рига, 1989 г.), Республиканской научно-технической конференции "Эффективные численные методы решения краевых задач механики твердого деформируемого тела" (Харьков, 1989 г.), УП Всесоюзной конференции по механике полимерных и композитных материалов (Рига, 1990 г.), УП Всесоюзной научной школе "Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках" (Симферополь, 1990 г.), Ш и IУ Всесоюзных школах по численным методам механики сплошной среды (п.Дюрсо Краснодарского края, 1991, 1992 г.г.), Школе "Современные методы качественной теории краевых задач" (Воронеж, 1992), I Международном симпозиуме украинских инженеров-механиков (Львов, 1993 г.), УШ Международной конференции по разрушению (Киев, 1993 г.).

В законченном виде диссертационная работа докладывалась и обсуждалась на семинарах отдела динамики и устойчивости сплошных сред Института механики АН Украины (руков. академик АН Украины А.Н.Гузь), семинаре "Проблемы механики и математики" Института прикладных проблем механики и математики АНУ, (руков. член корреспондент АН Украины Г.С.Кит); на семинаре по механике сплошной среды при Донецком университете (руков. академик АН Украины А.С. Космодамианский); на семинаре "Математические проблемы механики" кафедры прикладной математики и Проблемной лаборатории Симферопольского университета (руков. профессор Вал.Н.Чехов), на семинаре кафедры механики сплошных сред Киевского университета (руков. профессор Л.В.Мольченко), на объединенном семинаре по проблемам прочности кафедры теоретической и прикладной механики и кафедры сопротивления материалов и строительной механики Киевского автомобильно-дорожного института (руководители академик Транспортной Академии Украины, профессор А.О.Рассказов и профессор В.Г.Пискунов), на общеинститутском семинаре по механике Института механики АН Украины (руков. академик АН Украины А.Н.Гузь).

<u>Публикации</u>. Основные результаты диссертации опубликованы в 29 научных работах, в сборниках тезисов докладов ряда указанных выше конференций, а также были включены в вышеуказанный специальный выпуск "Applied Mechanics Reviews " (1992 г.) и монографию А.Н.Гузя "Механика разрушения композитных материалов при сжатии" (1990 г.).

В работах [3,7,13,25], написанных в соавторстве с научным консультантом академиком АН Украины А.Н.Гузем, автором осуществлена формулировка конкретных задач, разработка методов их решения, получение численных результатов для конкретных моделей сред и анализ закономерностей приповерхностной неустойчивости в волокнистом композите. А.Н.Гузю в задачах, рассмотренных в [3,7,13,25], принадлежит общая постановка проблемы.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, семи глав, заключения и списка литературы из 184 наименований, включает 72 рисунка и 11 таблиц. Общий объем диссертации 307 страниц.

Работа выполнена в Институте механики АН Украины. Автор выражает глубокую благодарность своему научному консультанту академику АН Украины А.Н.Гузю за постоянное внимание к работе и ценные советы при ее написании.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дан краткий обзор работ по тематике диссертации и анализ основных результатов, полученных ранее. Сформулирована цель диссертации, обоснована ее актуальность, научная новизна и значимость, достоверность полученных результатов и практическая ценность работы. Кратко изложено содержание работы по главам.

В первой главе приводятся некоторые основные сведения по трехмерной линеаризированной теории устойчивости деформируемых тел*, сформулированы основные положения при исследовании приповерхностной неустойчивости волокнистых композитов при сжатии и приведены исходные уравнения, которые составляют общую постановку различных классов трехмерных линеаризированных задач приповерхностной неустойчивости волокнистых композитов при

---

* Гузь А.Н. Устойчивость трехмерных деформируемых тел.- Киев: Наук. думка, 1971.- 276 с.

Гузь А.Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел.- Киев: Вища шк., 1986.- 512 с.

Гузь А.Н. Механика разрушения композитных материалов при сжатии.- Киев: Наук. думка, 1990.- 632 с.

сжатии в общем виде для различных вариантов трехмерной линеаризированной теории устойчивости и различных моделей сред.

Вводятся следующие основные допущения:

1. Рассматривается такое нагружение внешней сжимающей силой, при которой укорочения волокон и матрицы вдоль осей $z_q$ одинаковы

$$\varepsilon^{0a}_{zz,q} = \varepsilon^{0m}_{zz} . \tag{1}$$

Здесь и в дальнейшем все величины, относящиеся к наполнителю (волокнам) отмечены индексом "$a$" и, при необходимости, индексом, соответствующим номеру волокна, а величины, относящиеся к связующему (матрице), - индексом "$m$". При описании деформирования волокнистого композита применяются лагранжевы системы координат ( $r_q$ , $\theta_q$ , $z_q$ ), связанные с волокнами, и системы координат ( $x$ , $y$ , $z$ ) либо ( $r_c$ , $\theta_c$ , $z_c$ ), связанные со свободной поверхностью матрицы.

2. Докритические состояния в волокнах и матрице являются однородными и характеризуются соотношениями

$$\sigma^{*0a}_{zz,q} = const; \quad \sigma^{*0m}_{zz} = const; \quad \sigma^{*0a}_{zz,q} \neq \sigma^{*0m}_{zz};$$

$$\sigma^{*0a}_{rr,q} = \sigma^{*0a}_{\theta\theta,q} = \sigma^{*0m}_{xx} = \sigma^{*0m}_{yy} = 0 . \tag{2}$$

Кроме этого, получим

$$\varepsilon^{0a}_{rr,q} = \varepsilon^{0a}_{\theta\theta,q} ; \quad \varepsilon^{0m}_{xx} = \varepsilon^{0m}_{yy} \tag{3}$$

Отметим, что формулы (2) являются точными если коэффициенты поперечного расширения наполнителя и связующего равны между собой. Например, соотношения (2) выполняются точно для несжимаемых наполнителя и связующего. При неравных значениях коэффициентов поперечного расширения волокон и матрицы применимость соотношений (2) обоснована тем, что неоднородность докритического состояния в задачах устойчивости волокнистых материалов не оказывает значительного влияния на критические нагрузки, как показано в работах А.Н.Гузя, И.Ю.Бабича, И.Н.Гаращука, И.А.Черевко на примере одного волокна в бесконечной матрице.

3. Сжатие осуществляется "мертвыми" нагрузками. Согласно работам А.Н.Гузя, это положение приводит к выполнению достаточных условий применимости статического метода исследования задач трехмерной линеаризированной теории устойчивости. Поэтому, в работе применяется статический метод исследования.

4. Край матрицы свободен от усилий. Согласно данному положению в случае плоской поверхности матрицы потребуем выполнения условий

$$P_x^* = 0, \quad P_y^* = 0, \quad P_z^* = 0 \quad (y = 0). \tag{4}$$

В случае свободной цилиндрической поверхности условия нулевых усилий записываются в виде

$$P_{r_c}^{*m} = 0, \quad P_{\theta_c}^{*m} = 0, \quad P_{z_c}^{*m} = 0 \quad (r_c = R_c). \tag{5}$$

5. Преимущественно рассматриваются условия полного контакта между волокнами и матрицей. В соответствие с этими условиями на поверхностях раздела сред выполняются условия непрерывности для векторов усилий и перемещений

$$P_{r,q}^{*a} = P_r^{*m}; \quad P_{\theta,q}^{*a} = P_\theta^{*m}; \quad P_{z,q}^{*a} = P_z^{*m}; \tag{6}$$

$$u_{r,q}^{a} = u_r^{m}; \quad u_{\theta,q}^{a} = u_\theta^{m}; \quad u_{z,q}^{a} = u_z^{m} \quad (r_q = R). \tag{7}$$

В отдельных случаях дополнительно рассматриваются условия скользящего контакта на поверхности раздела сред (случай неполного контакта, когда условия непрерывности выполняются лишь для нормальных составляющих векторов усилий и перемещений).

6. Исследуется потеря устойчивости, локализованная вблизи границы композита. Таким образом, необходимо требовать выполнения условий затухания для возмущений перемещений при удалении от края материала.

7. При рассмотрении упруго-пластических моделей материалов для связующего или наполнителя применяется обобщенная концепция продолжающегося нагружения. Эта концепция позволяет не учитывать изменение зон разгрузки при исследовании потери устойчивости. Таким образом, рассмотрение для упругих и упругопластических моделей в дальнейшем проводится аналогично.

В главе приведены также сведения об используемых в работе при численном решении задач моделях сред, которые соответствуют композитам с полимерными, металлическими и высокоэластическими связующими. Выделены основные классы задач, соответствующие некоторым основным случаям композитов регулярной и нерегулярной структуры с низкой и высокой концентрацией наполнителя, решение которых позволяет исследовать характерные явления и эффекты при потере устойчивости вблизи свободной поверхности различных структур волокон.

Во второй главе предложены подходы и разработаны методы исследования приповерхностной неустойчивости волокнистых композитов при сжатии. С помощью общих решений трехмерных линеаризированных уравнений устойчивости при однородных докритических состояниях (см. сноску * на стр.9), которые применяются отдельно к каждому компоненту композита, задачи приповерхностной неустойчивости волокнистых композитов приводятся к задачам относительно функций $\psi^m$ и $\chi^m$ для матрицы $\psi^{aq}$ и $\chi^{aq}$ для каждого из волокон. Указанные функции являются решениями уравнений

– для каждого из волокон

$$\left(\Delta+\zeta_1^{aq^2}\frac{\partial^2}{\partial z_q^2}\right)\psi^{aq}=0$$

$$\left[\Delta^2+\left(\zeta_2^{aq^2}+\zeta_3^{aq^2}\right)\Delta\frac{\partial^2}{\partial z_q^2}+\zeta_2^{aq^2}\zeta_3^{aq^2}\frac{\partial^4}{\partial z_q^4}\right]\chi^{aq}=0; \qquad (8)$$

– для матрицы

$$\left(\Delta+\zeta_1^{m^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi^m=0$$

$$\left[\Delta^2+\left(\zeta_2^{m^2}+\zeta_3^{m^2}\right)\Delta\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\zeta_2^{m^2}\zeta_3^{m^2}\frac{\partial^4}{\partial z^4}\right]\chi^m=0. \qquad (9)$$

Величины $\zeta_j^{m^2}$ и $\zeta_j^{aq^2}$ ($j$ = 1,2,3) зависят от параметров докритического состояния и механических свойств матрицы и волокон соответственно. Формулы для определения значений $\zeta_j^2$, а также выражения для возмущений перемещений и усилий через функции $\Psi$ и $\chi$ для сжимаемых и несжимаемых тел приведены в работах А.Н.Гузя, указанных выше. С использованием этих формул в главе получены граничные условия и сформулирована в общем виде постановка рассматриваемых задач относительно функций $\psi^{aq}$, $\chi^{aq}$, $\psi^m$, $\chi^m$.

Развиваются методы решения поставленных задач применительно к случаям свободной плоской и свободной цилиндрической поверхности матрицы. Решения исходных уравнений для каждого из волокон строятся в виде рядов Фурье в цилиндрической системе координат ( $r_q$, $\theta_q$, $z_q$ ), связанной с данным волокном

$$\psi^{aq} = \gamma \sin \gamma z_q \Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_{n,1}^{aq} I_n(\zeta_1^{aq} \gamma r_q) \sin n\theta_q +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,1}^{aq} I_n(\zeta_1^{aq} \gamma r_q) \cos n\theta_q \Big\},$$

$$\chi^{aq} = \sum_{s=2}^{3} \chi_s^{aq}, \quad \chi_s^{aq} = \cos \gamma z_q \Big\{ \sum_{n=0}^{\infty} A_{n,s}^{aq} I_n(\zeta_s^{aq} \gamma r_q) \cos n\theta_q +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} C_{n,s}^{aq} I_n(\zeta_s^{aq} \gamma r_q) \sin n\theta_q \Big\}. \tag{10}$$

Решения исходных уравнений для матрицы для случая свободной плоской поверхности строятся в виде

$$\psi^m = \sum_{p \in Q} \psi_p^m, \quad \chi^m = \sum_{p \in Q} \chi_p^m, \tag{11}$$

где

$$\psi_p^m = \gamma \sin \gamma z_p \Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_{n,1}^{mp} K_n(\zeta_1^m \gamma r_p) \sin n\theta_p +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,1}^{mp} K_n(\zeta_1^m \gamma r_p) \cos n\theta_p + \sum_{n=1}^{\infty} A_{n,1}^{mp} \int_{-\infty}^{\infty} V_{11n}^{p}(t) \times$$

$$\times \exp(-\zeta_1^m \operatorname{ch} t \, \gamma y) \sin[\zeta_1^m \operatorname{sh} t \, \gamma (x - a_p)] \, dt + \tag{12}$$

$$+\sum_{k=2}^{3}\sum_{n=0}^{\infty} A_{n,k}^{mp}\int_{-\infty}^{\infty} V_{1kn}^{p}(t)\exp(-\sqrt{\zeta_1^{m^2}+\zeta_k^{m^2}sh^2t}\,\gamma y)\times$$

$$\times \sin[\zeta_k^{m} sht\,\gamma(x-a_p)]dt+\sum_{n=0}^{\infty} C_{n,1}^{mp}\int_{-\infty}^{\infty} W_{11n}^{p}(t)\times$$

$$\times\exp(-\zeta_1^{m} cht\,\gamma y)\cos[\zeta_1^{m} sht\,\gamma(x-a_p)]dt+$$

$$+\sum_{k=2}^{3}\sum_{n=1}^{\infty} C_{n,k}^{mp}\int_{-\infty}^{\infty} W_{1kn}^{p}(t)\exp(-\sqrt{\zeta_1^{m^2}+\zeta_k^{m^2}sh^2t}\,\gamma y)\times$$

$$\times\cos[\zeta_k^{m} sht\,\gamma(x-a_p)]dt\Big\}; \quad \chi_p^{m}=\sum_{s=2}^{3}\chi_{ps}^{m},$$

$\chi_{ps}^{m}$ строим по аналогии с (I2). В (I0),(I2) $\gamma=\pi l^{-1}$, $l$ – длина полуволны формы потери устойчивости, ( $a_p$ , $h_p$ ) – координаты центра поперечного сечения $p$ -го волокна относительно системы координат ( $x$ , $y$ ), $p\in Q$ , $Q$ – множество номеров волокон. После ряда преобразований с использованием известных свойств и интегральных представлений для цилиндрических функций, решения для матрицы представляются в виде несобственных интегралов в системе координат ( $x$ , $y$ , $z$ ) и затем подставляются в граничные условия на свободной плоской поверхности. В итоге получены в явном виде системы уравнений относительно неизвестных подинтегральных функций $V_{ijn}^{p}(t)$ , $W_{ijn}^{p}(t)$, входящих в решения для матрицы. Таким образом построены решения, которые, с учетом указанных систем уравнений, точно удовлетворяют граничным условиям на свободной плоской поверхности. Показано, что эти решения удовлетворяют также условиям затухания на "бесконечности" (при удалении от границы). Затем, с помощью соотношений, вытекающих из формулы Якоби-Ангера и теорем сложения Графа для функций Макдональда, решения для матрицы представляются поочередно в каждой из систем координат ( $r_q$ , $\theta_q$ , $z_q$ ), $q\in Q$ в виде рядов Фурье и совместно с решением для $q$ -го волокна подставляются в граничные условия на $q$ -й поверхности раздела сред. В результате, после ряда преобразований, выводится бесконечная однородная система алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных, входящих в построенные решения. Из условия существования нетривиальных решений, приравнивая определитель $\Delta(\rho, \varkappa)$ полученной системы уравнений к нулю, получим характеристическое уравнение

$$\Delta(\rho, \varkappa) = 0, \qquad (I3)$$

где $\rho$ – параметр нагружения, $\varkappa$ – параметр волнообразования. Отметим, что в качестве параметров нагружения в рассматриваемых задачах удобно выбирать укорочения вдоль осей волокон, а в качестве параметра волнообразования – величину $\pi R \ell^{-1}$, где $R$ – радиус одного из волокон. При численном решении характеристического уравнения для конкретного случая расположения волокон и конкретных моделей материалов волокон и матрицы другие параметры, входящие в характеристическое уравнение, необходимо фиксировать.

В ряде случаев удобно получать результаты по приповерхностной неустойчивости волокнистых композитов с помощью моделирования свободной границы матрицы круговой цилиндрической поверхностью. Поэтому предлагается также метод исследования для случая свободной круговой цилиндрической поверхности, который также можно рассматривать и как первое приближение при исследовании задач неустойчивости волокнистых композитов вблизи свободной криволинейной поверхности. Кроме того, в работе показано, что этим методом можно также получать с приемлемой точностью результаты и в случае свободной плоской поверхности. Построены решения задач, позволяющие строго удовлетворить всем граничным условиям в случае, когда рассматривается свободная круговая цилиндрическая поверхность. В результате удовлетворения граничным условиям на свободной поверхности и на поверхностях раздела сред получена бесконечная однородная система алгебраических уравнений. Получены характеристические уравнения с левыми частями в виде бесконечных определителей. Далее процедура численного решения характеристического уравнения для конкретных задач является аналогичной процедуре решения (I3).

В рамках используемого строгого подхода, основанного на привлечении трехмерной линеаризированной теории устойчивости в рамках модели кусочно-однородной среды, исследуется возможность наступления форм потери устойчивости волокон второго типа (с кручением) вблизи свободной поверхности. Полученный в рамках рассматриваемой постановки вывод о невозможности возникновения формы приповерхностной потери устойчивости с кручением для одного волокна в полубесконечной матрице обобщается также на случай произвольного конечного или бесконечного числа волокон. Это позволяет в дальнейших исследованиях при рассмотрении конкретных задач волокнистых композитов при сжатии ограничиваться решениями, соответствующими формам потери устойчивости первого типа (изгибным формам потери устойчивости).

<u>В третьей главе</u> рассматриваются трехмерные линеаризированные задачи о неустойчивости отдельного волокна в матрице вблизи свободной поверхности. Данная постановка возникает при исследовании задач о потере устойчивости малонаполненных волокнистых композитов регулярной периодической и нерегулярной структуры при сжатии вдоль волокон, когда вследствие малой концентрации наполнителя соседние волокна при потере устойчивости не влияют друг на друга и отдельные волокна испытывают лишь влияние свободной поверхности при потере устойчивости. Вследствие вышеизложенного, данная постановка позволяет строго исследовать эффекты влияния свободной границы на устойчивость отдельных волокон без влияния других факторов, связанных с взаимовлиянием соседних волокон, волокон в структуре и т.п. При исследовании применяется модель кусочно-однородной среды, т.е. для каждого из компонент записываются трехмерные линеаризированные уравнения устойчивости. Рассматриваются следующие изгибные формы потери устойчивости волокна в матрице: 1) форма потери устойчивости, при которой ось волокна остается в плоскости, перпендикулярной свободной границе; 2) форма потери устойчивости, при которой ось волокна выходит из указанной плоскости. Применительно к указанным формам потери устойчивости дана постановка и построены решения задач. В результате удовлетворения всем граничным условиям получены бесконечные однородные системы алгебраических уравнений в матричном виде

$$B^m_{\alpha k} X^m_k + B^a_{\alpha k} X^a_k + \sum_{n=0}^{\infty} Q_{\alpha k n} X^m_n = 0 \qquad (14)$$

$$\mathcal{D}^m_{\alpha k} y^m_k + \mathcal{D}^a_{\alpha k} y^a_k + \sum_{n=0}^{\infty} R_{\alpha k n} y^m_n = 0 \qquad (15)$$

$$(\alpha = 1,2;\ k = 0,1,2,\ldots)$$

для рассматриваемых первой и второй форм потери устойчивости соответственно. В (I4),(I5) $X_k^m$ , $X_k^a$ , $y_k^m$ , $y_k^a$ - векторы столбцы новых неизвестных постоянных.

Из условия существования нетривиальных решений выведены характеристические уравнения для рассматриваемых форм потери устойчивости. Исследованы свойства бесконечных характеристических определителей и доказано, что они являются определителями нормального типа, что обосновывает применимость метода редукции при численном решении характеристических уравнений.

Проведены численные исследования для конкретных моделей сред. В рамках второго варианта теории малых докритических деформаций рассмотрен случай сжимаемых изотропных упругих материалов волокна и матрицы. Данная модель материала соответствует композитам с полимерной матрицей. Докритическое состояние определялось по геометрически-линейной теории. Были проведены численные исследования практической сходимости используемого метода. Полученные результаты показали, что для получения результатов с относительной точностью до I% для критических укорочений достаточно ограничиться исследованием определителя десятого порядка. Определены критические укорочения для широкого диапазона жесткостных и геометрических параметров задачи. Проведено сравнение результатов, полученных для возможных форм потери устойчивости и показано, что реализуемой формой потери устойчивости является форма потери устойчивости в плоскости, перпендикулярной границе. Приведены данные, позволяющие определить погрешность, которая допускается, если не учитывать влияние свободной границы применительно к задаче для отдельного волокна. Сформулированы условия, при которых с заданной точностью для критических укорочений влиянием свободной поверхности можно пренебречь и применять результаты А.Н.Гузя, И.Ю.Бабича, полученные для одного волокна в бесконечной матрице без учета влияния свободной границы.

В рамках теории конечных докритических деформаций решена задача для материалов с потенциалом Трелоара, соответствующая композитам с высокоэластическими связующими.

Проведено сравнение результатов по приповерхностной неустойчивости волокна в матрице вблизи свободной плоской поверхности, полученных с помощью первого и второго методов исследования, изложенных во второй главе. Получено, что метод, основанный на замене свободной границы круговой цилиндрической поверхностью позволяет получить достаточно точные результаты и для случая плоской границы.

В рамках теории малых упруго-пластических деформаций решена задача для материалов с упруго-пластической матрицей со степенной зависимостью между интенсивностями напряжений и деформаций. Волокно в этом случае моделировалось сжимаемым изотропным линейно-упругим телом при малых деформациях. Данная постановка соответствует композитам с металлической матрицей. Как и в предыдущих задачах, наряду с обоснованием применимости метода усечения бесконечного определителя, также были проведены исследования практической сходимости используемого метода и показана его хорошая сходимость при расчетах. Получены значения критических укорочений в широкой области изменения жесткостных и геометрических параметров задачи. Проведен анализ полученных результатов и также показано, что свободная поверхность может оказывать значительное влияние на устойчивость отдельных волокон.

Вследствие того, что в реальности на поверхностях раздела сред композита возможны несовершенства контакта, которые могут ослабить композит и снизить критические нагрузки, решения задач, полученные с учетом полного сцепления на поверхностях раздела сред, можно считать верхними пределами критических укорочений. Для того, чтобы оценить нижние пределы критических укорочений, была решена задача с учетом скользящего контакта на поверхности раздела сред. В этом случае также показана хорошая практическая сходимость метода. Полученные численные результаты позволили сформулировать ряд выводов, относящихся к механике рассматриваемых явлений.

В четвертой главе рассмотрены задачи приповерхностной неустойчивости пары волокон вблизи края материала. Данная постановка возникает при исследовании потери устойчивости в малонаполненных волокнистых композитах, когда вследствие нерегулярности расположения волокон вблизи свободной поверхности можно выделить пары достаточно близко расположенных волокон, которые при потере устойчивости испытывают влияние не только свободной поверхности, но и друг друга. При проведении исследований использованы основные положения, приведенные в главе I. Построены решения задач для случая произвольного расположения пары волокон, описывающие возможные формы потери устойчивости. Далее рассматривается случай, когда плоскость волокон параллельна свободной поверхности. В этом случае

$$h_1 = h_2 = h\,, \quad a_1 = -a_2 = -0{,}5R_{12} \tag{16}$$

В общем виде для трансверсально-изотропных сжимаемых и несжимаемых тел в рамках теории конечных докритических деформаций получены бесконечные однородные системы алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных, входящих в решения

$$B_{\alpha k}^{m\beta} X_k^{m\beta} + B_{\alpha k}^{\alpha\beta} X_k^{\alpha\beta} + \sum_{\gamma=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty} Q_{\alpha k n}^{1\beta\gamma} X_n^{m\gamma} + \sum_{\gamma=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty} Q_{\alpha k n}^{2\beta\gamma} y_n^{m\gamma} = 0 \tag{17}$$

$$\mathcal{D}_{\alpha k}^{m\beta} y_k^{m\beta} + \mathcal{D}_{\alpha k}^{\alpha\beta} y_k^{\alpha\beta} + \sum_{\gamma=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty} R_{\alpha k n}^{1\beta\gamma} y_n^{m\gamma} + \sum_{\gamma=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty} R_{\alpha k n}^{2\beta\gamma} X_n^{m\gamma} = 0 \tag{18}$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots;\ \alpha, \beta = 1, 2)$$

Из условия существования нетривиальных решений задачи выведено характеристическое уравнение. Строго доказано, что полученный характеристический определитель является определителем нормального типа. Следовательно, усекая данный определитель до соответствующих конечных размеров, можно численно получить решения характеристического уравнения с любой наперед заданной степенью точности.

Рассмотрена также задача для такого случая расположения волокон, при котором оси волокон лежат в плоскости, перпендикулярной свободной поверхности полубесконечной матрицы. В этом случае

$$a_1 = a_2 = 0 \tag{19}$$

Построены решения задачи, которые описывают формы потери устойчивости волокон в матрице, обладающие симметрией относительно плоскости первоначального расположения осей волокон и при которых оси волокон остаются в этой плоскости (в дальнейшем называемые формами потери устойчивости в плоскости волокон), а также формы потери устойчивости, при которых оси волокон выходят из плоскости первоначального расположения осей волокон (в дальнейшем называемые формами потери устойчивости из плоскости волокон). После строгого удовлетворения всем граничным условиям получены бесконечные однородные системы уравнений и выведены характеристические уравнения для форм потери устойчивости в плоскости и из плоскости волокон. Проведено численное исследование применительно к задаче для сжимаемых изотропных линейно-упругих материалов волокон и матрицы в рамках второго варианта теории малых докритических деформаций (докритическое состояние определяется по геометрически-линейной теории). Полученные характеристические уравнения решались численно на ЭВМ методом редукции для разных значений отношений жесткостей и геометрических параметров задачи. Для каждого из случаев (потеря устойчивости в плоскости волокон и потеря устойчивости из плоскости волокон) численно получаем два решения характеристического уравнения в виде двух зависимостей $\rho$ от $\varkappa$ при фиксированных значениях других параметров задачи. Таким образом различаем четыре формы потери устойчивости двух волокон в полубесконечной матрице, соответствующие этим четырем зависимостям. Затем определяем минимумы полученных функций и выбираем наименьшее из полученных значений, которое и будет критическим.

Показана хорошая практическая сходимость метода в широком диапазоне изменения параметров задачи. Проведен анализ численных результатов. Выявлено, что влияние свободной поверхности может не только снизить значения критических укорочений, но и привести к появлению других реализуемых форм потери устойчивости по сравнению с задачами для бесконечной матрицы. Например, при $E_a E_m^{-1}$ = 1000, $R_{12} R^{-1}$ = 2,5 в случае бесконечной матрицы реализуемой является форма потери устойчивости из плоскости волокон в фазе (работы С.Д.Акбарова, А.Н.Гузя), а в случае приповерхностной неустойчивости при этих же значениях параметров и $h_1 / R$ = 1,5 реализуемой будет форма потери устойчивости в плоскости волокон в фазе. Показано, что в зависимости от сочетания значений жесткостных и геометрических параметров реализуемой вблизи границы может быть как форма потери устойчивости в плоскости волокон в фазе, так и форма потери устойчивости из плоскости волокон в фазе. Интересно отметить, что по сравнению с результатами для бесконечной матрицы, расширяется диапазон параметров, при которых реализуется форма потери устойчивости в плоскости волокон и сужается диапазон параметров, при которых реализуется форма потери устойчивости из указанной плоскости.

Пятая глава посвящена исследованию приповерхностной неустойчивости бесконечного периодического ряда волокон, плоскость расположения которого параллельна свободной поверхности. Указанная постановка возникает при исследовании задач неустойчивости волокнистых композитов регулярной структуры при сжатии вдоль волокон, когда отдельные ряды волокон расположены на достаточном отдалении друг от друга и вследствие этого на устойчивость крайнего ряда волокон основное влияние оказывает свободная поверхность. Полученные в данной главе численные результаты можно рассматривать как верхние пределы критических укорочений, приводящих к приповерхностной неустойчивости волокнистых композитов регулярной структуры с плотным наполнением. При исследовании используем основные положения и соотношения, изложенные в главе I, подразумевая, что $q$ принимает все целые значения от $-\infty$ до $+\infty$ (т.е. $q \in Z$). Учитываем, что

$$a_q = q\mathcal{D}, \quad h_q = h, \tag{20}$$

где $\mathcal{D}$ – расстояние между осями соседних волокон, $h$ – расстояние от оси любого из волокон до свободного края связующего.

Дана постановка задач с использованием общих решений трехмерных линеаризированных уравнений устойчивости при однородных докритических состояниях, построены их решения и выведены характеристические уравнения с левыми частями в виде бесконечных определителей.

Метод, изложенный в главе 2, позволяет исследовать произвольное сочетание форм потери устойчивости волокон в матрице. Однако, при численном исследовании можно ограничиться рассмотрением лишь форм потери устойчивости ряда волокон в матрице с периодом, равным периоду структуры. Основанием для рассмотрения только указанных форм потери устойчивости являются результаты А.Н.Гузя, М.С.Бабаева, М.А.Черевко для периодического ряда волокон в бесконечной матрице, где было показано, что к наиболее низким значениям параметра нагружения приводят лишь формы потери устойчивости с периодом, равным периоду структуры. Таким образом рассматриваются: I) форма потери устойчивости, при которой оси волокон остаются в плоскостях, перпендикулярных свободной поверхности связующего (в дальнейшем сокращенно - первая форма) и 2) форма потери устойчивости, при которой оси волокон выходят из указанных плоскостей (сокращенно - вторая форма). Доказано, что характеристические определители являются определителями нормального типа, что обосновывает применимость метода редукции при численном решении характеристических уравнений. Расчеты проведены для сжимаемых изотропных линейно-упругих материалов волокон и матрицы в рамках второго варианта теории малых докритических деформаций (докритическое состояние определялось по геометрически-линейной теории). Исследования практической сходимости метода показали, что с достаточной степенью относительной точности (до I%) можно ограничиться исследованием определителей порядка I0-22 для первой и 8-20 для второй формы потери устойчивости. Получено, что уменьшение критических укорочений по сравнению с результатами для реализуемой формы потери устойчивости ряда волокон в бесконечной матрице составляет до 35%. Влияние свободной поверхности совместно со взаимовлиянием волокон в ряду может привести к понижению критических укорочений на 65-70%. В зависимости от сочетания значений жесткостных и геометрических параметров может реализоваться как первая, так и вторая форма потери устойчивости. Например, для $E_a E_m^{-1}$ = I000 при $hR^{-1}$ = 5;9 предпочтение имеет первая форма; при $I,5 \leq hR^{-1} \leq 3$ в зависимости от $\mathcal{D}R^{-1}$ может реализоваться либо первая, либо вторая форма, в отличие от случая бесконечной матрицы, рассмотренного А.Н.Гузем, М.С.Бабаевым, М.А.Черевко, где независимо от $\mathcal{D}R^{-1}$ реализуемой была только вторая форма. Для $E_a E_m^{-1}$ = 50 и всех рассмотренных значений геометрических параметров предпочтение имеет первая форма, в то время как в случае бесконечной матрицы при $\mathcal{D}R^{-1} \geqslant 3$ реализуемой была вторая форма. Аналогичные эффекты влияния свободной поверхности выявлены и для некоторых других значений параметров. Было также выявлено, что сильное сближение волокон в ряду, как и сильное отдаление их друг от друга, способствует реализации первой формы, в то время как в случае бесконечной матрицы сильное отдаление волокон способствовало реализации второй формы потери устойчивости. Влияние свободной поверхности сильнее сказывается при первой форме потери устойчивости.

В шестой главе рассмотрены трехмерные линеаризированные задачи о приповерхностной неустойчивости ряда волокон, перпендикулярного свободной границе матрицы. Эти задачи соответствуют композитам регулярной или нерегулярной (в направлении, перпендикулярном границе) структуры с плотным наполнением в рядах, перпендикулярных границе, но незначительной плотностью в перпендикулярном направлении.

В рассматриваемых задачах, как и в предыдущих, форм потери устойчивости с кручением не существует. Возможные изгибные формы потери устойчивости можно разделить на две группы. К первой группе можно отнести формы потери устойчивости, симметричные относительно плоскости расположения осей волокон (формы потери устойчивости в плоскости ряда волокон). Ко второй группе можно отнести формы потери устойчивости из указанной плоскости. Построение решений, удовлетворение всем граничным условиям, вывод бесконечных однородных систем алгебраических уравнений проведено отдельно для форм потери устойчивости, относящихся к первой и ко второй группе. Бесконечные системы уравнений имеют вид:

- для форм потери устойчивости волокон в плоскости ряда

$$B_{\alpha k}^{mq} X_k^{mq} + B_{\alpha k}^{aq} X_k^{aq} + \sum_{p=1}^{N} \sum_{n=0}^{\infty} Q_{\alpha k n}^{qp} X_n^{mp} = 0; \tag{21}$$

- для форм потери устойчивости из плоскости ряда

$$\mathcal{D}_{\alpha k}^{mq} y_k^{mq} + \mathcal{D}_{\alpha k}^{aq} y_k^{aq} + \sum_{p=1}^{N} \sum_{n=0}^{\infty} R_{\alpha k n}^{qp} y_n^{mp} = 0 \tag{22}$$

$$(k=0,1,2,\ldots;\ p,q=1,2,\ldots,N),$$

$N$ - число волокон в ряду. (Здесь, в отличие от случая периодического ряда волокон, параллельного свободной поверхности, для всех форм потери устойчивости необходимо удовлетворять граничным условиям на боковой поверхности каждого волокна).

Из условия существования нетривиальных решений систем (21) и (22) получены характеристические уравнения. Исследованы свойства бесконечных определителей и доказано, что эти определители являются определителями нормального типа. Получено численное решение задачи для сжимаемых изотропных материалов волокон и матрицы при малых деформациях для конкретных значений исходных параметров задачи. Докритическое состояние определялось по геометрически-линейной теории. Проведена проверка практической сходимости метода. Проведено сравнение с результатами, полученными для бесконечной матрицы. Сформулированы выводы относительно количественного и качественного влияния свободной плоской поверхности на устойчивость ряда волокон, перпендикулярного границе матрицы. Выявлено, что влияние свободной границы не только снижает значения критических укорочений, но и может приводить к изменению реализуемой формы потери устойчивости, и это нужно учитывать. Сравнение результатов, полученных при разных значениях $N$, показало, что, например, если ограничиться точностью 5% для критических укорочений, то для получения результатов для больших $N$ при $E_a E_m^{-1} \leq 50$ достаточно провести расчеты для случая $N = 2$.

Рассмотрена также задача для случая упруго-пластической (теория малых упруго-пластических деформаций) изотропной матрицы со степенной зависимостью между интенсивностями напряжений и деформаций. Волокна моделировались линейно-упругим изотропным сжимаемым телом. Исследование в этом случае проведено с помощью метода, развитого во второй главе для случая свободной круговой цилиндрической поверхности матрицы. С применением обобщенной концепции продолжающегося нагружения, которая позволяет не учитывать изменение зон разгрузки при потере устойчивости, дана постановка и получено характеристическое уравнение задачи. Доказано, что бесконечный определитель, входящий в левую часть характеристического уравнения, является определителем нормального типа. Проведено численное исследование для конкретных значений жесткостных и геометрических параметров задачи при $N = 2$. Определены значения критических укорочений. Выполнен анализ полученных числовых результатов.

<u>Седьмая глава</u> посвящена рассмотрению задач неустойчивости периодических систем волокон, состоящих из конечного числа

$N$ периодических рядов волокон вблизи свободной плоской поверхности матрицы. Данная постановка соответствует композитам с прямоугольной и квадратной укладкой волокон. Исследование, до вывода характеристических уравнений включительно, проведено в общем виде для трансверсально-изотропных сжимаемых и несжимаемых материалов волокон и матрицы. С каждым из волокон связана лагранжева система координат ( $r_{uq}$ , $\theta_{uq}$ , $z_{uq}$ ), где $q$ соответствует номеру волокна в ряду и принимает все целые значения от $-\infty$ до $+\infty$ ( $q \in Z$ ), а $u$ соответствует номеру ряда волокон ( $u = 1,2,\ldots,N$ ). Используя метод, изложенный во второй главе, строятся решения задачи для каждого волокна и матрицы, строго удовлетворяются граничные условия на свободной плоской поверхности. Построенные решения имеют довольно общий вид и позволяют рассматривать произвольные сочетания форм потери устойчивости волокон в матрице, которые исследуются аналогично. Исходя из физических соображений, а также из анализа результатов для периодических систем волокон в случае бесконечной матрицы (работы А.Н.Гузя, М.А.Черевко), основное внимание уделено формам потери устойчивости, периодическим вдоль границы с периодом, равным периоду структуры в этом направлении. При этом для неизвестных постоянных, входящих в решения, получаем

$$A_{n,j}^{auq} = A_{n,j}^{au}, \quad C_{n,j}^{auq} = C_{n,j}^{au}, \quad A_{n,j}^{muq} = A_{n,j}^{mu}, \quad C_{n,j}^{muq} = C_{n,j}^{mu}$$

$$(n = 0,1,2,\ldots,\infty; \; u = 1,2,\ldots,N; \; j = 1,2,3; \; q \in Z). \tag{23}$$

В рассматриваемых случаях достаточно удовлетворить условиям полного контакта на боковых поверхностях любых $N$ волокон из разных рядов, параллельных свободной плоской поверхности. После удовлетворения граничным условиям на указанных $N$ поверхностях раздела сред, получены бесконечные однородные системы алгебраических уравнений в виде, аналогичном (2I) для форм потери устойчивости волокон в плоскостях расположения рядов, перпендикулярных свободной поверхности, и в виде, аналогичном (22) для форм потери устойчивости волокон из указанных плоскостей.

Получены характеристические уравнения с левыми частями в виде бесконечных определителей. Исследованы свойства бесконечных определителей и доказано, что они являются определителями нормального типа, что, в свою очередь, обосновывает применимость метода редукции при численном решении характеристических уравнений.

Решая характеристические уравнения, получаем зависимости $\rho_i^{\mu} = \rho_i^{\mu}(æ)$ для форм потери устойчивости волокон в плоскостях расположения рядов, перпендикулярных свободной поверхности (при $\mu$ = I) и из этих плоскостей (при $\mu$ = 2). Выбираем такие две функции $\rho^1(æ)$ и $\rho^2(æ)$ из полученного набора решений, что

$$\rho^1(æ) \le \rho_i^1(æ), \quad \rho^2(æ) \le \rho_i^2(æ). \tag{24}$$

Пусть

$$\rho_m^1 = \min_{æ \ne 0} \rho^1(æ), \quad \rho_m^2 = \min_{æ \ne 0} \rho^2(æ). \tag{25}$$

Тогда минимальное значение укорочения, при котором исходные уравнения имеют нетривиальное решение, описывающее форму потери устойчивости, определяется по формуле

$$\varepsilon_T = \min(\rho_m^1, \rho_m^2). \tag{26}$$

В главе выполнено численное решение характеристических уравнений для конкретных значений параметров задачи.

Материалы волокон и матрицы моделировались изотропными сжимаемыми линейно-упругими телами. Применялся второй вариант теории малых докритических деформаций, при котором докритическое состояние определяется по геометрически линейной теории. Примеры выражений для коэффициентов бесконечных систем для рассматриваемой модели среды имеют вид

$$B_{1k,11}^{mu} = 2kæ^{-1}\left[-\zeta_1^m K_{k+1}(\zeta_1^m æ) K_k^{-1}(\zeta_1^m æ) + (k-1)æ^{-1}\right];$$

$$B_{1k,11}^{a\sigma} = 2kæ^{-1}\mu^a \mu^{m-1}\left[-\zeta_1^m I_{k+1}(\zeta_1^a æ) I_k^{-1}(\zeta_1^a æ) + (1-k)æ^{-1}\right];$$

$$Q_{1kn,11}^{u\sigma} = \langle 2kæ^{-1}\varepsilon_k\left[\zeta_1^m I_{k+1}(\zeta_1^m æ) + (k-1)æ^{-1} I_k(\zeta_1^m æ)\right] \times \tag{27}$$

$$\times\Big\{\sum_{p=0}^{\infty} -4\epsilon_p \int_{-\infty}^{\infty} V_{11n}^{\delta}(t)\exp(-\zeta_1^{m} ch t\gamma h_u)\, sh\, kt\, \times$$

$$\times\cos(\zeta_1^{m} sh\, t\, p\gamma\mathcal{D})dt + (-1)^n \sum_{p=\delta_{u\delta}}^{\infty} 2\epsilon_p \big[K_{n-k}(\zeta_1^{m}\gamma\sqrt{(h_\delta-h_u)^2+p^2\mathcal{D}^2})\times$$

$$\times\cos(n-k)\varphi_{u0}^{\delta p} - K_{n+k}(\zeta_1^{m}\gamma\sqrt{(h_\delta-h_u)^2+p^2\mathcal{D}^2})\cos(n+k)\varphi_{u0}^{\delta p}\big]\Big\} +$$

$$+\epsilon_k \sum_{s=2}^{3}\Big\{-2\zeta_s^{m}\varkappa^{-1} I_{k+1}(\zeta_s^{m}\varkappa) + \Big[\zeta_s^{m^2}\frac{a_{11}\mu_{13}}{a_{13}+\mu_{13}} + a_{13}\frac{\mu_{13}+\sigma_{22}^{0}}{a_{13}+\mu_{13}} +$$

$$+2k(k-1)\varkappa^{-2}\Big] I_m(\zeta_s^{m}\varkappa)\Big\}\sum_{p=0}^{\infty} 2\epsilon_p \int_{-\infty}^{\infty} V_{s1n}^{\delta}(t)\exp(-\sqrt{\zeta_s^{m^2}+\zeta_1^{m^2} sh^2 t}\,\gamma h_u)\times$$

$$\times\Big[\big(\sqrt{\zeta_s^{m^2}+\zeta_1^{m^2} sh^2 t} - \zeta_1^{m} sh\, t\big)^k - \big(\sqrt{\zeta_s^{m^2}+\zeta_1^{m^2} sh^2 t} + \zeta_1^{m} sh\, t\big)^k\Big]\times$$

$$\times\cos(\zeta_1^{m} sh\, t\, p\gamma\mathcal{D})\,\zeta_1^{m^{-k}} dt \Big\rangle K_n^{-1}(\zeta_1^{m}\varkappa),$$

$$\varphi_{u0}^{\delta p} = arctg\frac{p\mathcal{D}}{h_u-h_\delta},$$

$\mathcal{D}$ – расстояние между соседними волокнами в рядах, параллельных свободной границе матрицы.

Рассмотрен случай параметров, соответствующих реальному композиту (боропластик), для которого проведено сравнение теоретических результатов, полученных в главе, с экспериментальным значением предела прочности, приведенным в справочной литературе, и получено неплохое соответствие. Выполнен анализ полученных численных результатов. Сформулированы выводы, относящиеся к закономерностям приповерхностной неустойчивости волокнистых композитов при сжатии.

<u>В заключении</u> формулируются основные научные результаты и выводы работы.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

I. Таким образом в диссертационной работе развита трехмерная теория приповерхностной неустойчивости волокнистых композитов при сжатии, основанная на использовании в рамках модели кусочно-однородной среды трехмерной линеаризированной теории устойчивости, которая включает:

I. Постановку различных классов трехмерных линеаризированных задач приповерхностной неустойчивости волокнистых композитов при сжатии в общем виде для различных вариантов трехмерной линеаризированной теории устойчивости и различных моделей сред.

2. Разработку методов исследования указанных проблем, в т.ч. и для композита с произвольной конфигурацией волокон в матрице; обоснование предложенных методов, а также численное исследование их практической сходимости.

3. Исследование основных классов задач, анализ числовых результатов и выявление новых механических эффектов, характерных для изучаемого круга вопросов, а также формулирование выводов, позволяющих в случае наиболее сложных задач приповерхностной неустойчивости волокнистых композитов вместо проведения трудоемких расчетов с приемлемой точностью применять результаты уже решенных задач о внутренней неустойчивости волокнистых композитов, либо значительно упростить вычисления.

II. Получены следующие основные научные результаты:

I. Применительно к случаям свободной плоской поверхности и свободной круговой цилиндрической поверхности композита разработаны методы исследования трехмерных задач неустойчивости волокнистой структуры вблизи границы материала. Исходные уравнения трехмерной линеаризированной теории устойчивости применялись к каждому компоненту волокнистого композита. Разработанные в рамках строгого подхода методы позволяют точно удовлетворить всем граничным условиям.

2. Исследована устойчивость отдельного волокна вблизи свободной поверхности для различных моделей сред при конечных и малых докритических деформациях. Численно решены задачи для случаев сжимаемых изотропных линейно-упругих материалов волокон и матрицы (II вариант теории малых докритических деформа-

ций), несжимаемых материалов с потенциалом Трелоара (теория конечных докритических деформаций) и случая, когда матрица состоит из упруго-пластического несжимаемого материала со степенной зависимостью между интенсивностями напряжений и деформаций (теория малых упруго-пластических деформаций), а волокно - из сжимаемого изотропного упругого материала при малых деформациях. Рассмотрены случаи свободной плоской и свободной круговой цилиндрической поверхности. Определены реализуемые формы потери устойчивости. Исследовано влияние проскальзывания на значения критических параметров нагружения. Доказано. что характеристические определители в рассматриваемых задачах являются определителями нормального типа. Показана хорошая практическая сходимость методов. Сформулированы выводы о влиянии свободной поверхности на устойчивость отдельных волокон. Установлены области изменения параметров, в которых в пределах заданной точности можно применять результаты решения более простых задач устойчивости волокнистых композитов, полученных для случая бесконечной матрицы без учета влияния границы.

3. В едином виде для различных вариантов трехмерной линеаризированной теории устойчивости построены характеристические уравнения для задач о приповерхностной неустойчивости пары волокон в матрице. Рассмотрены случаи, когда плоскость расположения осей волокон параллельна и перпендикулярна свободной границе матрицы. Доказано, что полученные бесконечные характеристические определители являются определителями нормального типа. Применительно к сжимаемым изотропным линейно-упругим материалам волокон и матрицы в рамках второго варианта теории малых докритических деформаций получено численное решение задачи. Показана хорошая практическая сходимость метода. При расчетах рассмотрен случай, когда плоскость волокон перпендикулярна свободной поверхности. Изучены закономерности приповерхностной потери устойчивости пары волокон в матрице.

4. Выведены характеристические уравнения для исследования приповерхностной неустойчивости бесконечного периодического ряда волокон в полубесконечной матрице (плоскость расположения осей волокон параллельна свободной поверхности). Проведено исследование свойств полученных бесконечных определителей и

доказано, что они являются определителями нормального типа. При численном исследовании характеристических уравнений рассмотрены формы потери устойчивости с периодом, равным периоду структуры. Исследована практическая сходимость метода. Определены закономерности потери устойчивости периодического ряда волокон вблизи свободной поверхности.

5. Рассмотрены трехмерные линеаризированные задачи о приповерхностной неустойчивости ряда волокон, перпендикулярного свободной поверхности. Дана постановка указанных задач, выведены характеристические уравнения с левыми частями в виде бесконечных определителей. Доказано, что полученные характеристические определители являются определителями нормального типа. Выполнено численное решение задач. Рассмотрены случаи сжимаемых изотропных линейно-упругих материалов волокон и матрицы (П вариант теории малых докритических деформаций) и случаи, когда матрица моделируется упруго-пластическим материалом со степенной зависимостью между интенсивностями напряжений и деформаций. Определены реализуемые формы потери устойчивости. Сделан анализ полученных численных результатов.

6. В рамках используемого строгого подхода на основе модели кусочно-однородной среды с привлечением трехмерной линеаризированной теории устойчивости дана постановка и получены характеристические уравнения задач о приповерхностной неустойчивости периодических систем волокон вблизи свободной плоской поверхности. Исследованы свойства бесконечных характеристических определителей и доказано, что они являются определителями нормального типа. Применительно к сжимаемым изотропным линейно-упругим материалам волокон и матрицы при малых деформациях проведено численное решение характеристических уравнений для различных значений параметров. Рассмотрен случай исходных параметров, соответствующих реальному композиту (боропластик), проведено сравнение полученных теоретических результатов с экспериментальным значением предела прочности и получено неплохое соответствие. Сформулированы выводы, относящиеся к закономерностям приповерхностной неустойчивости волокнистых композитных материалов.

III. При решении задач получены следующие выводы и обнаружены эффекты механического характера:

1. В рамках рассматриваемой строгой постановки для отдельного волокна вблизи свободной поверхности было получено, что в отличие от случая бесконечной матрицы, здесь не существует формы потери устойчивости второго рода, т.е. с кручением. Для других структур волокон также был получен аналогичный вывод и этот вывод совпал с полученными ранее А.Н.Гузем выводами для случая бесконечной матрицы.

2. Приповерхностная потеря устойчивости в волокнистых композитах при сжатии происходит при меньших нагрузках, чем внутренняя потеря устойчивости, что также соответствует соображениям физического характера и подтверждает аналогичный вывод, полученный в рамках более приближенной континуальной теории.

3. Свободная поверхность матрицы оказывает значительное влияние на устойчивость расположенных вблизи различных структур волокон. Критические укорочения, приводящие к приповерхностной неустойчивости, существенно зависят от отношения жесткостей волокон и матрицы, а также от расстояний между волокнами и границей. Критические укорочения уменьшаются при увеличении отношения жесткостей волокон и матрицы и при приближении волокон к свободной поверхности. Критические укорочения для приповерхностной потери устойчивости волокон, по сравнению с явлением внутренней неустойчивости, могут уменьшаться в 1,5 раза.

4. При увеличении расстояния между волокнами и свободной границей критические значения параметров нагружения и волнообразования стремятся к соответствующим значениям, полученным ранее для явления внутренней неустойчивости волокнистых композитов при сжатии.

5. Наличие свободной поверхности может не только значительно снизить критические параметры сжатия, но и может привести к появлению других измененных форм потери устойчивости (по сравнению с внутренней неустойчивостью соответствующих структур волокон в матрице). Такого рода качественные эффекты были выявлены практически во всех рассмотренных задачах и отмечены в диссертации.

6. Изложенные выводы и указанные механические эффекты свидетельствуют о необходимости учета влияния свободной поверхности волокнистого композита на устойчивость расположенных в непосредственной близости от нее систем волокон. В то же время во всех задачах было обнаружено, что существуют области жесткостных и геометрических параметров композитов, в которых с заданной точностью для критических укорочений можно пренебречь влиянием свободной границы на устойчивость волокнистых композитов и применять результаты, полученные ранее для случая бесконечной матрицы без учета влияния границы. Обобщив такого рода выводы для рассмотренных задач можно сказать, что если ограничиться точностью 5% для критических укорочений, то для отношения жесткостей волокон и матрицы в диапазоне от 10 до 1000 во всех рассмотренных задачах можно не учитывать влияние свободной границы и применять результаты для случая бесконечной матрицы, когда толщина перемычки между границей и ближайшими волокнами или группой волокон превышает 9 радиусов волокон.

Были получены также и другие важные выводы и рекомендации, которые нашли отражение в диссертации.

Основные результаты диссертации изложены в работах:

1. О потере устойчивости волокна вблизи свободной поверхности при конечных докритических деформациях // Редж. Прикл. механика. Киев, 1986.- С. 1-17.- Деп. в ВИНИТИ 28.05.86, № 3819-В86.

2. Об исследовании устойчивости волокна в полубесконечной матрице с учетом влияния свободной поверхности // Труды XI научной конференции молодых ученых Института механики АН Украины. Ч.1.- Киев, 1986.- С. 124-129.- Деп. в ВИНИТИ 28.07.86, № 5507-В86.

3. Устойчивость волокна вблизи свободной поверхности // Прикл. механика.- 1986.- 22, № 8.- С. 21-29.- (Соавт. Гузь А.Н.).

4. О влиянии свободной поверхности полости на устойчивость волокна в бесконечной матрице // Труды XII научной конференции молодых ученых Института механики АН Украины.- Киев, 1987.- С. 104-107.- Деп. в ВИНИТИ 29.07.87, № 5389-В87.

5. Устойчивость волокна в полубесконечной упругой матрице при высокоэластических деформациях // Прикл. механика.- I987.- 23, № 8.- С. I9-23.

6. Устойчивость волокна вблизи свободной поверхности полости при конечных докритических деформациях // Прикл. механика.- I988.- 24, № 5.- С. 27-3I.

7. Устойчивость волокна вблизи свободной цилиндрической поверхности // Прикл. механика.- I988.- 24, № I0.- С. 3-9.- (Соавт. Гузь А.Н.).

8. О сходимости метода решения задачи об устойчивости волокна в полубесконечной несжимаемой матрице // Труды ХШ научной конференции молодых ученых Института механики АН Украины.- Киилов, I988.- С. 472-475.- Деп. в ВИНИТИ 27.I2.88, № 9073-В88.

9. Метод исследования устойчивости двух волокон в упругой полубесконечной матрице // Докл. АН УССР. Сер. А.- I989.- № I.- С. 42-45.

I0. Учет влияния свободной границы на устойчивость периодического ряда волокон в упругой полубесконечной матрице // Докл. АН УССР. Сер. А.- I989.- № 5.- С. 34-37.

II. К решению задач приповерхностного выпучивания периодической системы волокон в упругой матрице // Докл. АН УССР. Сер. А.- I989.- № 7.- С. 48-52.

I2. Об одной изгибной форме потери устойчивости волокна в полубесконечной матрице // Труды ХIУ научной конференции молодых ученых Института механики АН Украины.- Киев, I989.- Ч.I.- Деп. в ВИНИТИ 02.08.89, № 5I64-В89.- С. II0-II3.

I3. О методе исследования устойчивости волокна в упругой полубесконечной матрице вблизи свободной поверхности // Прикл. математика и механика.- I989.- 53, № 4.- С. 693-697.- (Соавт. Гузь А.Н.).

I4. О возможных формах потери устойчивости волокна в полубесконечной матрице // Докл. АН УССР. Сер.А.- I989.- № II.- С. 42-45.

I5. Устойчивость ряда волокон вблизи свободного плоского края связующего при осевом сжатии // Механика композитных материалов.- 1990.- № 4.- С. 739-742.

16. К задаче об устойчивости полубесконечного упругого тела, армированного конечным числом волокон // Труды ХУ научной конференции молодых ученых Института механики АН Украины.- Киев, 1990.- Ч.I.- С. 62-67.- Деп. в ВИНИТИ 10.07.90, № 3800-В90.

17. Приповерхностная неустойчивость двух волокон в матрице // Прикл. механика.- 1990.- 26, № 8.- С. 30-36.

18. Об устойчивости волокна в полубесконечной упругой матрице при скользящем контакте на поверхности раздела сред // Прикл. механика.- 1990.- 26, № 10.- С. 10-16.

19. Устойчивость периодического ряда волокон в полубесконечной матрице // Прикл. механика.- 1991.- 27, № 2.- С. 19-25.

20. О методах решения некоторых задач о приповерхностной неустойчивости волокнистых материалов с упруго-пластической матрицей // Труды ХУI научной конференции молодых ученых Института механики АН Украины.- Киев, 1991.- Ч.I.- С. 124-129.- Деп. в ВИНИТИ 12.11.91, № 4259-В91.

21. Stability of a row of fibers near the free plane border of matrix in axial compression // The 1st European Solid Mechanics Conference, Abstracts of Reports, Munich, FRG, September 9-13, 1991.- P. 131-132.

22. Об устойчивости волокна вблизи полости в упруго-пластической матрице // Докл. АН УССР. Сер.А.- 1991.- № 9.- С.80-84.

23. Устойчивость волокна в упруго-пластической матрице вблизи свободной цилиндрической поверхности // Прикл. механика.- 1992.- 28, № 1.- С. 54-61.

24. Устойчивость ряда волокон, перпендикулярного свободной плоской поверхности матрицы // Труды ХУП научной конференции молодых ученых Института механики АН Украины.- Киев, 1992.- Ч.I.- С. 91-95.- Деп. в УкрИНТЭИ 07.07.92, № 1021-Ук92.

25. Приповерхностная неустойчивость ряда волокон в композите // ДАН - 1992.- 325, № 4.- С. 679-683.- (Соавт. Гузь А.Н.).

26. Near-the-surface instability of a periodic system of fibers in an elastic matrix //Докл.АН Украины.-1992.-№8.-С.70-75.

27. Приповерхнева нестійкість композиту з прямокутною укладкою волокон при стиску // I Международный симпозиум украинских инженеров-механиков во Львове.- Тезисы докладов.- Львов, Украина, 1993.- С. 66.

28. О задаче устойчивости конечного числа периодических рядов волокон в полубесконечной матрице // Труды ХУШ научной конференции молодых ученых Института механики АН Украины.- Киев.- Ч.I.- Деп. в УкрИНТЭИ. 16.08.93, № 1764- Ук93.-С.68-72.

29. Near-the- surface fracture of fibrous materials in compression // Eighth International Conference on fracture (ICF-8), Collection of abstracts. Part II, Kiev,UKRAINE, 1993.- P. 393-394.

НПО "КАМЕТ" Тираж 100 Заказ 139