

АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

ПІЛІЧКО Анатолій Миколайович

СТУДІЇ З ТЕОРІЇ ДВОЇСТОСТІ
У БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

Спеціальність 01.01.01 – математичний аналіз

Дисертація у формі наукової
доповіді на здобуття вченого
ступеня доктора фізико-
математичних наук

Київ 1998

AB 28835

Робота виконана в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача АН України

ЛНБ України ім. В. Стефаника



00814080 (L)

офіційні опоненти: академік АН України, професор
БЕРЕЗАНСЬКИЙ В.М. ,
доктор фізико-математичних наук,
професор КАДЕЦЬ М.Я. ,
доктор фізико-математичних наук,
професор СЕМЕНОВ Є.М.

Провідна установа: Харківський державний університет

Захист відбудеться "25" січня "1994" на
засіданні спеціалізованої ради Д.016.50.01 при Інституті
математики АН України за адресою: 252601 Київ 4, ГСП ,
вул. Терещківська 3.

Ваш відгук у двох примірниках, завірений гербовою печаткою,
прошу надсилати на адресу Вченої ради.

Автореферат розісланий "8" чудня "1993"

Вчений секретар
спеціалізованої ради
доктор фізико-математичних
наук

ГУСАК Д.В.

ТВ - 28.890

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Геометрія банахових просторів є однією з ділянок функціонального аналізу, яка зараз бурхливо розвивається. Сучасний етап цього розвитку розпочався в кінці 60-х, на початку 70-х років. З цього часу розв'язаний ряд важливих проблем функціонального аналізу, частина яких лишилась відкритою ще з часів Банаха, оформились нові напрямки, як наприклад, теорія векторних мір, операторні ідеали, з'явилися нові застосування геометрії банахових просторів до теорії наближень, теорії ймовірностей, обчислювальної математики та інших галузей. Цей розвиток добре відображений в монографіях. Вагомий вклад до нього внесли Р.Джеймс, А.Пелчинський, Й.Лінденштраус, П.Енфлю, Ж.Буржейн, а також українські математики М.Кадець, В.Гурарій, М.Петунін, В.Фонф та інші.

Важливим розділом геометрії банахових просторів є теорія двоїстості, зокрема, дослідження біортогональних систем і тотальних підпросторів спряженого простору. Вона цікава як з точки зору вивчення структури банахового простору, так і з точки зору застосувань. Важливими етапами у розвитку цього розділу було запровадження й дослідження Аміром і Лінденштраусом слабо компактно породжених просторів, доведення Девісом і Лінденштраусом існування тотального ненормованого підпростору в спряженому до неквазірефлексивного банахового простору, побудова Овсен'яном і Пелчинським обмеженого базису Маркушевича в сепарабельному банаховому просторі, доведення існування (в певній аксіоматиці теорії множин) несепарабельного банахового простору без незліченних біортогональних систем.

Мета роботи полягає в дослідженні існування різних спеціальних біортогональних систем, тотальних підпросторів спряженого простору, зокрема лінійних оболонок біортогональних функцій з певною орієнтацією на застосування в теорії регуляризованості за Тихоновим, некоректних задач та в теорії майже періодичних функцій.

Наукова новизна. У дисертації проведене систематичне вивчення біортогональних систем в несепабельних банахових просторах. Встановлений тісний зв'язок між проєкційними розкладами й базисами Маркушевича. Показано, як за фундаментальною біортогональною системою, базисом Маркушевича, нормувчим базисом Маркушевича будувати обмежену фундаментальну біортогональну систему (ві. очевидно, обмежений базис Маркушевича, обмежений нормувчий базис Маркушевича). Звідси виводиться існування обмеженого базиса Маркушевича у слабо компактно породженому банаховому просторі. Показано, що наявність у банаховому просторі фундаментальної біортогональної системи еквівалентна існуванню в ньому фактор-простору тієї ж ваги з проєкційним базисом. Наведені приклади просторів: без фундаментальної біортогональної системи, фактор-простору і підпростору тієї ж ваги з проєкційним базисом, нормувчої біортогональної системи, які показують, що результати, справедливі для сепабельних і багатьох класів несепабельних просторів, не мають місця в загальному випадку.

Показане існування обмеженої тотальної біортогональної системи в довільному банаховому просторі. Доводиться, що всякий банахів простір із слабо* сепабельним спряженим ізометричним доповнювальним підпростором простору з базисом Маркушевича; як наслідок, звідси виводиться існування простору з базисом Маркушевича без локально рівномірно округлої норми, існування простору з базисом Маркушевича, але без проєкційного розкладу та інші наслідки. Зокрема, властивість мати базис Маркушевича не успадковується доповнювальними підпросторами. Досліджуються деякі властивості базиса Внфіо-Розенталя.

Вивчені біортогональні системи у симетричних функціональних просторах на безатомних ймовірнісних просторах. Доводиться, що коли індекси Бойда такого симетричного простору відмінні від 1 і нескінченності, то кожен його підпростір має монотонний безумовний проєкційний розклад. Показано, що групу характеристик довільної компактної абелевої групи G можна розбити на зліченне число підмножин так, що кожна буде еквівалентна у всякому $L_p(G)$, $1 \leq p < \infty$, до ортогонального базиса гільбертового простору. Отримані результати застосовуються до симетричних просторів майже періодичних функцій.

Розглядається також біортогональні системи в сепарабельних просторах. Показано, що не існує зліченного універсального базиса Маркушевича. Доведене існування ортонормальної бібазисної послідовності у будь-якому банаховому просторі. Наведений приклад проєкційного базиса у сепарабельному банаховому просторі, який не можна розбити на два (або скінченну кількість) базисів з дужками, а також приклад простору (з сепарабельним спряженням), в якому немає обмеженого одиницею натягуючого базиса Маркушевича. Показано з допомогою базисів Маркушевича, що будь-який замкнений підпростір сепарабельного банахового простору є радикалом деякого комутативного множення.

Досить докладно вивчені простори із слабо* ангельським спряженням. Показується стійкість властивості мати слабо* ангельський спряжений простір відносно взяття підпростору і лінійного неперервного образу, вивчаються властивості слабких* секвенціальних замикань, наводиться критерій спряженості й наслідки з нього. Досліджуються базиси Маркушевича і доповнювальні підпростори у просторах зі слабо* ангельським спряженням. Наводиться доведення теореми Амір-Лінденштрауса про існування проєкційного розкладу слабо компактно породженого банахового простору, яке значно гігієнічне й коротше від відомих.

Доводиться одна проста варіація теореми Гана-Банаха, з якої випливають як деякі відомі результати, так і нові. Наприклад, загальнення теореми Джеймса про розширення квазідоповнення на довільний банахів простір.

Вивчається ступінь розривності оберненого до лінійного неперервного оператора $A : X \rightarrow Y$ у термінах властивостей підпростору $F = A^* Y^* \subset X^*$. Показаний тісний зв'язок між B -вимірністю класу \mathcal{L} оператора A^{-1} і слабкими* секвенціальними замиканнями порядку \mathcal{L} підпростору F . Вивчається B -вимірність оператора A^{-1} . Багато уваги приділено регуляризованості та лінійній скінченномірній регуляризованості за Тихоновим оператора A^{-1} ; знову в термінах властивостей підпростору F . Отримані загальні результати дають можливість доводити регуляризованість багатьох конкретних задач і будувати приклади нерегуляризованих. На-

водиться приклад застосування методів теорії двоїстості банахових просторів до ще одного розділу обчислювальної математики – дискретної апроксимації.

Теоретична і практична значущість. Результати роботи дають можливість зрозуміти структуру багатьох класів неспарабельних банахових просторів. Вони є теоретичною основою для побудови регуляризованих алгоритмів.

Апробація роботи. Результати роботи доповідались на 6-11 Школах з теорії операторів у функціональних просторах, на все-союзних школах з некоректно поставлених задач (Фрунзе, 1979; Ноорує, 1982; Саратов, 1985), 17 і 18 Воронезьких математичних школах, Міжнародних конференціях, присвячених 100-річчю народження С.Банаха (Львів, 1992) та М.Кравчука (Київ, 1992), в Банахівському центрі (Варшава, 1992), на наукових семінарах МАН, Уральського університету, Інституту математики АН України, Інституту математики СВ Російської АН, міських семінарах з геометрії банахових просторів в Санкт-Петербурзі й Харкові та ін.

Публікації. Матеріали дисертації опубліковані у 54 роботах, поданих у вигляді двох списків. Перший список містить назви 29 робіт, в яких викладено всі основні, принципово важливі результати дисертації. Роботи з другого списку, це або тези праць конференцій, або праці, результати яких були перекриті іншими працями автора, або праці, виконані у співавторстві, де важко встановити вклад кожного автора, або праці, які стоять трохи збоку від основного напрямку дисертації. Не існує монотонної залежності між науковим рівнем результатів та науковим реноме журналу, де вони опубліковані, а також між важливістю теорем та довжиною їх доведень. Наведені тут результати отримані автором самостійно. Виняток становлять теореми 19 і 21, викладені для повноти, та абзац після теореми 20, де наводяться приклади застосування загальних результатів до деяких конкретних обернених задач. До багатьох результатів наводиться перед- і післяісторія, звичайно далеко не повні. Інші публікації автора відносяться переважно до теорії випадкових величин із значеннями у банахових просторах.

I. Проекційні розклади й біортогональні системи.

Розпочнемо з означень. Нехай X — банахів простір і X^* — його спряжений. набір $x_i, f_i, x_i \in X, f_i \in X^*, i \in \dot{J}, \dot{J}$ — деяка множина індексів, називається біортогональною системою, якщо $f_i(x_j) = 0$ при $i \neq j$ й $= 1$ при $i = j$. Біортогональна система називається: 1) фундаментальною, якщо замкнена лінійна оболонка $[x_i : i \in \dot{J}] = X$; 2) тотальною, якщо множина $(f_i : i \in \dot{J})$ тотальна на X , тобто з $f_i(x) = 0 \quad \forall i$ випливає $x = 0$; 3) обмеженою числом a , якщо $\sup_i \|x_i\| \|f_i\| \leq a$; 4) нормуючою, якщо підпростір $F = [f_i : i \in \dot{J}] \subset X^*$ нормуючий, тобто функціонал $\|x\| = \sup\{|f(x)| : f \in F, \|f\| = 1\}$ буде нормою, еквівалентною вихідній нормі $\|x\|$ простору X . Фундаментальну тотальну біортогональну систему називають базисом Маркушевича (и-базисом). Кожен простір X має вагу (позначається $\text{dens } X$) — найменшу потужність щільних підмножин. Одним з основних методів дослідження несепабельних банахових просторів є побудова та вивчення проєкційних розкладів. Нагадаємо, що проєкційним розкладом банахового простору X називається цілком упорядкована обмежена в сукупності множина проєкторів $P_\alpha : X \rightarrow X, \alpha : \alpha < \alpha_0, \omega$ — перший неокінченний ординал, α_0 — перший ординал ваги X , для яких при будь-яких $\alpha, \beta : P_\alpha P_\beta = P_\beta P_\alpha = P_{\min(\alpha, \beta)}$; $\text{dens } P_\alpha X \leq \bar{\alpha}, \bar{\alpha}$ — потужність ординала α ; $P_\alpha X = [P_{\beta+1} X : \beta < \alpha]$; $P_{\alpha+1} \neq P_\alpha$ і P_{α_0} — одиничний оператор. Найвідомішим класом просторів з проєкційними розкладами є слабо компактно породжені простори (ті, що є замкненими лінійними оболонками своїх слабких компактів). Розпочнемо із зв'язку проєкційних роз-

ладів з базисами Маркушевича. Як буде відзначено далі, не всякий простір з базисом Маркушевича має проєкційний розклад. Базис Маркушевича $x_i, f_i : i \in J$ називатимемо зліченно нормувчим, якщо підпростір X^n , який складається з тих елементів f , для яких множина $\{i \in J : f(x_i) \neq 0\}$ зліченна, нормувчим.

Усякий нормувчий базис Маркушевича є зліченно нормувчим. Невідомо, чи існує в довільному слабо компактно породженому просторі нормувчий базис Маркушевича. Але всякий базис Маркушевича слабо компактно породженого простору буде зліченно нормувчим.

Теорема 1 [15]. Нехай X — банахів простір із зліченно нормувчим базисом Маркушевича $x_i, f_i : i \in J$. Тоді в X існує проєкційний розклад (P_α) , причому для всякого α знайдеться підмножина J_α така, що $P_\alpha X = [x_i : i \in J_\alpha]$ а $(I - P_\alpha)X = [x_i : i \notin J_\alpha]$.

Ця теорема узагальнює один результат Йона і Зіслера і істотно використовується далі для доведення існування простору з локально рівномірно округлою нормою без базиса Маркушевича. Нагадаємо, норма $\|\cdot\|$ банахового простору X називається локально рівномірно округлою, якщо з $x, x_n \in X$, $\|x\| = \|x_n\| = 1$, $\|x + x_n\| \rightarrow 2$ випливає $\|x - x_n\| \rightarrow 0$. Пізніше теорема 1 узагальнювалась Вандерверфом, Вітфільдом і Зіслером. Цілком упорядкована послідовність $x_\alpha : 1 \leq \alpha < \alpha_0$ у банаховому просторі X , для якої $[x_\alpha : 1 \leq \alpha < \alpha_0] = X$ і проєктори $P_\alpha : X \rightarrow [x_\beta : \beta < \alpha]$ паралельно підпросторові $[x_\beta : \beta \geq \alpha]$ існують і обмежені в сукупності, називається проєкційним базисом довжини α_0 . Якщо для всякого α , $\|P_\alpha\| = 1$, то базис називається монотонним.

Теорема 2 [17]. Для несепарабельного банахового простору наступні умови еквівалентні:

- 1) X має фундаментальну біортогональну систему;
- 2) X має фактор-простір з монотонним проєкційним базисом потужності $\text{dens } X$;
- 3) X має фактор-простір з проєкційним базисом потужності

dens X ;

4) Для всякого $\delta > 0$ простір X має обмежену числом $4 + \delta$ фундаментальну біортогональну систему.

Теорема узагальнює і уточнює деякі відомі результати Йона-Зіслера, Девіса-Джонсона та Годуна. Умови 1)-4) майже виконуються для будь-якого сепарабельного банахового простору, точніше монотонний проєкційний базис в умові 2) потрібно замінити $1 + \delta$ - монотонним базисом, а в умові 4) константу $4 + \delta$ можна замінити на $1 + \delta$. Вони виконуються не для всякого несепарабельного простору.

Простір $m_0(\Gamma)$ обмежених послідовностей на множині Γ потужності більшої від \mathfrak{C} , для яких лише зліченна кількість координат відмінна від нуля з супремум-нормою, не має фундаментальної біортогональної системи [11]. Це відповідь на питання В. Девіса й В. Джонсона; інше доведення цього результату було дане Б. Годуном та М. Маддецьом. За теоремою 2 простір $m_0(\Gamma)$ не має фактор-простору тієї ж ваги з проєкційним базисом.

Відзначимо ще одну властивість простору X з фундаментальною біортогональною системою: існують банахові простори Y , Z і лінійні неперервні ін'єктивні цільні оператори $S: Y \rightarrow X$, $T: Z \rightarrow X$ з $S Y \cap T Z = 0$; зокрема таку властивість має простір $X = \ell_\infty$ [28]. Це дає відповідь на одне питання Д. Борвейна й А. Тінглі.

Теорема 3 [13]. Існує банахів простір X , що не має підпросторів ваги X з проєкційним базисом.

Умови, при яких банахів простір має підпростір тієї ж ваги з проєкційним базисом, є в працях Ч. Бессаги, К. Йона, В. Зіслера, П. Рейфа, Ш. Шелахом та К. Куненом доведене існування деякої аксіоматиці теорії множин несепарабельного банахового простору без незліченних біортогональних систем. Такий простір, звичайно, не може мати ні фундаментальної біортогональної системи, ні підпростору тієї ж ваги з проєкційним базисом.

Найважливішим позитивним результатом у цьому напрямку є наступна

Теорема 4 [8, 19]. Усякий банахів простір має обмежену числом $4 + \varepsilon$ тотальну біортогональну систему (x_α, f_α) , для якої елементи (x_α) утворюють проєкційний базис своєї замкненої лінійної оболонки.

Існування тотальних біортогональних систем для деяких класів банахових просторів досліджувалось раніше, зокрема Даяером. У певних випадках константу $4 + \varepsilon$ можна покращити.

Теорема 5. [10]. Якщо X^* містить тотальну зліченну підмножину H , то X має обмежену числом $1 + \varepsilon$ тотальну біортогональну послідовність (x_n, f_n) . Причому, якщо лінійна оболонка $\text{lin } H$ нормувча, то й $\text{lin}_n (f_n)$ — теж нормувчий підпростір.

Ця теорема узагальнює один результат І. Зінгера, доведений при сильнішому припущенні сепарабельності простору X ; ідея доведення подібна.

Теорема 6 [13]. Існує банахів простір без нормувчих біортогональних систем.

Як відомо, не всякий банахів простір має базис Маркушевича. Але подібно до того, як за фундаментальною біортогональною системою можна будувати обмежену фундаментальну біортогональну систему, справедлива

Теорема 7 [15]. Якщо банахів простір має базис Маркушевича (нормувчий базис Маркушевича), то він має обмежений числом 19 базис Маркушевича (нормувчий базис Маркушевича).

Зокрема, усякий слабо компактно породжений простір має обмежений базис Маркушевича. Константа 19 у теоремі 7, звичайно, не точна. Існує слабо компактно породжений банахів простір, для якого вона не менша від 2 [23]. Як показав А. Пелчинський, у сепарабельних банахових просторах її можна зробити менше $1 + \varepsilon$. Невідомо, чи можна тут позбутись від ε (питання, що йде ще від

С.Банаха). Проте існує банахів простір X з сепарабельним спря-
женим, який не має обмеженого одиницею базиса Маркушевича $(x_n,$
 $f_n)_{n=1}^{\infty}$ такого, що $[\ell_n]_1^{\infty} = X^*$ [15]. Це відповідь на одне
питання І.Зінгера й А.Шелчинського.

Простір ℓ_{∞} не має базиса Маркушевича, а $\ell_{\infty}(\Gamma)$,
скажімо $\Gamma > \aleph_0$ не може бути підпростором простору з базисом
Маркушевича. Природно виникає питання про вкладення ℓ_{∞} у простір
з базисом Маркушевича (Дж.Дістель, С.Троянський, Ч. Мак-Артур.)
Відповідь дає

Теорема В [19]. Банахів простір зі слабо* сепарабельним
спряженим (зокрема ℓ_{∞}) ізометричний доповнювальному підпростору
простору з базисом Маркушевича.

З цієї теореми випливають відповіді як на деякі питання, які
раніше ставились, так і на питання, які не ставились, але поста-
новки котрих не менш природна. Зокрема, властивість мати базис Мар-
кушевича не успадковується доповнювальними підпросторами (питання
І.Зінгера), існує простір з базисом Маркушевича, який не має ні
еквівалентної локально рівномірно округлої норми (питання К.Йона
та В.Зіслера), ні нормуючого базиса Маркушевича. В припущенні ак-
сіоми континуума простір X , який будувється в теоремі В (з $\aleph_1 =$
 ℓ_{∞}), не має проєкційного розкладу. В припущенні існування зга-
даного простору Кунена-Шелаха без незліченних біортогональних сис-
тем з теореми В можна вивести існування банахового простору X з
базисом Маркушевича і доповнювального підпростору $U \subset X$
теж з базисом Маркушевича таких, що жоден базис Маркушевича під-
простору U не можна розширити до базису Маркушевича у всьому X
(питання І.Зінгера). Теорема В застосовується також до просторів,
зв'язаних з векторними мірами: Кажуть, що підмножина A банахо-
вого простору X загострена, якщо для всякого $\varepsilon > 0$ знайдеться
 $x \in A$, $x \notin \overline{\text{conv}}(A \setminus \{y : \|y - x\| < \varepsilon\})$. Множина A спадково
загострена, якщо кожна її підмножина загострена. Банахів простір,
який є замкненою лінійною оболонкою своєї замкненої опуклої спад-
ково загостреної множини, називають $RMPG$ -простором. Невак-

ко показати, що всякий простір з базисом Маркушевича є $RNPG$ - простором. Звідси і з теореми 6 випливає, що існує $RNPG$ -простір Y і не слабко компактний оператор $T: \ell_\infty \rightarrow Y$ (питання д-р. Дістеля).

Далі розглянемо біортогональні системи, близькі до звичайного базису (Шаудера) сепарабельного банахового простору.

Означення. Множина $x_i: i \in J$ банахового простору X називається базисом Енфло-Розенталя, якщо $\{x_i: i \in J\} = X$ і

кожну його зліченну підмножину можна так упорядкувати, що вона стане базисом Шаудера у своїй замкненій лінійній оболонці. Власне Енфло і Розенталь показали, що такий базис існує в довільному просторі $L_p(\mu)$, $1 < p < \infty$. У праці [19] вводиться $\{R\}$ -базисна константа базису Енфло-Розенталя і з її допомогою доводиться, що будь-який базис Енфло-Розенталя є нормуючим базисом Маркушевича (раніше І. Зінгер показав, що базис Енфло-Розенталя буде обмеженим базисом Маркушевича). Потім наводиться приклад проєкційного базису (x_α)

(навіть у сепарабельному) банаховому просторі, який не буде базисом Енфло-Розенталя (у сепарабельному просторі це просто звичайний базис) при жодній перестановці індексів, але для будь-якого $x \in X$ знайдеться перестановка σ натурального ряду така, що $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_{\sigma(i)} x_{\sigma(i)}$. Це відповідь на одне питання Ч. Бессагі і І.

Зінгера. Прикладом служить стандартний проєкційний базис простору $C[\omega^2]$ неперервних функцій на відрізку ординалів $[1, \omega^2]$.

Такі ж проєкційні базиси існують у просторах C_0 та $C[0, 1]$.

Відзначимо ще одну властивість проєкційного базису простору $C[\omega^2]$.

Нагадаємо, що базис Маркушевича називається базисом з дужками, якщо існує така зростаюча послідовність натуральних чисел $(n_i)_{i=1}^{\infty}$,

що природні проєктори $P_{n_i}: X \rightarrow [x_n]_{n=1}^{n_i}$ паралельно $[x_n]_{n=1}^{\infty}$

обмежені в сукупності. Як помітив М. Кадець, коли біортогональні функціонали до базису Маркушевича у сепарабельному банаховому просторі натягають нормуючий підпростір, то цей базис Маркушевича можна розбити на 2 базиси з дужками. Виявляється, що природний проєкційний базис простору $C[\omega^2]$ не можна розбити на

скінченну кількість послідовностей, кожна з яких є базисом з дужками у своїй замкненій лінійній оболонці [19]. Це відповідь на питання І.Зінгера.

Відзначимо ще два результати, які відносяться до теорії біортогональних систем у сепарабельних банахових просторах: У всякому нескінченновимірному банаховому просторі існує обмежена числом \aleph_1 бібазисна послідовність, тобто біортогональна послідовність (x_n, f_n) така, що як (x_n) , так і (f_n) є базисами в своїх замкнених лінійних оболонках ([19]; це позитивна відповідь на одне питання П.Теренці; існування обмеженої бібазисної послідовності показали В.Девіс, Д.Дін та Лін Бор-лу). У класі злічених базисів Маркушевича не існує універсального елемента ([23], відповідь на питання Н.Калтона, який показав існування універсального елемента у класі злічених фундаментальних біортогональних систем. При доведенні істотно використовується один результат Б.Годуна та М.Осторовського про слабкі* секвенціальні замикання у спряжених просторах.

У робіт [29] розглядаються, зокрема, ортогональні базиси Маркушевича в банахових алгебрах, тобто базиси Маркушевича (x_n) для яких $x_n \cdot x_m = 0$ при $n \neq m$ і $x_n^2 \neq 0$. З їх допомогою показано, що для будь-якого замкненого підпростору Y сепарабельного банахового простору X на X можна ввести комутативне іскрєнення, яке матиме Y своїм радикалом. Це узагальнення одного результату Н.Яковлева; результат Яковлева у свою чергу узагальнює один неопублікований результат автора.

2. Біортогональні системи в несепарабельних симетричних функціональних просторах.

Результати цього розділу опубліковані головним чином в [26]. Там доводиться теорема Магарам про структуру вимірного простору, яка грає важливу роль у багатьох питаннях, зв'язаних з несепарабельними симетричними просторами. На думку автора це, значною мірою функціонально-аналітичне доведення з використанням теореми Крейна-

Мільмана про крайні точки, простіше від відомих.

Нагадаємо, що банахів простір (класів) вимірних функцій, заданих на вимірному просторі (Ω, Σ, μ) , називається симетричним якщо: 1) з $y \in X$ і $|x(\omega)| \leq |y(\omega)|$ для майже всіх $\omega \in \Omega$ випливає $x \in X$ і $\|x\| \leq \|y\|$; 2) з $y \in X$ і $d_{|x|}(t) = d_{|y|}(t)$ для всіх $t \geq 0$ випливає $x \in X$ і $\|x\| = \|y\|$, де $d_{|x|}(t) = \mu(\{\omega: |x(\omega)| > t\})$ - функція розподілу $|x(\omega)|$. Кажуть, що норма $\|\cdot\|$ симетричного простору X абсолютно неперервна, якщо для всякого $x \in X$ і всякої спадної послідовності Ω_n вимірних підмножин Ω^* з порожнім перетином $\|\chi_{\Omega_n} x\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Важливими характеристиками симетричного простору X є нижній $p_X = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \ln \tau / \ln \chi_X(\tau)$ та верхній $q_X = \lim_{\tau \rightarrow +0} \ln \tau / \ln \chi_X(\tau)$ індекси фонда, де $\chi_X(\tau) = \sup \{\|y\| / \|x\| : x \in X \setminus \{0\}, y \in B_\tau(x)\}$, $B_\tau(x)$, $\tau > 0$ - множина усіх $y \in X$ таких, що для всіх a, b з $a < b$ і $ab > 0$ маємо $\mu\{\omega: a \leq y(\omega) < b\} \leq \tau \mu\{\omega: a \leq x(\omega) < b\}$.

Вводиться і досліджується поняття відповідності між симетричним банаховим простором на одиничному інтервалі й симетричним банаховим простором на довільному ймовірнісному просторі. Воно допомагає переносити деякі теореми, зокрема інтерполяційні, з симетричних просторів на $(0, 1)$ на випадок довільного ймовірнісного простору. Це поняття було відоме раніше, проте точних доведень, а особливо явних конструкцій з допомогою теореми Магарам здається раніше не з'являлось.

Базис Маркушевича $(x_i : i \in J)$ несепабельного банахового простору називаємо базисом Вифло-Розенталя-Чезаро, якщо всяка його зліченна підмножина $(x_j : j \in J)$ міститься в зліченній підмножині, яка є базисом Чезаро своєї замкнутої лінійної оболонки після деякої перестановки індексів. У наступній теоремі синтезуються деякі результати про існування різних біортогональних систем у симетричних просторах.

Теорема 9. Нехай (Ω, Σ, μ) - безатомний ймовірнісний простір.

Тоді:

а) на (Ω, Σ, μ) існує ортогональна відносно природного скалярного добутку система $w_i : i \in J$, яка утворює базис Енфлю-Розенталя-Чезаро у всякому симетричному просторі E на Ω з абсолютно неперервною нормою;

б) якщо, крім того, верхній індекс Бойда $q_E < \infty$, то система $(w_i : i \in J)$ розбивається на зліченну кількість підсистем, кожна з яких еквівалентна ортогональному базисові гільбертового простору. Коли ж ще й нижній індекс Бойда $p_E > 1$, то ці підсистеми натягують доповнювальні підпростори, а вся система утворює базис Енфлю-Розенталя;

в) якщо симетричний банахів простір E на (Ω, Σ, μ) має вагу не менше \mathcal{N}_{ω_c} , то він ізоморфно вкладається у простір з безумовним базисом лише тоді, коли $E = L_2(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Доведення теореми 9 в) використовує деякі міркування Енфлю-Розенталя, і довели це твердження для $L_p(\mu)$. Наступне твердження узагальнює один результат Джонсона і Одела, а саме, що усякий підпростір $X \subset L_p(\mu)$, $1 < p < \infty$, містить безумовну базисну послідовність потужності $\text{dens } X$.

Теорема 10. Якщо $1 < p_E, q_E < \infty$, то усякий підпростір $X \subset E$ має монотонний безумовний проєкційний розклад.

З цієї теореми виводиться існування в X великих підпросторів, ізоморфних гільбертовому простору. виявляється, розбиття, аналогічне теоремі 9 б), існує для кожної системи характерів на компактній абелевій групі.

Теорема 11. Нехай G - компактна абелева група. Тоді група її характерів G' утворює базис Маркушевича в довільному симетричному просторі на G (з мірою Гаара) з абсолютно неперервною нормою і може бути розбита на зліченну кількість підсистем, кожна з яких еквівалентна у всякому $L_p(G)$, $1 \leq p < \infty$, ортогональному базисові гільбертового простору.

Важливими прикладами несепарабельних симетричних просторів з абсолютно неперервною нормою є простори майже періодичних функцій. Ми вводимо поняття симетричного простору майже періодичних функцій, яке узагальнює поняття просторів Безиковича, Безиковича-Орліча та Безиковича-Логанца. Використовуючи попередні загальні результати, досліджуються питання існування різного сорту базисів у симетричних просторах майже періодичних функцій а також питання існування великих гільбертових підсистем. Зокрема показано, що тригонометричну систему $(e^{i\lambda t} : \lambda \in \mathbb{R})$ можна розбити на зліченну кількість підсистем, кожна з яких буде еквівалентна ортогональному базису гільбертового простору у всякому просторі майже періодичних функцій Безиковича B_p , $1 \leq p < \infty$.

3. Простори зі слабо* ангельським спряженням та вибір підпросторів із спеціальними властивостями.

У [18] досить докладно досліджуються простори зі слабо* ангельським спряженням, тобто простори X , для яких слабо* і слабо* секвенціальне замикання кожної обмеженої підмножини X^* співпадають. Вони є узагальненням слабо компактно породжених просторів і успадковують багато їхніх властивостей. Показується стійкість властивості мати слабо* ангельський спряжений відносно взяття підпростору і лінійного неперервного образу, досліджуються властивості слабких* секвенціальних замикань. У роботі [5] наводиться критерій спряженості слабо компактно породженого простору.

Теорема 12. Для того, щоб слабо компактно породжений простір був спряжений до деякого банахового простору, необхідно і достатньо, щоб в X^* існував замкнений за нормою тотальний підпростір F^* , окладений з функціоналів досягаючих норми.

Ця теорема узагальнює теорему Джеймса про рефлексивність (звичайно, з припущенням, що простір X^* слабо* ангельський): банахів простір рефлексивний тоді і тільки тоді, коли кожен неперервний

лінійний функціонал на ньому досягає своєї норми. У цьому випадку роль підпростору F , про який іде мова в теоремі 12, грає уаось X^* . Насправді ми використовуємо відому техніку доведення теореми Джеймса. Теорема Джеймса справедлива для будь-якого банахового простору, але теорема 12 не для всякого [5]. М.Френгов узагальнював її на простори зі слабо* ангельським спряженням. З теоремі 12 можна дістати декілька корисних наслідків, наприклад, узагальнення одного результату М.Кадеця, В.Фонра та Р.Халдона.

Наслідок [9]. Нехай X - банахів простір і E - замкнена за нормою лінійна оболонка крайніх точок кулі $B(X^*)$. Якщо E - слабо компактно породжений простір, то $E = X^*$.

За допомогою базисів Маркушевича у роботі [20] доводиться, що для всякого слабо компактно породженого банахового простору X існує банахів простір Y і лінійний неперервний ін'єктивний оператор $T: Y \rightarrow X$ із щільним образом такі, що TY містить обмежену замкнену опуклу множину, на якій кожен функціонал з X^* не досягає супремуму. Це позитивна відповідь на одне припущення Дж. Борвейна й Д.Тінглі.

Будь-який базис Маркушевича простору зі слабо* ангельським спряженням є зліченно нормувчим, та не завжди існує.

Теорема 13 [18]. Існує банахів простір зі слабо* ангельським спряженням і локально рівномірно округлов нормою, який не має ні базиса Маркушевича, ні проєкційного розкладу.

Це відповідь на питання К.Бона і В.Зізлера, які показали, що спряжений простір з локально рівномірно округлов нормою має базис Маркушевича. Не відомо, чи існує для всякого сепарабельного підпростору Y банахового простору X доповнювальний в X підпростір континуальної ваги, що містить Y . При деяких додаткових припущеннях існування такого підпростору вивчав С.Гулько. Для просторів зі слабо* ангельським спряженням має місце сильні з твердження (яке у загальному випадку не правильне).

Теорема 14 [19]. Нехай X^* слабо* ангельський. Для будь-якого підпростору $Y \subset X$ знайдеться доповнювальний підпростір

$Y \subset Z \subset X$ ваги не більшої ніж $\max(c, \text{dens } Y)$.

у роботі [7] наводиться доведення основної властивості слабо компактно породжених просторів - наявності монотонного проєкційного розкладу $\{P_n\}$. Воно чисто геометричне, значно простіше і коротше від раніше відомих. Тех просте, топологічне, доведення основної властивості слабо компактно породжених просторів було дане С. Гульком. Звичайно, якщо розклад $\{P_n\}$ монотонний, тобто $\|P_n\| = 1$, то $\|I - P_n\| \leq 2$, I - одиничний оператор. Цю оцінку не можна покращити [16]. Існує слабо компактно породжений простір такий, що для будь-якого проєкційного розкладу $\{P_n\}$ з нього існує індекс β з $\|I - P_\beta\| = 2$. При конструкції цього прикладу провідну роль грає встановлений у [18] факт, що у слабо компактно породжених просторах ваги ω_1 проєкційних розкладів "небагато" у тому сенсі, що перетин двох проєкційних розкладів знову буде проєкційним розкладом.

Доведення наступного варіанту теореми Гана-Банаха просте.

Теорема 15 [12]. Нехай X - віддільний локально опуклий простір, а V - його нескінченновимірний лінійний підпростір. Нехай (V_n) - послідовність опуклих замкнених множин з X , $V_n \cap V = \emptyset$ для всякого n . Тоді V містить нескінченновимірний підпростір Z , замикання котрого не перетинається з V_n при жодному n .

Наслідками звідси дістаються як раніше добре відомі результати, так і нові. Наведемо деякі з них. Якщо X - банахів простір з сепарабельним спряженням, то кожен замкнення за нормою нескінченновимірний підпростір X^* містить слабо* замкнення нескінченновимірний підпростір. Якщо, більш того, X^* сепарабельний, то X і X^* містять нескінченновимірні рефлексивні підпростори. З допомогою техніки базисних послідовностей ці результати доводились В. Мільманом, В. Джонсоном та Х. Розенталем. На деякі класи несепарабельних просторів вони узагальнювались К. Йоном і В. Зіслером. Питання існування рефлексивних підпросторів у банахових просторах досліджувались також В. фонфом.

Наслідок 1. Нехай $A: X \rightarrow Y$ - лінійний неперервний ін'єктивний оператор з розривним оберненим. Існує замкнений нескінченновимірний підпростір $Z \subset Y$, $Z \cap AX = 0$.

Цей наслідок суттєво використовувався В. Шевчиком при дослідженні операторних образів та базисів у парах банахових просторів.

Наслідок 2. Нехай Y і Z квазідоповнювальні але не доповнювальні замкнені підпростори банахового простору X . Тоді знайдеться такий замкнений підпростір $Z \subset \tilde{Z} \subset X$, що $\dim \tilde{Z}/Z = \infty$ і підпростори Y та \tilde{Z} квазідоповнювальні.

При додаткових припущеннях і за допомогою набагато складнішої техніки цей результат доводився раніше Р. Джвямсом і В. Джонсоном. Пізніше він узагальнювався на простори Фреше Л. Дребновським.

Наступний результат узагальнює теорему Девіса й Лінденштрауса про існування ненормованого підпростору у сполученому до неквазірефлексивного простору. Його доведення спирається на доведення теореми 15, а сам результат використовується для встановлення не регуляризованості обернених до деяких інтегральних операторів.

Наслідок 3 [25]. Нехай X - сепарабельний банахів простір, F - тотальний підпростір простору X^* і $\dim X^{**}/(F^\perp + X) = \infty$. Тоді F містить тотальний ненормуваний підпростір.

У роботі [1] згадана теорема Девіса-Лінденштрауса узагальнюється на простір Фреше.

4. Тотальні підпростори і ступінь розривності оберненого до лінійного неперервного оператора.

Надалі нас цікавитиме наступне коло питань. Нехай X - банахів простір, Y - топологічний векторний простір і $A: X \rightarrow Y$ - лінійний неперервний ін'єктивний оператор. Коли A^{-1} буде \mathbb{R} -визірною функцією, поточковою границею неперервних зображень,

границев послідовності лінійних неперервних скінченномірних операторів і т.п.? Те, що розглядається топологічний векторний простір Y , а не нормований, пояснюється не стільки прагненням до більшої загальності, а більше тим, що з точки зору деяких застосувань (наприклад, у теорії ймовірностей або теорії регуляризованості за Тихоновим некоректних задач) важливо розглядати тотожне відображення з банахового простору X з нормованою топологією в X зі слабкою топологією $w(X, F)$, F - тотальний підпростір X^* . Умови формулюватимемо в термінах властивостей підпростору $F = A^*Y^* \subset X^*$. Наступне твердження, яке неважко доводитися і можливо відоме, дає надію, що на цьому шляху можна досягти успіху.

Твердження 1. Нехай X, Y, Z - банахові простори і $A: X \rightarrow Y, B: X \rightarrow Z$ - лінійні неперервні ін'єктивні оператори. Нехай $A^*Y^* = B^*Z^*$. Тоді існує ізоморфізм $C: AX \rightarrow BY$, для якого $A = CB$.

Інакше кажучи, твердження 1 показує, що ізоморфні властивості оператора (і його оберненого) повністю визначаються простором X і підпростором $A^*Y^* \subset X^*$.

Слабким $*$ секвенціальним замиканням множини $F \subset X^*$ називається сукупність $F_{(\alpha)}$ усіх границь слабо $*$ збіжних в X^* послідовностей з F . За індукцією для будь-якого ординала α слабка $*$ секвенціальна замкнення порядку α означається як $F_{(\alpha)} = \bigcup_{\beta < \alpha} (F_{(\beta)})_{(\alpha)}$.

Теорема 16. [14]. Нехай A - лінійний ін'єктивний оператор з сепарабельного банахового простору X на нормований простір Y . Оператор A^{-1} є B -вимірним відображенням класу α тоді і тільки тоді, коли для підпростору $F = A^*Y^* \subset X^*$ буде $F_{(\alpha)} = X^*$.

При $\alpha = 1$ ця теорема доведена Л.Афанасевим та В.Петуніним; означення B -вимірності класу α див. у [Kuratoski K. Topology, v.I. New York - Warszawa, 1966].

Наслідок. Нехай на сепарабельному банаховому просторі X , $\|\cdot\|$ задана слабкіша віддільна топологія τ , узгоджена з векторною структурою. σ -алгебри $\sigma(\|\cdot\|)$ та $\sigma(\tau)$, породжені відповідними топологіями, збігаються.

Нехай $F \subset X^*$ - тотальна множина і $\sigma(F)$ - σ -алгебра на X , породжена півпросторами вигляду $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$, $f \in F$, $\alpha \in \mathbb{R}$. З точки зору теорії ймовірностей цікавим є питання про співпадіння σ -алгебр $\sigma(\|\cdot\|)$ та $\sigma(F)$. Якщо простір X сепарабельний, то неважко помітити, що $\sigma(F) = \sigma(w(X, F))$. Тому з наслідку випливає відомий результат про те, що для сепарабельного простору X і тотальної підмножини $F \subset X^*$ завжди $\sigma(F) = \sigma(\|\cdot\|)$. Неважко показати, що для несепарабельних просторів теорема 16 та наслідок з неї неправильні. Проте у випадку рефлексивних просторів справедливий такий

Наслідок [2, 3b]. Нехай на рефлексивному просторі X задана слабкіша віддільна локально опукла топологія τ . Тоді $\sigma(\|\cdot\|) = \sigma(\tau)$.

Цей наслідок легко вивести з такої

Теорема 17 [2, 3b]. Для локально рівномірно округлого простору X $\sigma(\|\cdot\|) = \sigma(w(X, X^*))$.

яка була отримана незалежно Едгаром і автором.

Теорема 16 [14]. Слабо компактно породжений банахів простір X розкладається в пряму суму сепарабельного і рефлексивного підпросторів тоді і тільки тоді, коли для будь-якої слабкішої норми $\|\cdot\|$ (слабкішої віддільної локально опуклої топології τ) $\sigma(\|\cdot\|) = \sigma(\|\cdot\|)$ (відповідно, $\sigma(\|\cdot\|) = \sigma(\tau)$).

У роботі [19] розглядається задача про борелівський графік. У відомих теоремах Л.Шварца, А.Мартіно, Ж.Годфруа про неперервність оператора з борелівським графіком так чи інакше фігурують

умови сепарабельності. А. Годура було поставлене питання про справедливості теореми про борелівський графік для несепарабельних просторів. Виявляється, що навіть при інших досить жорстких вимогах без припущення сепарабельності теорема про борелівський графік не правильна. Наведений у [17] приклад не є слабо компактно породженим простором. Для слабо компактно породжених просторів деякі позитивні результати у цьому напрямку дістала Т. Єримова.

Роботи [24, 25] присвячені регуляризованості лінійних обернених задач.

Означення Нехай $A: X \rightarrow Y$ - лінійний неперервний ін'єктивний оператор з банахового простору X в нормований простір Y . Оператор A^{-1} називається регуляризованим за Тихоновим, якщо існує сім'я відображень $R_\delta: Y \rightarrow X$, $\delta \in (0, \delta_0)$ така, що для всякого $\lambda \in X$

$$\sup \{ \|\lambda - R_\delta y\| : y \in Y, \|y - Ax\| \leq \delta \} \rightarrow 0 \text{ при } \delta \rightarrow 0.$$

Якщо відображення R_δ лінійні (скінченновимірні), то оператор A^{-1} називають лінійно (скінченновимірною) регуляризованим.

Як показав В. Винокуров, регуляризованість A^{-1} еквівалентна належності його до I-го класу Бера. Наступне твердження отримане спільно з В. Винокуровим та М. Петуніним.

Теорема 19 [2, 22]. Нехай A - лінійне ушільнення (тобто лінійний неперервний ін'єктивний оператор із слабо компактно породженого простору X в нормований простір Y). Регуляризованість A^{-1} еквівалентна нормувачості підпростору $A^*Y^* \subset X^*$.

Звідси виводиться існування нерегуляризованих лінійних обернених задач в сепарабельних неквазірефлексивних просторах, а також результат В. Васіна та В. Танани про регуляризованість таких задач у рефлексивних банахових просторах. Проте існують рефлексивні сепарабельні простори Фреше і оператори в них з нерегуляризованими оберненими [27]. За допомогою базисів Маркушевича доводиться наступна

Теорема 20 [9]. Нехай X - сепарабельний неквазірефлексивний банахів простір і Y - сепарабельний банахів простір.

Тоді існує ядерне лінійне ущільнення $A: X \rightarrow Y$ із щільною в Y областю значень AX і з нерегуляризованим оберненим.

У роботі [4] загальні теореми застосовуються до вивчення умов регуляризованості деяких конкретних задач відношення неперервної функції за її коефіцієнтами Фур'є, розв'язання інтегральних рівнянь 1-го роду, задачі аналітичного продовження функції з кривої в область. Регуляризованість першої задачі була відома раніше; доведення двох інших нові і отримані разом з М. Петуніним. При цьому автором була доведена одна теорема про регуляризованість суперпозиції операторів. Нізніше питання регуляризованості суперпозиції докладно вивчалось С. Доманським та М. Островським. У [27] розглядається задача аналітичного продовження у просторах Фреше, а в [25] доводиться, опираючись на загальні теореми з розділу 2, нерегуляризованість деяких інтегральних рівнянь у широкому класі функціональних просторів. Результатам з [25] передував один приклад Л. Меніхеса; далі вони на основі теореми Іб розвивались М. Островським.

Означення. Тотальний підпростір F спряженого простору X' назвемо сильно нормувчим, якщо знайдеться число a таке, що для будь-яких скінченномірних підпросторів $E \subset X$ і $G \subset X'$

$$\inf \max \{ \|T\|, \|T^{-1}\| \} \leq a,$$

якщо T береться по всіх операторах $T: G \rightarrow F$, для яких $q(e) = Tq(e)$ при будь-яких $e \in E$, $q \in G$.

Усякий сильно нормувчий підпростір є нормувчим, але не навпаки. У роботі [20] вивчаються властивості сильно нормувчих підпросторів. Так, якщо простір X або квазірефлексивний, або є \mathcal{L}_∞ -простором, то всякий нормувчий підпростір буде сильно нормувчим.

Означення. Базис Маркушевича $(x_n, f_n)_{n=1}^\infty$ банахового простору X називається операторним базисом, якщо існує послідовність лінійних операторів $Q_n: P_n X \rightarrow P_n X$, де $P_n x = \sum_{i=1}^n f_i(x) x_i$, така, що для всякого $x \in X$ $\|Q_n P_n x - x\| \rightarrow 0$. Банахів простір X має властивість обмеженої апроксимації, якщо існує $\lambda > 0$ таке, що для будь-якого скінченновимірного підпростору $Y \subset X$ і будь-якого $\epsilon > 0$ знайдеться

скінченновимірний лінійний оператор $R: X \rightarrow X$ з $\|R\| \leq \lambda$ і $\|Ry - y\| \leq \epsilon \|y\|$ при $y \in Y$.

У наступному твердженні синтезовані результати В.А.Винокурова і автора.

Теорема 21 [3, 20]. Нехай A - лінійне ущільнення з сепарельного банахового простору X в нормований простір Y . Наступні умови еквівалентні:

- 1) A^{-1} лінійно скінченновимірно регуляризований;
- 2) існує послідовність лінійних неперервних скінченновимірних операторів $B_n: Y \rightarrow X$, для яких при будь-якому $y \in AX$ $\|B_n y - A^{-1} y\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$;
- 3) X має властивість обмеженої апроксимації і підпростір $A^* Y^* \subset X^*$ сильно нормуваний;
- 4) існує послідовність лінійних неперервних скінченновимірних операторів $C_n: X \rightarrow X$, для якої при всякому $x \in X$ $\|B_n x - x\| \rightarrow 0$ і $B_n^* X^* \subset A^* Y^*$;
- 5) в X існує операторний базис (x_n, f_n) з $f_n \in A^* Y^*$.

Деякі попередні результати тут були отримані Ф.Вахер та І.Зінгером. Пізніше питання лінійної скінченновимірної регуляризованості та сильно нормувачі підпростори активно досліджувались Л.Гладуном та М.Островським.

Теорема 22 [6]. Нехай X - банахів простір. Для того, щоб для будь-якого нормованого простору Y обернений до всякого лінійного ущільнення з X в Y був скінченновимірно лінійно регуляризованим, необхідно і достатньо, щоб X був сепарабельним квазірефлексивним простором з властивістю обмеженої апроксимації.

У [3] загальні результати застосовуються для встановлення лінійної скінченновимірної регуляризованості деяких конкретних задач. Наводиться приклад регуляризованого, але не лінійно регуляризованого оператора.

Далі розглянемо розв'язні регуляризатори. Лінійний регуляри-

затор (R_δ) називається розв'язним, якщо із збіжності $\|R_\delta y - x\| \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$ випливає $Ax = y$. Побудовані на основі такого регуляризатора наближені розв'язки мають ту властивість, що з їх збіжності випливає збіжність са. до точного розв'язку. Виявляється, що нерозв'язних регуляризаторів досить багато.

Теорема 23 [21]. Нехай оператор $A: X \rightarrow Y$, X, Y - банахові простори, має розривний обернений, який лінійно регуляризовний. Тоді для A^{-1} існує нерозв'язний лінійний регуляризатор.

Теорема 24 [21]. Нехай A - лінійне ущільнення з рефлексивного банахового простору X з базисом Шаудера у банахів простір Y . Тоді A^{-1} лінійно скінченновимірно розв'язно регуляризовний.

Тематика роботи [21] розвивалась пізніше В.Кадецьом, С.Доманським та В.Фонром.

Наведемо ще одне застосування методів теорії двоїстості с - нахових просторів до іншого розділу обчислювальної математики - дискретної апроксимації. Нехай X і X_n , $n = 1, \infty$, - банахові простори і $P_n: X \rightarrow X_n$ - лінійні неперервні оператори з $\|P_n x\| \rightarrow \|x\|$ при $n \rightarrow \infty$ для всякого $x \in X$ (вони називаються зв'язувчими). Кажуть, що послідовність $x_n \in X_n$ \mathcal{P} -збігається до елемента $x \in X$, якщо $\|x_n - P_n x\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Нехай X^* , X_n^* - відповідні спряжені простори. Послідовність $f_n \in X_n^*$ вважається слабо* збіжною до $f \in X^*$, якщо для будь-якої \mathcal{P} -збіжної послідовності $x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} x$ завжди $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$. Позначимо через $F(\mathcal{P})$ множину всіх елементів з X^* , які є границями слабо* \mathcal{P} -збіжних послідовностей. Як відомо, для сепарабельного простору X завжди $F(\mathcal{P}) = X^*$; для несепарабельного - не завжди. В багатьох випадках множина $F(\mathcal{P})$ виявляється досить великою; так, наприклад, якщо X - слабо компактно породжений простір, то вона тотальна.

Теорема 25 [16]. Існують простори $X, X_n, n=1, \infty$
послідовність зв'язувчих операторів $P_n X \rightarrow X_n$, для яких
множина $F(\mathcal{P})$ не тотальна на X .

Це контрприклад до однієї гіпотези Г.Вайнікко.

I. Основні наукові роботи, включені у дисертацію

1. Пличко А.Н. Условия рефлексивности и квазирефлексивности топологических векторных пространств//Укр.мат.журн.-1975.-27,№1.-С.24-32.
2. Винокуров В.А., Петунин Ю.И., Пличко А.Н. Условия измеримости и регуляризуемости отображений, обратных к непрерывным линейным отображениям//Докл. АН СССР.-1975.-220,№3.-С.509-512.
3. Винокуров В.А., Пличко А.Н. О регуляризуемости линейных обратных задач линейными методами//Там же.-1976.-229,№5.-С.1037-1040.
4. Петунин Ю.И., Пличко А.Н. Регуляризуемость по Тихонову некоторых классов некорректных задач//Мат. сб. Киев.-1976.-С.221-224.
5. Пличко А.Н. Условия сопряженности wsc -пространств//Мат. заметки.-1978.-23,№2.-С.261-265.
6. Менихес Л.Д., Пличко А.Н. Условия линейной и конечномерной регуляризуемости линейных обратных задач//Докл. АН СССР.-1978.-241,№5.-С.1027-1030.
7. Пличко А.Н. Существование замкнутого ограниченного M -базиса в wsc -пространстве//Теория функций, функций. анализ и их прил.-1979.-32.-С.61-69.
8. Пличко А.Н. Существование ограниченной, тотальной биортогональной системы в банаховом пространстве//Там же.-1980.-33.-С.111-118.
9. Петунин Ю.И., Пличко А.Н. Теория характеристик подпространств и ее приложения.-Киев: Вища шк., 1980.-216 с.
10. Пличко А.М. Побудова обмежених фундаментальних і тотальних біортогональних систем за необмеженнями//Доповіді АН УРСР. Сер.А.-1980.-№5.-С.19-22.
11. Пличко А.Н. Банахово пространство без фундаментальной биортогональной системы//Докл. АН СССР.-1980.-245,№4.-С.789-801.
12. Пличко А.Н. Выбор в банаховом пространстве подпространств со специальными свойствами и некоторые свойства квазидополнений//Функцион. анализ и его прил.-1981.-15,№1.-С.82-83.
13. Пличко А.Н. Некоторые свойства пространства Джонсона-Линденштрауса//Там же.-№2.-С.88-89.
14. Пличко А.Н. Слабые $*$ секвенциальные замыкания и B -измеримость

- отображений, обратных к линейным непрерывным операторам в
всех w -пространствах//Сиб.мат.журн.-1981.-22, №6.-С.217.
15. Пличко А.Н. О проекционных разложениях единичного оператора и базисах Маркушевича//Докл. АН СССР.-1982.-263, №3.-С.543-546.
16. Пличко А.М. Про тотальність множини слабо* Φ -апроксимовних функціоналів//Доп. АН УРСР. Сер.А.-1983.-№2.-С.17-20.
17. Пличко А.Н. Фундаментальные биортонормальные системы и проекционные базисы в банаховых пространствах//Мат. заметки.-1983.-33, №3.-С.473-476.
18. Пличко А.Н. О проекционных разложениях, базисах Маркушевича и эквивалентных нормах//Тр. же.-1983.-34, №5.-С.719-726.
19. Пличко А.Н. О базисах и дополнениях в несепарабельных банаховых пространствах//Сиб.мат.журн.-Ч.1:1984.-25, №4.-С.155-162; Ч.2:1986.-27, №2.-С.149-153.
20. Гладун Л.В., Пличко А.Н. О нормирующих и сильно нормирующих подпространствах сопряженного банахова пространства//Укр. мат.журн.-1984.-36, №4.-С.427-433.
21. Доманский Е.Н., Пличко А.Н. К обобщению теоремы Пикара о разрешимости интегрального уравнения Фредгольма первого рода//Докл. АН СССР.-1985.-280, №4.-С.781-784.
22. Винокуров В.А., Гладун Л.В., Пличко А.Н. О нормирующих подпространствах сопряженного пространства и регуляризуемости обратных операторов//Изв. вузов. Математика.-1985.-№6.-С.3-10.
23. Plichko A. On bounded biorthogonal system in some function spaces//Studia Math.-1986.-84.-P.25-37.
24. Пличко А.Н., Попов М.М. Базисы в несепарабельных симметричных пространствах и пространствах почти периодических функций//Изв. вузов. Математика.-1987.-№4.-С.50-59.
25. Пличко А.Н. Ненормирующие подпространства и интегральные операторы с нерегуляризуемым обратным//Сиб. мат. журн.-1988.-29, №4.-С.208-211.
26. Plichko A.M., Popov M.M. Symmetric function spaces on atomless probability spaces//Dissertationes Math.-1990.-306.-88 p.
27. Менихес Л.Д., Пличко А.М. До теорії регуляризованості в топологічних векторних просторах//Укр.мат.журн.-1990.-42, №6.-С.777-781.
28. Пличко А.Н. Несколько замечаний об операторных образах//Теория функций, функциональный анализ и их прил.-1990.-53.-С.69-70.

29. Плічко А.М. Автоматична неперервність, базили і радикали в метризованих алгебрах//Укр.мат.журн.-1992.-44,№8.-С.1129-1132.

II. Інші публікації за темою дисертації

30. Петунін Ю.І., Плічко А.М. Деякі властивості функціоналів, що досягають супремуму на одичній сфері//Укр.мат.журн.-1974.-26,№1.-С.102-105.
31. Плічко А.М. Критерій квазірефлексивності банахового простору//Доп. АН УРСР.-1974.-№5.-С.406-407.
32. Булдин В.В., Петунін Ю.І., Плічко А.М., Шнейберг К.Я. О структуре C^* -алгебры борелевских множеств и сходимости некоторых случайных рядов в банаховых пространствах//Укр.мат.журн.-1975.-27,№4.-С.435-442.
33. Плічко А.М. Расширение квазидополнения в банаховом пространстве//Функцион.анализ и его прил.-1975.- 9. №2.-С.91-92.
34. Плічко А.М. Існування повної \mathcal{E} -ортонормальної системи в сепарабельному нормованому просторі//Доп. АН УРСР.-1976. №1.-С.21-22.
35. Плічко А.М. M -базиси в сепарабельних і рефлексивних банахових просторах//Укр.мат.журн.-1977.-29,№6.-С.681-685.
36. Винокуров В.А., Петунін Ю.І., Плічко А.М. Измеримость и регуляризуемость отображений, обратных к непрерывным линейным операторам//Мат. заметки.-1979.-26,№4.-С.583-591.
37. Вахер Ф.С., Плічко А.М. Пространства, для которых регуляризуемость, линейная и линейная конечномерная регуляризуемость совпадают//Всесоюз. конф. по некорректным задачам.-Фрунзе. 1979.-С.30.
38. Петунін Ю.І., Плічко А.М. Умови регуляризуемости лінійних обернутих задач//Там же.-С.92.
39. Вахер Ф.С., Плічко А.М. Свойство ограниченной аппроксимации и линейная конечномерная регуляризуемость//Укр.мат.журн.-1981.-33,№2.-С.167-171.
40. Плічко А.М. О проекционных базах в банаховых пространствах//7-я Школа по теории операторов в функцион.пространствах-Минск. 1982.-С.148-149.
41. Винокуров В.А., Доманский Е.Н., Менихес Л.Д., Плічко А.М. О некоторых проблемах линейной регуляризуемости//Докл. АН СССР.-1983.-270,№1.-С.31-34.

42. Маслюченко В.К., Пличко А.Н. Квазирефлективные топологические векторные пространства без банаховых подпространств//8-я Школа по теории операторов в функциональных пространствах.- Рига, 1983.-Ч.2.-С.25-26.
43. Pličko A., Terenzi P. On bibasic systems and a Retherford's problem//Rendiconti Acad. Naz. dei Lincei.-1984.-77,NI-2.-P.26-34.
44. Маслюченко В.К., Пличко А.Н. Квазирефлективные локально выпуклые пространства без банаховых подпространств//Теория функций, функциональный анализ и их прил.- 1985.-44.-С.78-84.
45. Пличко А.Н., Шевчик В.В. О возмущениях базиса в паре банаховых пространств//Там же.-1985.-43.-С.98-100.
46. Доманский Э.Н., Пличко А.Н. К обобщению теоремы Пикара о разрешимости интегрального уравнения Фредгольма первого рода// Исслед. по функциональному анализу и его прил.- Свердловск: УрГУ, 1985.-С.19-26.
47. Ладун Л.В., Пличко А.Н. Об операторах, не имеющих линейных конечномерных регуляризаторов//Теория и методы решения некорректно поставленных задач и их приложения.- Саратов, 1985.- С.47.
48. Пличко А.Н., Попов М.М. Несчетные безусловные базисные последовательности и безусловные разложения пространств $L_p(\mathcal{M})$ // XI Школа по теории операторов в функциональных пространствах.- Челябинск, 1986.- Ч.1.-С.87.
49. Александров Г.А., Пличко А.Н. О связи между строгими M -базисами и эквивалентными локально равномерно выпуклыми нормами в пространствах Банаха// Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences.-1987.-40,N2.-С.15-16.
50. Пличко А.Н., Токарев Е.В. О базисах в симметричных пространствах функций//Мат. заметки.-1987.-42,№2.-С.227-234.
51. Островский М.И., Пличко А.Н. Свойства Банаха-Сакса и задача трех пространств//Операторы в функциональных пространствах и вопросы теории функций.-Киев, 1987.-С.96-105.
52. Кадец В.М., Пличко А.Н., Попов М.М. Об одном типе полных минимальных систем в банаховых пространствах//Изв. вузов. Математика.-1988.-№5 -С.33-40.
53. Кучер О.В., Пличко А.М. Усреднені симетричні простори на прямій//Тез. міжзар. конф., присвяченої пам'яті вкад. Ш.П.Кравчука.-Київ-Луцьк, 1992.-С.108.
54. Пличко А.Н., Разенков А.В. О свойствах ортогональных систем в банаховом пространстве, плотно вложеном в гильбертово//Там же.-С.162.

Підл. до друку 18.06.93. Формат 60x84/16. Папір друк. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 1,86. Ум. фарбо-відб. 1,86. Обл.-вид. арк. 1,4.
Тираж 100 пр. Зам. 250 Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики АН України
252601 Київ 4, ІСП, вул. Терещенківська, 3

1160/102

AB 28.895

AB 28.895