Академия наук Украины
Институт кибернетики имени В. М. Глушкова

На правах рукописи

ОЧИЛОВ Салим

УДК 519.6

# ОПТИМИЗАЦИЯ ВРЕМЕНИ ПРОХОЖДЕНИЯ ЧЕРЕЗ ОБЛАСТЬ

01.01.09 — математическая кибернетика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Киев 1993

...ись

Работа выполнена в Институте кибернетики имени В. М. Глушкова АН Украины.

Научный руководитель: академик АН Украины ПШЕНИЧНЫЙ Б. Н.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор ЛЯШКО С. И.,
кандидат физико-математических наук НЕНАХОВ Э. И.

Ведущая организация: Институт математики АН Украины.

Защита состоится 24 декабря 1993 г. в 14.00 час. на заседании специализированного ученого совета Д 016.45.01 при Институте кибернетики имени В. М. Глушкова АН Украины по адресу:

252207 Киев 207, проспект Академика Глушкова, 40.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-техническом архиве института.

Автореферат разослан 23 ноября 1993 года.

Ученый секретарь специализированного ученого совета СИНЯВСКИЙ В. Ф.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Основные результаты теории оптимального управления посвящены исследованию необходимых условий оптимальности. Многие приложения этой теории приобрели характер классических результатов. Интерес к такого рода задачам не ослабевает благодаря широкой области их применения, включающей, в частности, экономику, экологию и технику. Необходимые условия оптимальности изучались А.С.Понтрягиным, Б.Г.Болтянским, Н.Н.Красовским, А.Б.Куржанским, Б.Н.Пшеничным, а также другими авторами.

В диссертационной работе рассматривается специальная задача об оптимальном управлении в смысле быстродействия, в предположении, что между начальным и конечным состояниями объекта имеется заданная "плавающая" область. Требуется выбрать такое управление, которое переведет объект из начального состояния в конечное состояние так, чтобы время перехода через заданную область было бы минимальным. Подобная постановка возникает в задачах оптимального управления, связанных с экологией, когда требуется найти траекторию некоторой динамической системы, которая за минимальное время проходит через зараженную область, причем эта область может перемещатся со временем. К аналогичной постановке может быть также сведена задача быстрейшего прохождения самолетом грозового фронта при его внезапном, непредсказуемом появлении и невозможности его обхода. Изучаемая задача нова по своей постановке и отличается от классической задачи оптимального управления тем, что минимизируемый интегральный функционал необычен и ранее не рассматривался.

Целью настоящей работы является исследование вопросов оптимизации времени прохождения через заданную область, получение необходимых условий оптимальности и изучение дифференциальных свойств выбранного критерия.

Методы исследования. Основу математического исследования составили методы математического программирования, функционального анализа и обобщенное правило множителей Лагранжа.

Научная навизна. Сформулирована задача оптимизации времени прохождения через заданную область. Получены необходимые условия экстремума для линейной системы в разных случаях расположения области начальных и конечных состояний относительно гладкой заданной области. Получены необходимые условия экстремума для линейной системы в случае выпуклой негладкой заданной области. Получены необходимые условия экстремума для нелинейной системы в случае, когда области начальных и конечных состояний не пересекаются с заданной областью.

Практическая ценность. Работа является частью широкой программы научных исследований, проводимых в Институте кибернетики имени В.М.Глушкова АН Украины "Разраоотка интегрированных систем активного управления самолетами, которые функцианируют в условиях значительных изменений параметров движения" по государственной программе 6.6.2 "Интегрированные системы управления движением самолетов" (регистрационный номер 6.6.2.1.(5)). Результаты работы могут найти применение при решении конкретных задач теории оптимального управления.

Апробация работы. Результаты работы неоднократно докладывались на семинарах в отделе вычислительных методов оптимизации ИК АН Украины имени В.М.Глушкова, на семинарах кафедры функционального анализа математического факультета Самаркандского госуниверситета имени А.Навои, а также на следующих конференциях :

1. "Моделирование и исследование устойчивости процессов." Украинская конференция, г. Киев, 1992 г.

2. "Качественная теория дифференциальных уравнений (КТДУ)." VIII - конференция, г. Самарканд, 1992 г.

3. "Моделирование и исследование устойчивости процессов." Украинская конференция, г. Киев, 1993 г.

Публикации. По теме диссертационной работы опубликовано 7 работ.

Структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, двух глав, разбитых на 7 параграфов, заключения и списка цитированной литературы.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность рассматриваемых вопросов, сформулированы цель и задачи исследований. Кратко изложено содержание диссертации.

Первая глава посвящена исследованию задачи оптимизации времени прохождения через заданную область линейной системой.

В параграфе 1.1 приводится общая постановка задачи, приводятся также сведения о характеристической функции заданной области, что позволяет представить в аналитическом виде время прохождения объекта через заданную область. Формулируются и обсуждаются так называемые условия согласованности и регулярности. При этих условиях получены необходимые условия оптимальности для поставленной задачи.

Пусть $R^n$ - $n$-мерное пространство, $x \in R^n$ и траектория $x(t)$ удовлетворяет системе линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t), \qquad (1)$$

где $A$ - $n{\times}n$-матрица, $B$ - $n{\times}r$-матрица, $u(t) \in R^r$. Относительно множества управлений $U$ будем предполагать, что оно выпукло и состоит из таких измеримых функций $u(t)$, для которых решение системы (1) в виде абсолютно непрерывных функций $x(\cdot)$ существует. Заданы множества $M_0 \subseteq R^n$, $M_1 \subseteq R^n_1$ и многозначное отображение $M(\cdot)$ отрезка $[0,1]$ в множество всех подмножеств из $R^n$. Требуется выбрать управление $u(\cdot) \in U$ и начальное условие $x(0) \in M_0$ так, чтобы $x(1) \in M_1$, а время, в течение которого выполняется включение $x(t) \in M(t)$, было минимальным. Если ввести характеристическую функцию

$$\delta(x,t) = \begin{cases} 1, & x \in M(t), \\ 0, & x \notin M(t), \end{cases}$$

то очевидно, что время нахождения траектории $x(\cdot)$ в заданной области $M(t)$, $t \in [0,1]$, выражается интегралом

$$T(x(\cdot)) = \int_0^1 \delta(x(t),t)dt ,$$

где интеграл понимается в смысле Лебега.

Предположим, что множество $M_0$ - выпукло и замкнуто, а множество $M_1$ задается в виде

$$M_1 = \{ x \in R^n : \varphi_j(x) \le 0 , \quad j = 1,\dots,m \},$$

где $\varphi_j$ - непрерывно дифференцируемые функции. Их градиенты

$$\varphi'_{jx} = \left\{ \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1}, \dots , \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_n} \right\}, \qquad j = 1,\dots m,$$

где $x_i$, $i = 1,\cdots,n$ компоненты вектора $x$.
Пусть

$$M(t) = \left\{ x \in R^n: \quad \varphi_0(x,t) \le 0 \right\},$$

где $\varphi_0$ - некоторая функция, непрерывно дифференцируемая по $x$ и $t$.
Введем следующие условия :

1. *Условие согласованности : решения системы* (1), *соответствующее классу управлений $U$, обладают тем свойством, что они лежат в подпространстве $L$ пространства абсолютно непрерывных функций, для которых производная*

$$\frac{d}{dt}\varphi_0(x(t),t) = \varphi'_{0x}(x(t),t)\,\dot{x}(t) + \varphi'_{0t}(x(t),t),$$

*существует для всех* $t \in [0,1]$ *и непрерывна по* $t$.

2. *Условие регулярности* траектории. Пусть $t_*$ $(t^*)$ - момент входа (выхода) траектории $x(\cdot)$ в (из) $M(t)$.

*Будем говорить, что момент* $t_*$ $(t^*)$ *регулярен для траектории* $x(\cdot)$, *если*

$$\frac{d}{dt}\varphi_0(x(t),t)\Big|_{t=t_*} = \varphi'_{0x}(x(t_*),t_*)\,\dot{x}(t_*) + \varphi'_{0t}(x(t_*),t_*) \ne 0.$$

Обзначим левую часть этого соотношения через $\gamma(x(\cdot),t_*)$.

Теперь, учитывая задание множеств $M(t)$ и $M_1 \in R^n$, поставленную задачу в параграфе 1.1 можно записать в следующем стандартном виде :

$$\begin{aligned} &\min T(x(\cdot)) \\ &\varphi_j(x(1)) \le 0, \quad j = 1,2,\cdots,m, \qquad (2) \\ &x(\cdot) \in L, \end{aligned}$$

где $L$ - подпространство пространства абсолютно непрерывных функций.

В параграфе 1.2 приводятся необходимые условия оптимальности задачи (2), когда области начальных и конечных состояний не пересекаются с заданной областью. В этом случае общее время нахождения траектории в заданной области $M(t)$ равно

$$T(x^0(\cdot)) = \sum_{i=1}^{m} (t_{2i} - t_{2i-1}).$$


Воспользовавшись результатами (Пшеничный Б.Н., 1982), доказываются следующие утверждения.

*Теорема* 1.2. Если $x^0(\cdot)$ – решение задачи (2) и выполнены *условия согласованности* и оптимальная траектория *регулярна*, то найдутся такие числа $\lambda_0 \geq 0$, $\lambda_1 \geq 0$, $\ldots, \lambda_m \geq 0$ не все равные нулю, что

$$\lambda_0 T'(x^0(\cdot), \delta x^0(\cdot)) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \, \varphi'_{jx}(x^0(1))\delta x^0(1) \geq 0,$$

для всех вариаций траектории $x^0(\cdot)$ таких, что $\delta x^0(0) \in M_0 - x^0(0)$, $\delta x^0(\cdot) = x(\cdot) - x^0(\cdot)$, $x(\cdot)$ удовлетворяет уравнениям (1) для всех управлений из заданного множества $U$.

*Теорема* 1.3. Если выполнены *условия согласованности* и оптимальная траектория *регулярна*, то существуют такие, не все равные нулю числа $\lambda_j \geq 0$, $j = 1,\ldots,m$ и функция $\psi(\tau)$, $\tau \in [0,1]$, что выполняются следующие соотношения :

$$\psi(0)x^0(0) = \min_{x_0 \in M_0} \psi(0)x_0, \tag{3}$$

$$\int_0^1 \psi(\tau)Bu^0(\tau)d\tau = \min_{u(\cdot) \in U} \int_0^1 \psi(\tau)Bu(\tau)d\tau, \tag{4}$$

$$\dot{\psi}(\tau) = -\psi(\tau)A, \quad \tau \in (t_i, t_{i+1}), \quad i = 1,\ldots,2m-1, \tag{5}$$

$$\psi(t_i + 0) - \psi(t_i - 0) = (-1)^i n(x^0(\cdot), t_i), \quad i=1,\ldots,2m, \tag{6}$$

$$\psi(1) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi'_{jx}(x^0(1)). \tag{7}$$

Функция $\phi(\tau)$ определяется соотношением

$$\phi(\tau) = \Big[-\lambda_0\Big( \sum_{i=1}^{m} \sigma(t_{2i},\tau) n(x^0(\cdot),t_{2i}) e^{At_{2i}} -$$

$$- \sigma(t_{2i-1},\tau) n(x^0(\cdot),t_{2i-1}) e^{At_{2i-1}} \Big) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi'_{jx}(x^0(1)) e^{A\cdot 1} \Big] e^{-A\tau},$$

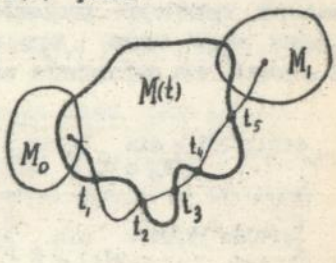
а

$$n(x^0(\cdot),t_i) = \frac{\varphi'_{0x}(t_i),t_i)}{\gamma(x^0(\cdot),t_i)}, \quad \sigma(t,\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \le t, \\ 0, & \tau > t, \end{cases}$$

внешняя нормаль к области $M(t)$ в точке $x^0(t_i)$, $i = 1,\dots,2m$.

В параграфе 1.3 получены необходимые условия оптимальности задачи (2), когда области начальных и конечных состояний пересекаются с заданной областью. В этом случае общее время нахождения траектории в заданной области $M(t)$ равно

$$T(x^0(\cdot)) = t_1 + \sum_{i=1}^{m} (t_{2i+1} - t_{2i}),$$




а функция $\phi(\tau)$ имеет следующий вид

$$\phi(\tau) =$$

$$= \Big\{\cancel{-}\lambda_0 (n(x^0(\cdot),t_1) \sigma(t_1,\tau) e^{At_1} + \sum_{i=1}^{m} \Big[\sigma(t_{2i+1},\tau) n(x^0(),t_{2i+1}) e^{At_{2i+1}} -$$

$$- \sigma(t_{2i},\tau) n(x^0(\cdot),t_{2i}) e^{At_{2i}} \Big] + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi_{jx}(x^0(1)) e^{A\cdot 1} \Big\} e^{-A\tau}.$$

*Теорема* 1.4. Если выполнены условия согласованности и оптимальная траектория регулярна, то существуют такие, не все равные нулю числа $\lambda_j \ge 0$, $j = 1,\dots,m$ и функция $\phi(\tau)$, $\tau \in [0,1]$, что выполняются следующие соотношения :

1. $\psi(0)x^0(0) = \min\limits_{x_0 \in M_0} \psi(0)x_0.$

2. $\int\limits_0^1 \psi(\tau)Bu^0(\tau)d\tau = \min\limits_{u(\cdot) \in U} \int\limits_0^1 \psi(\tau)Bu(\tau)d\tau .$

3. $\dot\psi(\tau) = - \psi(\tau)A, \ \tau \in (0,t_1), \ \tau \in (t_l ,t_{l+1}), \ l=1,\dots,2m -1.$

4. $\psi(t_l - 0) - \psi(t_l + 0) = (-1)^l n(x^0(\cdot),t_l), \quad l = 1,\dots,2m.$

5. $\psi(1) = \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi'_{jx}(x^0(1)).$

В параграфе 1.4 рассматривается случай, когда заданная область выпукла и не зависит от времени. Здесь предполагается, что области начальных и конечных состояний не пересекаются с заданной областью. Т.к как выпуклая область, вообще говоря, имеет негладкую границу и через каждую граничную точку $x^0(t_l)$, ($t_l$, $l = 1, \dots ,2m$, в момент времени пересечения траектории с границей) можно провести опорную гиперплоскость

$$l: \ n_l(x - x^0(t_l)) = 0,$$

где $n_l$ – внешняя нормаль к $M$ в точке $x^0(t_l)$. Получена верхняя оценка целевого функционала. Доказывается теорема.

*Теорема* 1.5. Пусть $x^0(\cdot)$ – решение задачи и выполняются следующие условия :

1. $n_l B = 0$ (*условие согласованности*).

2. $\left.\frac{d}{dt} n_l \ x^0(t) \right|_{t=t_l} = n_l A x^0(t_l) \neq 0$ (*условие регулярности*),

то существуют такие. не все равные нулю числа $\lambda_j \geq 0$, $j = \overline{1,m}$ и функция $\psi(\tau)$, $\tau \in [0,1]$, что выполняются соотношения (3) – (7).

В конце главы приведены два примера, показывающие важность *условий согласованности* и *регулярности*, нарушение которых приводит к качественно новому поведению решений. Рассмотрим второй пример. Пусть уравнения движения объекта $G$ имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x}^1(t) = x^2(t) \,, \\ \dot{x}^2(t) = u(t) \,, \quad t \in [0,1], \ |u| \le 1, \end{cases}$$

где $u$ - управляющий параметр, $x = (x^1, x^2) \in R^2$. Введем обозначения :

$$M_0 = \left\{ x = (x^1, x^2) \in R^2 : x^1 > 0, \ x^2 > 0 \right\}, \quad x_1 = (0,0),$$

$$M = \left\{ x \in R^2 : \varphi_0(x) = -x^1 + |x^2| \le 0, \ x^1 > 0 \right\}.$$

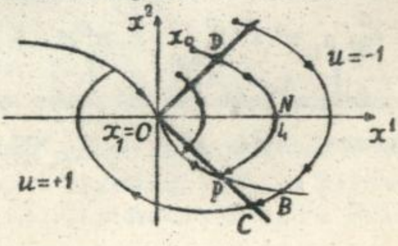
Требуется выбрать управление $u$ и начальное условие $x_0 \in M_0$ так, чтобы $x(1) = x_1$, и найти соответствующее этому управлению оптимальное время, в течение которого выполняется включение $x(t) \in M$. Для этого примера доказано следующее утверждение.

*Теорема* 1.6. Если в начале $x_0$ находится ниже линии $DNP$ или на ней, то движение объекта к $x_1$ за кратчайшее время (в смысле быстродействия) будет оптимальным и в нашем смысле.

Если же $x_0$ расположено выше линии $DNP$, то оптимальное, в нашем смысле, движение к $x_1$ происходит следующем образом: объект в точку $B$ попадает за кратчайшее время (в смысле быстродействия), а после этого движется по дуге $BC$ и дальше к точке $x_1$ за кратчайшее время (в смысле быстродействия).

Во всех трех случаях наименьшее время прохождения через заданную область $M$ вычисляется по формуле $t = 2x^1(0)$.

Геометрическая иллюстрация теоремы 1.6



Вторая глава посвящена оптимизации времени прохождения через область, когда движение объекта описывается нелинейной системой. В параграфе 2.1 приведена постановка задачи.

Пусть $R^n$ - $n$-мерное пространство, $x \in R^n$ и траектория $x(t)$ удовлетворяет системе нелинейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f(x(t),u(t)),$$

где $u(\cdot)$ - управление, т.е. измеримая функция, значения которой выбираются в каждый момент времени из компактного множества $U$ .

Заданы множества $M_0 \subseteq R^n$, $M_1 \subseteq R^n_1$ и многозначное отображение $M(\cdot)$ отрезка $[0,1]$ в множество подмножеств из $R^n$. Требуется выбрать управление $u(\cdot) \in U$ и начальное условие $x(0) \in M_0$ так, чтобы $x(1) \in M_1$, а время, в течение которого выполняется включение $x(t) \in M(t)$, было минимальным. Будем требовать для нелинейной задачи выполнение условий согласованности и регулярности, рассмотренных в параграфе 1.1.

В параграфе 2.2 рассматривается обобщенное правило множителей Лагранжа для нелинейной системы.

В параграфе 2.3 исследуется необходимые условия экстремума поставленной задачи. В качестве вариаций управлений используются игольчатые вариации, построенные Болтянским. При такой вариации управлений множество векторов $\Delta x$, определяемое формулой

$$\Delta x = f(x(\tau),u(\tau))\delta t +$$

$$+ \sum_{i=1}^{s} A_{\tau,\tau_i}[f(x(\tau_i),v_i) - f(x(\tau_i),u(\tau_i))]\delta t_i \ , \quad 0 \le \tau \le 1,$$

заполняет некоторое множество $K_L$, являющееся конусом допустимых направлений. Воспользовавшись результатами, изложенными в параграфе 2.2 доказывается.

*Теорема* 2.2. Если $x^0(\cdot)$ - решение задачи и выполнено условие согласованности и оптимальная траектория регулярна, то существуют такие числа $\lambda_j \ge 0$, $j = 0, \cdots ,m$, не все равные нулю, что

$$\lambda_0 T'(x(\cdot),\Delta x(\cdot)) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi'_{jx}(x^0(1))\Delta x^0(1) \geq 0$$

для всех вариаций $\Delta x^0(\cdot) \in K_L$.

Окончательно получим следующий результат.

*Теорема* 2.3. Если выполнено условие согласованности и оптимальная траектория регулярна, то существуют такие, не все равные нулю числа $\lambda_j \geq 0$, $j = 1,\dots,m$, и функция $\psi(\tau)$, $\tau \in [0,1]$, что выполняются следующие соотношения :

1. $\psi(\tau)f(x^0(\tau),u^0(\tau)) = \min\limits_{v \in U} \psi(\tau)f(x^0(\tau),v)$.

2. $\dot\psi(\tau) = -\left[\dfrac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right]^* \psi(\tau)$. 3. $\psi(1) = \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi'_{jx}(x^0(1))E$.

4. $\psi(t_i + 0) - \psi(t_i - 0) = (-1)^i n(x^0(\cdot),t_i)$ , $i=1,\dots,2m$,

где

$$\phi(\tau) = -\lambda_0 \sum_{i=1}^{m}\left[\sigma(t_{2i},\tau)n(x^0(\cdot),t_{2i}) - \sigma(t_{2i-1},\tau)n(x^0(\cdot),t_{2i-1})\right] +$$

$$+\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi'_{jx}(x^0(1))\sigma(1,\tau)\ ,\ \sigma(t,\tau) = \begin{cases} 0, & \text{если } \tau > t, \\ A_{t,t} = E, & \text{если } \tau = t, \\ A_{t,\tau}, & \text{если } \tau < t. \end{cases}$$

## Основные результаты работы

1. Сформулирована специальная задача оптимального быстродействия, т.е. задача оптимизации времени прохождения через область в предположении выполнения условия согласованности класса управлений и заданной области и условия регулярности. Поставленная задача исследована путем сведениям к задаче математического программирования.

2. Получены необходимые условия экстремума для случая, когда движение объекта описывается линейной системой дифференциальных уравнений. Изучены дифференциальные свойства функций, определяющих критерии.

3. Исследованы всевозможные ситуации выбора начального положения, когда области начальных и конечных состояний динамической системы пересекаются с заданной областью и сформулированы необходимые условия экстремума.

4. Получены необходимые условия экстремума исходной задачи, когда заданная область выпукла.

5. Сформулирована нелинейная постановка исходной задачи. Получены необходимые условия экстремума для случая, когда области начальных и конечных состояний динамической системы не пересекаются с заданной областью.

Основное содержание диссертации изложено в следующих работах.

1. Пшеничный Б.Н., Очилов С. Оптимизация времени прохождения через область // Моделирование и исследование устойчивости процессов: Тез. докл. Укр. конф.-Киев, 1992.-С. 29.

2. Пшеничный Б.Н., Очилов С. Об одной задаче оптимального управления линейной системой // Качественная теория дифференциальных уравнений: Тез. докл. (КТДУ), СНГ YIII - конф. Самарканд, 1992. - С. 89.

3. Пшеничный Б.Н., Очилов С. Оптимизация времени прохождения через область // Кибернетика и системный анализ.-1993. - N 3. - С. 167 - 171.

4. Пшеничный Б.Н., Очилов С. О задаче оптимального прохождения через область // Кибернетика и вычисл. техника. - 1993.- Вып. 99.- С. 3 - 8.

5. Пшеничный Б.Н., Очилов С. Об одной специальной задаче оптимального быстродействия // Там же.-1994.-Вып. 101.- С. 24 - 35.

6. Очилов С. Об одном примере оптимального прохождения объекта через заданную область // Автоматика. - 1993.- N 2. - С. 88 - 90.

7. Очилов С. Об одной специальной задаче оптимального быстродействия // Моделирование и исследование устойчивости процессов: Тез. докл. Укр. конф. - Киев, 1993. - С. 14.

Подп. в печ. I9.II.93. Формат 60х84/I6. Бум. ткп. № 2. Офс.печ.
Усл.печ.л. 0,70. Усл.кр.-отт. 0,82. Уч.-изд.л. 0,70.
Тираж I00 экз. Заказ I583.

Редакционно-издательский отдел с полиграфическим участком
Института кибернетики имени В.М.Глушкова АН Украины
252207 Киев 207, проспект Академика Глушкова, 40