АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

ЯКОВЕЦЬ Василь Павлович

АСИМПТОТИЧНЕ ІНТЕГРУВАННЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМИ

01.01.02 - диференціальні рівняння

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ - 1993

Робота виконана в Інституті математики АН України

Науковий консультант - член-кореспондент АН України, доктор фізико-математичних наук, професор САМОЙЛЕНКО А.М.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор ЖУКОВА Г.С.,

доктор фізико-математичних наук ЛОПАТІН О.К.,

доктор фізико-математичних наук, професор ПЕРЕСТЮК М.О.

Провідна організація - Білоруський державний університет.

Захист дисертації відбудеться "21" грудня 1993 р. о 15 год. на засіданні спеціалізованої ради Д 016.50.02 при Інституті математики АН України за адресою: 252601, Київ 4, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці інституту.

Автореферат розіслано "15" листопада 1993 р.

Вчений секретар спеціалізованої ради ЛУЧКА А.Ю.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Врахування "малих" збурюючих факторів, які часто досить суттєво впливають на перебіг реальних фізичних процесів, приводить до математичних моделей, які описуються диференціальними рівняннями, коефіцієнти яких залежать від малого параметра. Ефективними методами наближеного інтегрування таких рівнянь є асимптотичні методи, які грунтуються на ідеї розвинення шуканого розв'язку в ряд за степенями малого параметра. Ці методи вигідно відрізняються від чисельних тим, що дозволяють знаходити аналітичні вирази для шуканих розв'язків і, отже, дають можливість проводити їх якісний аналіз. Крім того, в процесі чисельного інтегрування диференціальних рівнянь за нульове наближення дуже зручно брати наближені розв'язки, які знаходяться асимптотичними методами. Тому, зародившись ще в першій половині XIX ст. в роботах Штурма, Ліувілля, Пуанкаре, асимптотична теорія інтенсивно розвивалась багатьма математиками і на даний час розроблена велика кількість різноманітних методів асимптотичного аналізу як лінійних, так і нелінійних диференціальних рівнянь, кожний з яких має свої переваги щодо ефективності розв'язування відповідного класу задач. Найбільш поширені з них: метод Ляпунова-Пуанкаре, асимптотичні методи нелінійної механіки М.М. Крилова, М.М. Боголюбова, Ю.О. Митропольського, А.М. Самойленка, методи примежових функцій М.І. Вишика, Л.А. Люстерника та А.М. Тихонова, А.Б. Васильєвої, методи асимптотичного інтегрування лінійних систем С.Ф. Фещенка, М.І. Шкіля, метод регуляризації С.О. Ломова та інші. Однак розвиток науки і техніки ставить нові, все складніші задачі, розв'язання яких вимагає вдосконалення існуючих методів або розробки нових.

Дана дисертаційна робота присвячена подальшому розвитку асимптотичних методів по відношенню до лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з виродженнями, тобто таких систем, у яких при старших похідних, крім малого параметра, знаходиться матриця, яка вироджується з прямуванням малого параметра до нуля. З системами даного типу доводиться мати справу під час розв'язування багатьох практичних задач, а також в процесі теоретичних досліджень. Вони досить часто зустрічаються, наприклад, в теорії електричних кіл, задачах оптимального керування і автоматичного регулювання, економічного прогнозування, в хімічній і біологічній кінетиці. До даного вигляду зводяться також системи диференціальних рівнянь з малим параметром при частині старших похідних та системи, в яких множниками біля похідних є різні степені малого параметра.

Систематичне вивчення сингулярно збурених систем з виродженнями розпочалося порівняно недавно, з початку 80-х років, і на даний час їх дослідженню присвячено відносно небагато робіт /С.Кемпбелла, Р. О'Меллі, С.П. Зубової, В.П. Скрипника, І. І. Старуна, Г.С. Жукової, Г.О. Куриної, К.І. Чернишова та інших/, в яких розглядаються окремі частинні випадки цих систем.

Слід відмітити, що розробка методів асимптотичного аналізу сингулярно збурених систем даного типу пов'язана з серйозними труднощами, обумовленими, по-перше, специфічним характером залежності цих систем від параметра, а, по-друге, - відсутністю достатньо розвинутої загальної теорії вироджених систем, на основі якої можна було б розвивати методи їх асимптотичного інтегрування.

Тому подолання цих труднощів і розробка цілісної теорії асимптотичного інтегрування сингулярно збурених систем з виродженнями є досить важливою і актуальною задачею.

<u>Об'єкт дослідження.</u> Основним об'єктом дослідження є лінійна сингулярно збурена система диференціальних рівнянь виду

$$\varepsilon^{h} B(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + f(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t \alpha(t)\,dt\right), \qquad /1/$$

в якій $x \in \mathbb{C}^n$, $t \in [0;T]$, $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$ - малий параметр, $h \in N$, $\alpha(t)$ - скалярна функція; $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)$ - $(n\times n)$ - матриці, $f(t,\varepsilon)$ - n - вимірний вектор, елементами яких є дійсні або комплекснозначні функції. Передбачається, що виконуються такі умови:

1) матриці $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)$ і вектор $f(t,\varepsilon)$ допускають на даному відрізку $[0;T]$ рівномірні асимптотичні розвинення за степенями параметра ε:

$$A(t,\varepsilon)\sim\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k A_k(t),\quad B(t,\varepsilon)\sim\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k B_k(t),\quad f(t,\varepsilon)\sim\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k f_k(t); \qquad /2/$$

2) коефіцієнти $A_k(t)$, $B_k(t)$, $f_k(t)$ розвинень /2/ і функція $\alpha(t)$ нескінченно диференційовні на $[0;T]$;

3) $\det B_0(t) = 0 \ \forall t \in [0;T]$;

4) кронекерова структура граничного матричного пучка $L(t,\lambda) = A_0(t) - \lambda B_0(t)$ не змінюється із зміною t.

Крім системи /1/, у дисертаційній роботі розглядається вироджена лінійна система без параметра

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \qquad /3/$$

в якій $\det B(t) \equiv 0$, а також сингулярно збурена система диференціальних рівнянь другого порядку з виродженою граничною матрицею при старших похідних, система з двома незалежними малими параметрами та слабо нелінійна система з виродженням.

Мета роботи полягає в наступному:

- дослідити питання про звідність виродженої лінійної системи /3/ до центральної канонічної форми, знайти умови існування в неї загального розв'язку типу Коші та критерії розв'язності початкової задачі і на цій основі розробити теорію асимптотичного інтегрування лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь вигляду /I/ з виродженнями при похідних;
- провести грунтовний асимптотичний аналіз загального розв'язку системи /I/ за умови як регулярності, так і сингулярності граничного пучка матриць, охопивши випадки: неповного і повного виродження, одновимірного і багатовимірного розгалуження, "нерезонансний" і "резонансний", та вказати способи розв'язання конкретних задач /задачі Коші, задачі про періодичні розв'язки/;
- узагальнити розроблену теорію на системи диференціальних рівнянь другого порядку та системи з двома незалежними малими параметрами.

Методи дослідження. У процесі дослідження поставлених задач використовуються методи збурень лінійних операторів, техніка узагальненого обернення матриць, метод діаграм Ньютона та асимптотичні методи Фещенка-Шкіля, регуляризації і примежових функцій.

Наукова новизна. Всі основні результати дисертації є новими. У даній роботі вперше

- знайдені достатні умови звідності виродженої лінійної системи /3/ до центральної канонічної форми, які є більш загальними, ніж відомі раніше; на основі цього досліджено структуру загального розв'язку даної системи і визначені умови розв'язності задачі Коші, введені поняття матриці монодромії і мультиплікаторів виродженої лінійної системи з періодичними коефіцієнтами та функції Гріна задачі про інваріантний тор для відповідної системи з квазіперіодичними коефіцієнтами, знайдені достатні умови існування і єдиності періодичного розв'язку та інваріантного тору при будь-якій достатньо гладкій неоднорідності, виведено формулу, яка задає відповідний інваріантний тор;

- виведені достатні умови існування загального розв'язку типу Коші та умови розв'язності початкової задачі для виродженої лінійної системи диференціальних рівнянь другого порядку;

- встановлено, що однорідна система, яка відповідає /I/, може мати, крім асимптотичних розв'язків класичного вигляду /Д. Біркгофа/, групу розв'язків іншого вигляду, степінь сингулярності яких залежить від структурних особливостей матриці $B(t,\varepsilon)$, детально розроблено алгоритм їх побудови; доведено, що кількість лінійно незалежних асимптотичних розв'язків обох груп повністю узгоджується із структурою точного загального розв'язку даної системи як у випадку неповного / $\det B(t,\varepsilon) \neq 0$ при досить малих $\varepsilon > 0$ /, так і повного / $\det B(t,\varepsilon) \equiv 0$ / її виродження;

- проведено детальний асимптотичний аналіз загального розв'язку однорідної системи у випадку сингулярного пучка граничних матриць;

- для дослідження випадків багатовимірного розгалуження розроблено метод внутрішнього проектування, за допомогою якого багатовимірна задача зводиться до одновимірної в просторі меншого виміру, що дозволило здобути нові результати не тільки для систем з виродженнями, а й для невироджених систем, де ці випадки залишались недослідженими через їх складність і громіздкість;

- показано, що у випадку регулярного пучка граничних матриць за відсутності точок повороту система /I/ є регулярною при досить малих ε /тобто має розв'язок при будь-якій достатньо гладкій неоднорідності/, а у випадку сингулярного пучка граничних матриць може бути як регулярною, так і сингулярною залежно від структури збурюючих операторів, знайдено умови її регулярності;

- детально досліджено питання про побудову частинного асимптотичного розв'язку неоднорідної системи /I/ у випадку її регулярності та знайдені деякі достатні умови існування і вигляд відповідного розв'язку у випадку сингулярності даної системи;

- у рамках розробленої теорії проаналізовано два способи побудови асимптотичного розв'язку задачі Коші для даної системи: методом регуляризації та шляхом безпосереднього використання фундаментальної системи асимптотичних розв'язків;

- користуючись методом збурень та діаграм Ньютона, проведено асимптотичний аналіз загального розв'язку лінійної однорідної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь другого порядку з виродждуваною матрицею при старших похідних у випадках регулярності та сингулярності граничного пучка матриць;

- розроблено метод асимптотичного аналізу сингулярно збурених лінійних систем з двома незалежними параметрами на основі використання просторового аналогу діаграм Ньютона;
- розглянуто питання про побудову асимптотики розв'язку задачі Коші для слабо нелінійноі сингулярно збуреноі системи з неповним виродженням.

Теоретичне і практичне значення. Розроблена в даній дисертаціі теорія асимптотичного інтегрування сингулярно збурених лінійних систем з виродженнями може бути використана для подальшого розвитку основ загальноі теоріі сингулярних збурень, оскільки запропонований підхід дозволяє з єдиних позицій вивчати вироджені і невироджені системи, випадки неповного і повного виродження, системи першого й вищих порядків, системи з одним і багатьма параметрами. Результати дисертаціі можуть бути покладені в основу спецкурсів для студентів і аспірантів з питань асимптотичного аналізу диференціальних рівнянь, іх можна також ефективно використовувати в процесі розв'язування різноманітних практичних задач, зокрема: оптимального керування і автоматичного регулювання, електротехніки і радіотехніки, економічного прогнозування, хімічноі і біологічноі кінетики та інших.

Достовірність результатів. Результати дисертаціі чітко сформульовані у вигляді теорем і лем, основні з яких повністю доведені. Як частинні випадки, із багатьох доведених тверджень випливають результати, відомі раніше. Достовірність здобутих результатів підтверджується також багатьма конкретними прикладами, на яких у дисертаціі ілюструється розроблена теорія.

Апробація роботи. Результати дисертаційних досліджень доповідались і обговорювались на різних наукових конференціях і семінарах, зокрема:

- на всесоюзній конференціі "Нелінійні проблеми диференціальних рівнянь і математичноі фізики" /м. Тернопіль, 1989 р./;
- на всесоюзній конференціі "Асимптотичні методи теоріі сингулярно збурених рівнянь і некоректно поставлених задач" /м. Бішкек, 1991 р./;
- на семінарі "Асимптотичні методи в теоріі диференціальних рівнянь" в Украінському педагогічному університеті ім. М. Драгоманова /керівник - академік АПН Украіни, доктор фіз.-мат. наук, про-

фесор Шкіль М.І., 1990-1992 рр./;

- на семінарі з теорії нелінійних коливань і математичної фізики в Інституті математики АН України /керівник - академік Митропольський Ю.О., 1991 р./;

- на семінарі з теорії сингулярних збурень в Московському енергетичному інституті /керівник - доктор фіз-мат. наук, професор Ломов С.О., 1991 р./;

- на семінарі з теорії диференціальних рівнянь в Інституті математики АН України /керівник - чл.-кор. АН України, доктор фіз.-мат. наук, професор Самойленко А.М., 1991-1993 рр./;

- на засіданні школи-семінару "Алгебраїчні структури і теорія сингулярних збурень" /м. Москва, 1993 р./;

- на конференції "Нелінійні проблеми диференціальних рівнянь і математичної фізики - другі боголюбівські читання" /м. Київ, 1993 р./.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в 23 наукових роботах, список яких наводиться в кінці автореферату. У дисертацію включені тільки ті результати книг [4,11], які належать автору.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається із вступу, чотирьох розділів, які містять 300 сторінок машинописного тексту, та списку літератури із 177 найменувань.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі дається короткий огляд досліджень, присвячених розвитку загальної теорії вироджених лінійних систем та методів асимптотичного інтегрування сингулярно збурених систем з виродженнями, обгрунтовується актуальність теми дисертації, формулюються задачі дослідження та наводиться анотація основних результатів дисертації.

Перший розділ дисертації присвячений питанням загальної теорії вироджених лінійних систем вигляду /3/. Центральним результатом цього розділу є наступна теорема про звідність системи /3/ до центральної канонічної форми /поняття якої вперше було введено американськими математиками С. Кемпбеллом і Л. Петцольдом у 1983 р./:

Теорема 1. Нехай виконуються такі умови: 1/ $A(t), B(t) \in C^{2m}[a;b]$; 2/ $\operatorname{rang} B(t) = n-r = const$; 3/ матриця $B(t)$ має на відрізку

$[a;b]$ повний жорданів набір векторів відносно оператора $L(t) = A(t) - B(t)\frac{d}{dt}$, що складається з r жорданових ланцюжків довжини s_1, s_2, ..., s_r, де $\max s_i = m$. Тоді існують неособливі при всіх $t \in [a;b]$ $(n \times n)$ - матриці $P(t), Q(t) \in C^1[a;b]$ такі, що множенням на $P(t)$ і заміною $x = Q(t)y$ система /3/ зводиться до центральної канонічної форми:

$$\begin{pmatrix} E_{n-s} & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} \frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} M(t) & 0 \\ 0 & E_s \end{pmatrix} y + P(t)f(t), \qquad /4/$$

де $s = s_1 + \dots + s_r$, $J = diag\{J_1, \dots, J_r\}$, J_j - нільпотентні блоки Жордана порядку s_j $/ j = \overline{1,r} /$.

У процесі доведення цієї теореми, яке наводиться в § I, не тільки встановлюється існування перетворюючих матриць $P(t)$, $Q(t)$, а й дається конструктивний спосіб їх побудови. Достатні умови звідності системи /3/ до центральної канонічної форми, які формулюються в теоремі I, є більш загальними, ніж умови, знайдені іншими авторами. Зокрема, частинним випадком умов теореми I є критерій "ранг-степінь" $/ \operatorname{rang} B(t) = \deg |A(t) - \lambda B(t)| = const /$, який використовується в монографії: Бояринцев Ю.Е. и др. Численные методы решения сингулярных систем.- Новосибирск: Наука. Сиб. отд-е, I989, та деякі умови звідності системи /3/ до нормальної форми методом послідовного пониження її порядку, знайдені В.О. Єременком /Еременко В.А. О редукции линейной системы дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производных // Укр. мат. журн. I980.- 32, № 2.- С. I68-I74/.

У § 2 доводиться, що при виконанні умов теореми I система /3/ має загальний розв'язок типу Коші, і встановлюється його структура. Доведено таку теорему.

<u>Теорема 2.</u> Якщо $A(t), B(t) \in C^{3m-2}[a;b]$, $f(t) \in C^{m-1}[a;b]$ і виконуються умови 2/,3/ теореми I, то загальний розв'язок системи /3/ на даному відрізку $[a;b]$ має вигляд

$$x(t) = \mathcal{X}_{n-s}(t)c + \tilde{x}(t),$$

де $\mathcal{X}_{n-s}(t)$ - прямокутна матриця розмірності $n \times (n-s)$, складена з $n-s$ лінійно незалежних розв'язків відповідної однорідної системи

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x, \qquad /5/$$

c - довільний сталий $(n-s)$ - вимірний вектор, $\tilde{x}(t)$ - частинний розв'язок неоднорідної системи.

Показано, що за виконання умов цієї теореми неоднорідна система /3/ є регулярною, і коли відомі фундаментальні матриці $X_{n-s}(t)$, $Y_{n-s}(t)$ відповідно однорідної системи /5/ та спряженої з нею системи

$$\frac{d}{dt}B^*(t)y = -A^*(t)y, \qquad /6/$$

то частинний розв'язок $\tilde{x}(t)$ можна знайти за формулою

$$\tilde{x}(t)=\int_{t_0}^{t} X_{n-s}(t)Y^*_{n-s}(\tau)f(\tau)d\tau - \Phi(t)\sum_{k=0}^{m-1} J^k \frac{d^k}{dt^k}\left[\Psi^*(t)L\Phi(t)\right]^{-1}\Psi^*(t)f(t),$$

де $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ - $(n\times s)$- матриці, складені з векторів, які утворюють жорданові набори матриці $B(t)$ відносно оператора $L(t)$ та матриці $B^*(t)$ відносно оператора $L^*(t)=A^*(t)+\frac{d}{dt}B^*(t)$. Ця формула виводиться методом варіації довільних сталих. При цьому вимагається, щоб матриці $X_{n-s}(t)$, $Y_{n-s}(t)$ були визначені так, щоб виконувалось співвідношення

$$Y^*_{n-s}(t)B(t)X_{n-s}(t)=E_{n-s}, \qquad /7/$$

де E_{n-s} - одинична матриця $(n-s)$ - го порядку /за виконання умов теореми 2 це завжди можливо/.

На основі цих результатів знайдено критерій розв'язності задачі Коші для системи /3/ з початковою умовою

$$x(t_0)=x_0. \qquad /8/$$

А саме, доведено наступне твердження.

<u>Теорема 3.</u> Якщо виконуються умови теореми 2, то для того, щоб задача Коші /3/,/8/ мала розв'язок, необхідно і достатньо, щоб вектор x_0 задовольняв співвідношення

$$\sum_{i=0}^{k-1}\frac{d^i}{dt^i}\left(A(t_0)x_0+f(t_0),\varphi_j^{(k-i)}(t_0)\right)=0,\ k=\overline{1,s_j},\ j=\overline{1,r},$$

де $\varphi_i^{(j)}(t)$, $j=\overline{1,s_i}$, $i=\overline{1,r}$, - вектори, які утворюють жорданів набір матриці $B^*(t)$ відносно оператора $L^*(t)$. Цей розв'язок единий і знаходиться за формулою

$$x(t)=X_{n-s}(t)Y^*_{n-s}(t_0)B(t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}X_{n-s}(t)Y^*_{n-s}(\tau)f(\tau)d\tau -$$

$$- \Phi(t) \sum_{k=0}^{m-1} \gamma^{k} \frac{d^{k}}{dt^{k}} \left[\Psi^{*}(t) L(t) \Phi(t) \right]^{-1} \Psi^{*}(t) f(t)$$

Відмітимо, що з теорем 2,3, як наслідок, випливає теорема про структуру загального розв'язку системи /3/ та критерій розв'язності відповідної задачі Коші, доведені В.Ф. Чистяковим /Чистяков В.Ф. О сингулярных системах обыкновенных дифференциальных уравнений и их интегральных аналогах // Функции Ляпунова и их применения.- Новосибирск: Наука. Сиб. отд-е, 1986.- С. 231-240/.

Аналогічні результати здобуто для системи диференціальних рівнянь другого порядку

$$A(t) \frac{d^{2}x}{dt^{2}} + B(t) \frac{dx}{dt} + C(t) x = f(t) \qquad /9/$$

з виродженою матрицею $A(t)$, що розглядається в § 5. Дослідження цієї системи проводиться шляхом її зведення до еквівалентної системи першого порядку і застосування теореми 1. В результаті доведено такі твердження.

Теорема 4. Нехай $A(t), B(t), C(t) \in C^{3m-2}[a;b]$, $f(t) \in C^{m-1}[a;b]$, $rang\, A(t) = n - r = const$ і матриця $A(t)$ має на відрізку $[a;b]$ повний жорданів набір векторів відносно операторів $L_1(t) = B(t) + 2A(t)\frac{d}{dt}$, $L_2(t) = C(t) + B(t)\frac{d}{dt} + A(t)\frac{d^2}{dt^2}$, який складається з r ланцюжків довжини $s_1, \dots, s_r$, де $\max_i s_i = m$. Тоді загальний розв'язок системи /7/ має вигляд

$$x(t) = X_{2n-s}(t) c + \tilde{x}(t),$$

де $X_{2n-s}(t)$ - прямокутна матриця розмірності $2n \times (2n-s)$, складена з $2n-s$ лінійно незалежних розв'язків відповідної однорідної системи, $s = s_1 + \dots + s_r$, c - довільний сталий $(2n-s)$ - вимірний вектор, $\tilde{x}(t)$ - частинний розв'язок неоднорідної системи.

Теорема 5. Якщо виконуються умови теореми 4, то для того, щоб задача Коші для системи /9/ з початковою умовою $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x_0'$ мала розв'язок, необхідно і достатньо, щоб початкові вектори x_0, x_0' задовольняли співвідношення

$$\sum_{i=0}^{k-2} (i+1) \frac{d^{i}}{dt^{i}} \left(C(t_0) x_0', \psi_j^{(k-2-i)}(t_0) \right) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{k-1} \frac{d^{i}}{dt^{i}} \left(C(t_0) x_0 + B(t_0) x_0' - f(t_0), \psi_j^{(k-i)}(t_0) \right) = 0, \; k = \overline{1, s_j}, \; j = \overline{1, r},$$

де $\varphi_i^{(j)}(t)$, $j=\overline{1,s_i}$, $i=\overline{1,r}$, - вектори, які утворюють жорданів набір матриці $A^*(t)$ відносно операторів $L_1^*(t)=B^*(t)-2\frac{d}{dt}A^*(t)$, $L_2^*(t)=C^*(t)-\frac{d}{dt}B^*(t)+\frac{d^2}{dt^2}A^*(t)$.

Результати, здобуті в §§ 1-2, дозволили також вивчити питання про періодичні розв'язки системи /3/. У § 3 показано, що коли виконуються умови теореми 1 і елементи матриць $A(t)$, $B(t)$ є періодичними функціями з періодом $T>0$, то перетворюючі матриці, за допомогою яких система /3/ зводиться до центральної канонічної форми, можна сконструювати так, щоб вони також були T - періодичними. Виходячи з цього, по аналогії з теорією Флоке-Ляпунова введені поняття матриці монодромії та мультиплікаторів однорідної системи /5/: якщо $\mathcal{X}_{n-s}(t)$, $\mathcal{Y}_{n-s}(t)$ - фундаментальні матриці систем /5/,/6/, що задовольняють умову /7/, то матриця $\mathcal{Y}_{n-s}^*(0)B(0)\mathcal{X}_{n-s}(T)$ називається матрицею монодромії системи /5/ з T - періодичними коефіцієнтами, а її власні значення - мультиплікаторами цієї системи. Доведено, що коли жодний з мультиплікаторів не дорівнює одиниці, то однорідна система /5/ не має періодичного розв'язку, а система /3/ має єдиний T - періодичний розв'язок. Ці результати є досить суттєвим узагальненням робіт В.О. Єременка і Ю.Д. Шлапака, в яких система /3/ досліджувалась методом побудови перетворень, які понижують її порядок.

Нарешті, в § 4 розглядається квазіперіодична система

$$\frac{d\varphi}{dt}=\omega,\quad B(\varphi)\frac{dx}{dt}=A(\varphi)x+f(\varphi) \qquad /10/$$

з тотожно виродженою матрицею $B(\varphi)$, задана на m - вимірному торі $\mathcal{T}_m$. Показано, що ця система може бути зведена до центральної канонічної форми за допомогою квазіперіодичних перетворюючих матриць, якщо при всіх $\varphi\in\mathcal{T}_m$ виконуються умови, аналогічні умовам теореми 1, та кілька додаткових умов, пов'язаних з особливостями даної системи. Виходячи з цього, по аналогії з теорією багаточастотних коливань, розробленою А.М. Самойленком, введено поняття функції Гріна для задачі про інваріантний тор системи /10/, знайдено достатні умови його існування та єдиності при будь-якій достатньо гладкій неоднорідності і виведено формулу, за допомогою якої він визначається.

Результати дослідження виродженої лінійної системи /3/, проведеного в розділі 1, стали тією основою, на якій будується теорія асимптотичного інтегрування лінійних сингулярно збурених систем з виродженнями, оскільки виявилось, що у випадку регулярності та за відсутності точок повороту сингулярно збурена система /I/ при досить малих $\varepsilon > 0$ задовольняє умови теореми I і, отже, має загальний розв'язок типу Коші. Ця теорія викладається в наступних розділах.

У розділі II, який містить §§ 6-I4, система /I/ та відповідна їй однорідна система

$$\varepsilon^h B(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x \qquad /II/$$

розглядаються у випадку, коли граничний пучок матриць $\mathcal{L}(t,\lambda)$ регулярний при всіх $t \in [0;T]$.

Два перші параграфи цього розділу мають допоміжний характер. У першому з них дається постановка задачі, а в другому, виходячи з теореми Вейєрштрасса про канонічну форму регулярного матричного пучка, вивчається структура жорданових наборів векторів цього пучка.

Наступний § 8 присвячений побудові асимптотичних розв'язків однорідної системи /II/. Тут встановлено, що у випадку виродженості граничної матриці $B_0(t)$ асимптотичні розв'язки системи /II/ поділяються на дві групи, одна з яких відповідає "скінченним" елементарним дільникам пучка $\mathcal{L}(t,\lambda)$, а друга - його "нескінченним" елементарним дільникам. Перша група розв'язків будується в "класичному" вигляді

$$x(t,\varepsilon) = u(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t(\lambda_0(t)+\lambda(t,\varepsilon))\,dt\right), \qquad /I2/$$

де $\lambda_0(t)$ - власне значення пучка $\mathcal{L}(t,\lambda)$, а друга - у вигляді

$$x(t,\varepsilon) = v(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \xi^{-1}(t,\varepsilon)\,dt\right). \qquad /I3/$$

При цьому n - вимірні вектор-функції $u(t,\varepsilon)$, $v(t,\varepsilon)$ та скалярні функції $\lambda(t,\varepsilon)$, $\xi(t,\varepsilon)$ зображаються формальними розвиненнями за цілими або дробовими степенями параметра ε, залежно від кратності відповідних елементарних дільників та структурних особливостей збурюючих операторів. Зокрема, доведено такі твердження.

Теорема 6. Нехай пучок матриць $\mathcal{L}(t,\lambda)$ має на відрізку $[0;T]$ $(n-1)$ простих "скінченних" елементарних дільників і один "нескінченний", а також виконується умова

$$\gamma_k(t) \equiv \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \left(P_i^k(G\tilde{B})\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\right) = 0 \text{ при } k < m, \quad \gamma_m(t) \neq 0 \; \forall t \in [0;T], \qquad /14/$$

де символом $(\, , \,)$ позначається скалярний добуток в n - вимірному унітарному просторі $\mathbb{C}^n$, в якому розглядається система /II/, $\tilde{\varphi}(t)$ - власний вектор матриці $B_0(t)$, що відповідає її нульовому власному значенню, $\tilde{\psi}(t)$ - елемент нуль-простору спряженої матриці $B_0^*(t)$, $G(t)$ - напівобернена матриця до матриці $B_0(t)$, а символом $P_i^k(G\tilde{B})$ позначена сума всіх можливих добутків i множників $B_{j_1}, GB_{j_2}, \ldots, GB_{j_i}$ з натуральними індексами, сума яких дорівнює k. Тоді система /II/ має на даному відрізку $n-1$ лінійно незалежних формальних розв'язків вигляду /I2/, що відповідають "скінченним" елементарним дільникам пучка $\mathcal{L}(t,\lambda)$, і один формальний розв'язок вигляду /I3/, що відповідає "нескінченному" елементарному дільнику, де функції $\lambda(t,\varepsilon)$, $\xi(t,\varepsilon)$ та вектор-функції $u(t,\varepsilon)$, $v(t,\varepsilon)$ зображаються формальними розвиненнями

$$\lambda(t,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \lambda_k(t), \quad u(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k u_k(t); \qquad /15/$$

$$\xi(t,\varepsilon) = \nu^m \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k \xi_k(t), \quad v(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k v_k(t), \qquad /16/$$

в яких $\mu = \nu = \varepsilon$.

<u>Теорема 7.</u> Нехай виконуються такі умови:

1/ пучок матриць $\mathcal{L}(t,\lambda)$ має на відрізку $[0;T]$ власне значення $\lambda_0(t)$ кратності $\rho > 1$, якому відповідає $r_1 + \cdots + r_\alpha$ "скінченних" елементарних дільників кратності $\rho_1 > \rho_2 > \ldots > \rho_\alpha$ відповідно;

2/ крім вказаних "скінченних" елементарних дільників, даний пучок матриць має на $[0;T]$ $s_1 + \cdots + s_\tau$ "нескінченних" елементарних дільників кратності $q_1 > q_2 > \ldots > q_\tau$ $/ r_1\rho_1 + \cdots + r_\alpha\rho_\alpha + s_1 q_1 + \cdots + s_\tau q_\tau = n /$;

3/рівняння

$$\det\left(\left\| (\Gamma_1 \varphi_i, \psi_j) \right\|_1^{r_1+\cdots+r_k} - \eta \Lambda_{r_k}\right) = 0, \quad k = \overline{1,\alpha},$$

мають на відрізку $[0;T]$ лише прості відмінні від нуля корені, де $\Gamma_1(t) = A_1(t) - \lambda_0(t)B_1(t) - \delta_{1,h} B_0(t)\frac{d}{dt}$, $\Lambda_{r_k} = diag\{0, E_{r_k}\}$, E_{r_k} - одинична матриця r_k - го порядку, $\varphi_i(t)$, $\psi_j(t)$, $i,j = \overline{1, r_1+\cdots+r_\alpha}$, - власні вектори пучка $\mathcal{L}(t,\lambda)$ та спряженого з ним пучка $\mathcal{L}^*(t,\lambda)$ відповідно;

4/ всі корені рівнянь

$$\det\left(\left\|(B_1\tilde{\varphi}_i,\tilde{\varphi}_j)\right\|_1^{s_1+\dots+s_\kappa}-\theta\Lambda_{s_\kappa}\right)=0,\ \kappa=\overline{1,r},$$

в яких $\Lambda_{s_\kappa}=diag\{0,E_{s_\kappa}\}$, $\tilde{\varphi}_i(t)$, $\tilde{\varphi}_j(t)$, $i,j=\overline{1,s_1+\dots+s_r}$, - базисні вектори нуль-просторів матриць $B_0(t)$ та $B_0^*(t)$ відповідно, також прості і відмінні від нуля на $[0;T]$.

Тоді система /II/ має на даному відрізку $r_1p_1+\dots+r_\alpha p_\alpha$ лінійно незалежних формальних розв'язків вигляду /I2/ і $s_1q_1+\dots+s_rq_r$ розв'язків вигляду /I3/, де відповідні функції $\lambda(t,\varepsilon)$ і вектори $u(t,\varepsilon)$ зображаються формальними розвиненнями /I5/ за степенями $\mu=\varepsilon^{1/p_i}$, $i=\overline{1,\alpha}$, а функції $\xi(t,\varepsilon)$ та вектори $v(t,\varepsilon)$ - формальними розвиненнями /I6/, в яких $\nu=\varepsilon^{1/q_i}$, $i=\overline{1,r}$, $m=1$.

У процесі доведення цих теорем, яке здійснюється шляхом підстановки виразів /I5/,/I6/ у систему /II/ і встановлення розв'язності нескінченних систем алгебраїчних рівнянь, що утворюються внаслідок прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях параметра, виведені всі необхідні розрахункові формули для визначення коефіцієнтів відповідних розвинень. При цьому виявилось, що кожна група розв'язків будується окремо, незалежно одна від одної, а з умови /I4/ та умови 4/ теореми 7 випливає неособливість матриці $B(t,\varepsilon)$ при досить малих $\varepsilon>0$, що й забезпечує існування n лінійно незалежних асимптотичних розв'язків. Якщо умова /I4/ теореми 6 не виконується, тобто $\gamma_\kappa(t)\equiv 0$ при $\kappa=1,2,\dots$, то $\det B(t,\varepsilon)\equiv 0$ і розв'язок другої групи, що відповідає "нескінченному" елементарному дільнику пучка $\mathcal{L}(t,\lambda)$, буде відсутнім. Показано, що в цьому випадку система /II/ при досить малих ε задовольняє критерій "ранг-степінь" і, отже, її загальний розв'язок утворюють $n-1$ лінійно незалежних розв'язків першої групи.

Як наслідок з теореми 7, розглянуто простіші випадки, коли граничний пучок матриць $\mathcal{L}(t,\lambda)$ має групи "скінченних" та "нескінченних" елементарних дільників однакової кратності або ж по одному кратному "скінченному" і "нескінченному" елементарному дільнику. У першому з них для існування n лінійно незалежних асимптотичних розв'язків вигляду /I2/,/I3/ замість умов 3/,4/ вимагається, щоб всі власні значення матриць

$$R(t)=\left\|(\Gamma_1\varphi_i,\psi_j)\right\|_1^r,\quad S(t)=\left\|(B_1\tilde{\varphi}_i,\tilde{\varphi}_j)\right\|_1^s \qquad /I7/$$

були простими і відмінними від нуля на $[0; T]$, де r - кількість "скінченних" елементарних дільників, а s - кількість "нескінченних" елементарних дільників пучка $\mathcal{L}(t,\lambda)$, а в другому ці умови заміняються ще простішими:

$$(\Gamma_1\varphi,\psi)\neq 0,\ (B_1\tilde{\varphi},\tilde{\psi})\neq 0 \quad \forall t\in[0;T]. \qquad /18/$$

При цьому в розвиненнях /I5/,/I6/ необхідно покласти $\mu=\sqrt[p]{\varepsilon}$, $\nu=\sqrt[q]{\varepsilon}$, $m=1$, де p, q - кратності "скінченних" та "нескінченних" елементарних дільників відповідно.

Зазначимо, що розв'язки першої групи для системи /II/ у найбільш простих випадках, коли граничний пучок матриць $\mathcal{L}(t,\lambda)$ має прості "скінченні" елементарні дільники або ж один кратний, були побудовані раніше іншим способом I.I. Старуном, однак наявність розв'язків другої групи, їх вигляд і спосіб побудови були вперше вказані в наших роботах.

Наведені результати повністю вирішують питання про структуру загального асимптотичного розв'язку системи /II/ у випадку простих "скінченних" і "нескінченних" елементарних дільників граничного пучка матриць. Що ж стосується більш складних ситуацій, пов'язаних із кратним спектром пучка $\mathcal{L}(t,\lambda)$, то дані дослідження залишають відкритим питання про структуру розв'язків системи /II/ у тому разі, коли умови доведених теорем /наприклад, /I8//, не виконуються. Це питання вивчається в § 9, де розглядається випадок, коли пучок матриць $\mathcal{L}(t,\lambda)$ має по одному "скінченному" та "нескінченному" елементарному дільнику, а також в § I0, де розглядається більш складний багатовимірний випадок. Для розв'язання даної задачі використовується метод діаграм Ньютона.

Дослідження, проведені в § 9, частково повторюють аналогічні дослідження Г.С. Жукової, виконані в роботі: Жукова Г.С. Асимптотика решений одного класса линейных систем с вырожденной матрицей при производной.- К., I990.- 24 с.- /Препр./АН УССР. Ин-т математики; 90.36/. Однак, на відміну від цієї роботи, тут використовується дещо вдосконалена техніка оперування з формальними рядами, що дозволило спростити викладки і записати формули для коефіцієнтів відповідних рівнянь розгалуження в більш компактній формі. Це дало можливість провести більш детальний аналіз коефіцієнтів рівнянь розгалуження і, зокрема, дослідити характер їх залежності від шуканих функцій $\lambda(t,\varepsilon)$ та $\xi(t,\varepsilon)$. Серед основних результатів

§ 9 виділимо наступні твердження.

Теорема 8. Нехай пучок матриць $\mathcal{L}(t,\lambda)$ має власне значення $\lambda_0(t)$ кратності p і йому відповідає "скінченний" елементарний дільник такої ж кратності. Тоді для того, щоб система /II/ мала формальний розв'язок вигляду /I2/, необхідно і достатньо, щоб функція $\lambda(t,\varepsilon)$ задовольняла рівняння

$$\lambda^p+\sum_{k=p+1}^{\infty}L_{k0}[\lambda^k]+\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s L_{0s}+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s L_{ks}[\lambda^k]=0, \qquad /19/$$

коефіцієнти якого $L_{ks}[\lambda^k]$ визначаються за формулами

$$L_{ks}[\lambda^k]=\sum_{i=0}^{\left[\frac{s}{h}\right]}\sum_{j=0}^{s-ih}(-1)^i\mathcal{D}^i[\lambda^k]\left(P^{s-hi}_{i+k,j}(HB;H\Gamma)\varphi,\psi\right),\ k+s\geq 1. \qquad /20/$$

Вираз $HP^k_{i,j}(HB;H\Gamma)$ - це сума всіх можливих добутків i множників виду HB_{r_1}, HB_{r_2}, ... , HB_{r_i} та j множників виду $H\Gamma_{s_1}$, $H\Gamma_{s_2}$, ... , $H\Gamma_{s_j}$, сума індексів яких $r_1+\dots+r_i+s_1+\dots+s_j=k$, де $H(t)$ - напівобернена матриця до матриці $A_0(t)-\lambda_0(t)B_0(t)$, $\Gamma_s=A_s-\lambda_0 B_s-B_{s-h}\frac{d}{dt}$, $s=1,2,\ldots$. Символом $\mathcal{D}^i[\lambda^k]$ позначається диференціальний вираз, що являє собою суму всіх можливих "добутків" i "множників" d/dt та k множників λ, останнім з яких є λ.

Теорема 9. Якщо пучок матриць $\mathcal{L}(t,\lambda)$ має один "нескінченний" елементарний дільник кратності q, то для того, щоб система /II/ мала формальний розв'язок вигляду /I3/, необхідно і достатньо, щоб функція $\xi(t,\varepsilon)$ задовольняла рівняння

$$\xi^q+\sum_{k=q+1}^{\infty}\xi^k M_{k0}+\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s M_{0s}+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s M_{ks}[\xi^k]=0, \qquad /21/$$

коефіцієнти якого визначаються за формулами

$$M_{ks}[\xi^k]=\sum_{j=0}^{\min\left(k-2,\left[\frac{s}{h}\right]\right)}\sum_{i=0}^{s-hj}(-1)^{i+j}\xi^2\tilde{\mathcal{D}}^j(\xi^{k-2})\left(P^{s-hj}_{k-j,i}(GK;G\tilde{B})\tilde{\varphi},\tilde{\psi}\right), \qquad /22/$$

$$k+s\geq 1.$$

Вираз $\tilde{\mathcal{D}}^j(\xi^{k-2})$ у формулах /22/ являє собою суму всіх можливих "добутків" j "множників" $\frac{d}{dt}\xi$ і $k-2-j$ множників ξ

Кожний оператор диференціювання $\frac{d}{dt}$ в цих "добутках" діє на весь вираз, що знаходиться праворуч від нього. Вираз $P_{i,j}^{\kappa}(GK, G\tilde{B})$ складається аналогічно $P_{i,j}^{\kappa}(HB; H\Gamma)$ з тією різницею, що в ньому замість операторів Γ_s фігурують оператори $K_s = A_s - B_{s-h}\frac{d}{dt}$, $s = 0, 1, \ldots$, а G - напівобернена матриця до матриці B_0.

Застосування методу діаграм Ньютона до рівнянь розгалуження /19/,/21/ дозволяє за відсутності точок повороту встановлювати структуру асимптотичних розв'язків системи /11/ у будь-якому випадку, пов'язаному з поведінкою матриць $A_i(t)$, $B_i(t)$, $i \geq 1$. Побудова відповідних діаграм дає можливість знаходити послідовності степенів малого параметра, за якими слід вести відповідні розвинення для функцій $\lambda(t,\varepsilon)$, $\xi(t,\varepsilon)$ та вектор-функцій $u(t,\varepsilon)$, $v(t,\varepsilon)$. Користуючись цим методом, у дисертації розглянуто ситуації, коли не виконуються умови /18/, і проаналізовано конкретний приклад.

У даному розумінні формули /20/,/22/ містять повну інформацію про структуру асимптотичних розв'язків системи /11/ в одновимірному випадку. Аналіз цих формул, зокрема, показує, що кількість розв'язків першої групи завжди співпадає з кратністю p "скінченного" елементарного дільника, а кількість розв'язків другої групи дорівнює $q-\kappa$, де κ - довжина жорданового ланцюжка матриці $B(t,\varepsilon)$ відносно оператора $\xi\,(A(t,\varepsilon) - \varepsilon^h B(t,\varepsilon)\frac{d}{dt})$, в якому ξ - довільний скалярний множник. Отже, всього за розробленим алгоритмом можна побудувати $n-\kappa$ лінійно незалежних формальних розв'язків системи /11/. Цей факт був вперше встановлений Г.С. Жуковою. Однак питання про те, чи узгоджується ця кількість формальних розв'язків із структурою точного загального розв'язку системи /11/, залишалось відкритим. Результати досліджень виродженої лінійної системи, проведених у першому розділі, дозволили дати позитивну відповідь на це питання.

Багатовимірний випадок, коли граничний пучок матриць $\mathcal{L}(t,\lambda)$ має кілька "скінченних" та "нескінченних" елементарних дільників, який розглядається в § 10, є надзвичайно складним і до цього часу детально не досліджувався. Складність його обумовлена тим, що тут доводиться мати справу не з одним рівнянням розгалуження, яке саме собою є досить складним нелінійним диференціальним рівнянням нескінченного порядку, а з системою таких рівнянь. Для дослідкення цього випадку у даному параграфі пропонується спеціальний метод, названий нами методом внутрішнього проектування. Використовуючи спеціальні оператори проектування, які проектують n - вимірний векторний простір, де розглядається дана задача, в підпростір меншого виміру, що є лінійною оболонкою власних векторів пучка $\mathcal{L}(t,\lambda)$ /або симетричного йому пучка під час дослідження розв'язків другої групи/, багатовимірна задача зводиться до нової задачі в просторі меншого виміру. Якщо ця задача виявиться одновимірною, то для її дослідження можна застосувати методи § 9. Якщо ж і вона багатовимірна, то метод внутрішнього проектування використовується ще раз, і так далі. При цьому за відсутності точок повороту на якомусь скінченному кроці обов'язково прийдемо до одновимірної задачі.

За допомогою цього методу детально проаналізовано ситуацію, коли граничний пучок матриць $\mathcal{L}(t,\lambda)$ має групи "скінченних" та "нескінченних" елементарних дільників однакової кратності і не виконуються умови, що стосуються власних значень матриць /I7/. Зокрема, доведено такі теореми.

<u>Теорема I0.</u> Якщо пучок матриць $\mathcal{L}(t,\lambda)$ має на відрізку $[0;T]$ r "скінченних" елементарних дільників $(\lambda-\lambda_0(t))^p$ однакової кратності $p>1$, $(r\times r)$ - матриця $R(t)$ має відмінне від нуля власне значення $\eta_0(t)$ кратності $r_1\le r$, якому відповідає елементарний дільник такої ж кратності, і виконується умова

$$\lambda_1^{p+1}\left(\left\|\left(B_0(HB_0)^p\varphi_j,\psi_i\right)\right\|_1^r g,\tilde{g}\right)+\lambda_1\left(\left\|\left(\left(B_1-B_0H\Gamma_1-\Gamma_1HB_0\right)\varphi_j,\psi_i\right)\right\|_1^r g,\tilde{g}\right)+$$

$$+2\lambda_1\delta_{1,k}\delta_{2,p}(g',\tilde{g})+\lambda_1'\delta_{1,k}\delta_{2,p}\delta_{1,r_1}\ne 0\ \ \forall\ t\in[0;T],$$

де $\lambda_1(t)=\sqrt[p]{\eta_0(t)}$, $g(t)$ - власний вектор матриці $R(t)$, що відповідає її власному значенню $\eta_0(t)$, $\tilde{g}(t)$ - відповідний власний вектор спряженої матриці, то система /II/ має на даному відрізку $r_1 p$ формальних розв'язків вигляду /I2/, де функція $\lambda(t,\varepsilon)$ і вектор $u(t,\varepsilon)$ зображаються формальними розвиненнями

$$\lambda=\mu\left(\lambda_1(t)+\sum_{i=1}^{\infty}\mu^{\frac{i}{r_1}}\eta_i(t)\right),\quad u(t,\varepsilon)=g(t)+\sum_{i=1}^{\infty}\mu^{\frac{i}{r_1}}u_i(t),$$

в яких $\mu=\sqrt[p]{\varepsilon}$.

<u>Теорема II.</u> Нехай пучок матриць $\mathcal{L}(t,\lambda)$ має на відрізку $[0;T]$ r "скінченних" елементарних дільників $(\lambda-\lambda_0(t))^p$ однакової

кратності $\rho > 1$ і матриця $R(t)$ має нульове власне значення кратності $1 < r_1 \le r$, якому відповідає елементарний дільник такої ж кратності. Нехай, крім того, виконуються умови:

$$\Big(\Big\|\big((\Gamma_1 H \Gamma_1 - \Gamma_2)\varphi_j, \psi_i\big)\Big\|_1^r \bar{g}, \tilde{g}\Big) + \delta_{1,k}\Big(\Big\|(B_1\varphi_j, \psi_i)\Big\|_1^r \bar{g}, \tilde{g}\Big) + \delta_{1,k}\delta_{2,\rho}\big[(g'', \tilde{g}) + 2(g', \tilde{g})\big] +$$

$$+ \delta_{1,k}\Big(\Big\|\big((B_0 H B_0' + B_0 H' B_0 - (A_1 - \lambda_0 B_1) H B_0 - B_0 H (A_1 - \lambda_0 B_1))\varphi_j, \psi_i\big)\Big\|_1^r \bar{g}, \tilde{g}\Big) \neq 0;$$

$$\Big(\Big\|\big((B_1 - B_0 H \Gamma_1 - \Gamma_1 H B_0)\varphi_j, \psi_i\big)\Big\|_1^r \bar{g}, \tilde{g}\Big) + 2\delta_{1,k}\delta_{2,\rho}(g', \tilde{g}) \neq 0 \ \forall t \in [0;T].$$

Тоді система /II/ має на даному відрізку $r_1\rho - 1$ формальних розв'язків вигляду /I2/, де функція $\lambda(t,\varepsilon)$ і вектор $u(t,\varepsilon)$ зображаються формальними розвиненнями

$$\lambda(t,\varepsilon) = \mu \sum_{i=1}^{\infty} \mu^{\frac{i}{r_1\rho-1}} \lambda_i(t), \quad u(t,\varepsilon) = g(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^{\frac{i}{r_1\rho-1}} u_i(t),$$

і один розв'язок такого ж вигляду, де $\lambda(t,\varepsilon)$, $u(t,\varepsilon)$ зображаються у вигляді розвинень за цілими степенями μ :

$$\lambda(t,\varepsilon) = \mu^{\rho-1} \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i \lambda_i(t), \quad u(t,\varepsilon) = g(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i u_i(t).$$

При цьому $\mu = \sqrt[\rho]{\varepsilon}$.

Наведені результати є новими не тільки для систем з виродженнями, а й для невироджених систем, коли $\det B_0(t) \neq 0 \ \forall t \in [0;T]$ /розроблена в даному розділі теорія асимптотичного інтегрування систем виду /II/ за умови регулярності граничного пучка матриць $\mathcal{L}(t,\lambda)$ поширюється й на невироджені системи: у цьому випадку будуть відсутні "нескінченні" елементарні дільники і всі розв'язки будуватимуться в "класичному" вигляді /I2//.

Аналогічні дослідження проведені також у тому випадку, коли кратне або нульове власне значення має матриця $S(t)$. Методи, які застосовуються в даній роботі, дозволяють досліджувати й більш складні ситуації, пов'язані з спектром матриць /I7/.

Показано, що, як і в одновимірному випадку, структура лінійно незалежних формальних розв'язків, що будуються за розробленим алгоритмом, повністю узгоджується із структурою точного загального розв'язку даної системи у відповідності з теорією розділу I.

У § II досліджується питання про побудову частинного розв'яку системи /I/. При цьому розглядаються два випадки: "нерезонансний", коли функція $\alpha(t)$ не дорівнює жодному з власних значень матричного пучка $\mathcal{L}(t,\lambda)$, і "резонансний", коли $\alpha(t)$ тотожно дорівнює одному з цих власних значень. Основним результатом проведених досліджень є встановлення того факту, що у випадку регулярності граничного пучка матриць $\mathcal{L}(t,\lambda)$ та відсутності точок повороту система /I/ регулярна при досить малих ε і має розв'язок при будь-якій достатньо гладкій неоднорідності. Цей розв'язок будується у вигляді

$$x(t,\varepsilon)=\varepsilon^{-m}\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k}x_{k}(t)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_{0}^{t}\alpha(\tau)d\tau\right), \qquad /23/$$

де m - ціле невід'ємне число, яке в "нерезонансному" випадку дорівнює нулю, а в "резонансному" визначається структурними особливостями системи. Проведено детальний аналіз залежності числа m від властивостей коефіцієнтів системи як в одновимірному, так і в багатовимірному випадках і розроблено алгоритм для визначення векторів $x_{k}(t)$.

У § I2 доводиться, що формальні розв'язки систем /I/,/II/, які будуються згідно з розвинутою теорією, є рівномірними асимптотичними розвиненнями відповідних точних розв'язків, а в окремих випадках збігаються до них.

Нарешті, в двох останніх параграфах даного розділу показано, що, користуючись результатами проведеного асимптотичного аналізу загального розв'язку системи /I/, можна ефективно розв'язувати різні конкретні задачі. Зокрема, в § I3 пропонуються два способи побудови асимптотики розв'язку задачі Коші: методом регуляризації та шляхом безпосереднього використання асимптотичних розвинень для фундаментальної системи розв'язків, а в § I4 досліджується питання про існування та асимптотику періодичного розв'язку системи /I/. Коротко аналізується також питання про існування інваріантного тору даної системи та побудову його асимптотики.

Р о з д і л III, який складається з §§ I5-I9, присвячений дослідженню асимптотики загального розв'язку системи /I/ у випадку, коли граничний пучок матриць $\mathcal{L}(t,\lambda)$ сингулярний при всіх $t\in[0;T]$, тобто $\det\mathcal{L}(t,\lambda)\equiv 0 \ \forall t\in[0;T],\ \lambda\in\mathbb{C}$. Цей випадок іншими авторами не досліджувався і в даній роботі розглядається вперше.

Параграфи I5,I6 мають допоміжний характер. У першому з них дається постановка задачі, а в § 16, виходячи з теорії Кронекера про канонічну форму сингулярного матричного пучка, досліджується структура його жорданових наборів. Тут, зокрема, показано, що кожному мінімальному індексу p для стовпців сингулярного пучка $\mathcal{L}(t,\lambda)$ відповідає циклічний жорданів ланцюжок довжини $p+1$, який складається з власного вектора $\varphi(t,\lambda)$ та p приєднаних векторів $\varphi_k(t,\lambda)$, $k=\overline{2,p+1}$, що залежать від λ і визначаються за формулами

$$\varphi(t,\lambda)=\sum_{i=0}^{p}\lambda^i\tilde{\varphi}_{p+1-i}(t),\quad \varphi_k(t,\lambda)=\frac{1}{(k-1)!}\,\frac{\partial^{k-1}\varphi(t,\lambda)}{\partial\lambda^{k-1}},\ k=\overline{2,p+1},$$

де вектори $\tilde{\varphi}_i(t)$, $i=\overline{1,p+1}$, утворюють циклічний жорданів ланцюжок матриці $B_0(t)$ відносно $A_0(t)$. Встановлено також, що коли пучок $\mathcal{L}(t,\lambda)$ має мінімальний індекс q для рядків, то аналогічний жорданів ланцюжок довжини $q+1$ має пучок $\mathcal{L}^*(t,\lambda)$, спряжений з $\mathcal{L}(t,\lambda)$:

$$\psi(t,\lambda)=\sum_{i=0}^{q}\bar{\lambda}^i\tilde{\psi}_{q+1-i}(t),\quad \psi_k(t,\lambda)=\frac{1}{(k-1)!}\,\frac{\partial^{k-1}\psi(t,\lambda)}{\partial\bar{\lambda}^{k}},\ k=\overline{2,q+1},$$

де вектори $\tilde{\psi}_i(t)$, $i=\overline{1,q+1}$, утворюють циклічний жорданів ланцюжок матриці $B_0^*(t)$ відносно $A_0^*(t)$. Циклічність даних жорданових ланцюжків означає, що вони не обриваються на останньому векторі, а циклічно повторюються. Цей результат досить суттєво використовується в процесі асимптотичного аналізу системи /1/, який здійснюється в наступних параграфах.

В § 17 детально досліджується однорідна система /11/ в одновимірному випадку, коли пучок матриць $\mathcal{L}(t,\lambda)$ має по одному мінімальному індексу для стовпців та рядків і не має регулярного "ядра". При цьому, як основний засіб дослідження, використовується метод діаграм Ньютона. Як і у випадку регулярного пучка $\mathcal{L}(t,\lambda)$, розв'язки системи /11/ шукаються у вигляді /12/,/13/. Однак, якщо в регулярному випадку зарані відомо, що головним членом відповідного розкладу для функції $\lambda_0(t)+\lambda(t,\varepsilon)$ є власне значення $\lambda_0(t)$ матричного пучка $\mathcal{L}(t,\lambda)$, то в даному випадку функція $\lambda_0(t)$ невідома і, як і інші члени відповідного ряду, підлягає визначенню, що значно ускладнює побудову розв'язків.

Ця обставина, а також циклічність жорданових ланцюжків пучка $\mathcal{L}(t,\lambda)$ призводить до того, що відповідне рівняння розгалуження, з якого визначається функція $\lambda(t,\varepsilon)$, набуває дещо іншого вигляду порівняно з /19/:

$$\sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s L_{0s} + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s L_{\kappa s}[\lambda^\kappa] = 0, \qquad /24/$$

а його коефіцієнти

$$L_{\kappa s}[\lambda^\kappa] = \sum_{i=0}^{\left[\frac{s}{h}\right]} \sum_{j=0}^{s-hi} (-1)^i \mathcal{D}^i[\lambda^\kappa] \left(P_{i+\kappa,j}^{s-hi}(HB, H\Gamma)\varphi(\lambda_0), \psi(\lambda_0)\right)$$

залежать від шуканої функції λ_0, бо від неї залежать власні вектори φ, ψ пучків $\mathcal{L}(t,\lambda)$, $\mathcal{L}^*(t,\lambda)$, напівобернена матриця H до матриці $\mathcal{L}(t,\lambda_0)$ та оператори Γ_κ / $\kappa \geq 1$ /. Аналогічного вигляду набуває й рівняння розгалуження, що відповідає розв'язкам другої групи:

$$\sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s M_{0s} + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s M_{\kappa s}[\xi^\kappa] = 0, \qquad /25/$$

але для його коефіцієнтів залишаються в силі формули /22/.

Ретельне дослідження характеру залежності коефіцієнтів $L_{\kappa s}$ від λ_0, проведене в дисертації, показало, що вони виражаються через L_{0s} за формулою

$$L_{\kappa s}[\lambda^\kappa] = \sum_{i=0}^{\left[\frac{s}{h}\right]} \frac{1}{(\kappa+i)!} \frac{\partial^{\kappa+i} L_{0,s-hi}}{\partial \lambda_0^{\kappa+i}} \mathcal{D}^i[\lambda^\kappa],$$

а коефіцієнти $L_{0s}(\lambda_0)$ в свою чергу пов'язані певною залежністю з коефіцієнтами $M_{\kappa s}$ другого рівняння розгалуження. Зокрема, $L_{01}(\lambda_0)$ є многочленом відносно λ_0, степінь якого не перевищує n, а коефіцієнти співпадають з $-M_{\kappa 1}$:

$$L_{01}(\lambda_0) = -\sum_{\kappa=0}^{n} \lambda_0^{n-\kappa} M_{\kappa 1}.$$

З рівняння $L_{01}(\lambda_0) = 0$ і визначаються шукані функції $\lambda_0(t)$. Якщо ж виявиться, що $L_{01}(\lambda_0) \equiv 0$, то аналогічною властивістю володіє коефіцієнт L_{02} і функції $\lambda_0(t)$ визначаються з рівняння $L_{02}(\lambda_0) = 0$, і так далі.

Ці результати в поєднанні з методом діаграм Ньютона дозволили довести наступні твердження щодо структури асимптотичних розв'язків системи /11/.

<u>Теорема 12.</u> Якщо рівняння $L_{01}(\lambda_0) = 0$ має на відрізку $[0;T]$ корінь $\lambda_0(t)$ кратності r, для якого виконується умова

$$L_{02}(\lambda_0) = \left(\left(\Gamma_1 H \Gamma_1 - \Gamma_2\right)\varphi(\lambda_0), \psi(\lambda_0)\right) \neq 0 \ \forall\, t \in [0;T],$$

то система /II/ має на даному відрізку r формальних розв'язків вигляду /I2/, де функція $\lambda(t,\varepsilon)$ і вектор $u(t,\varepsilon)$ зображаються розвиненнями /I5/ за степенями $\mu = \varepsilon^{1/r}$.

Теорема I3. Якщо

$$M_{i1}(t) \equiv 0 \quad \text{при } i < s, \; M_{s1}(t) \neq 0 \; \forall t \in [0;T], \qquad /26/$$

$$M_{o2}(t) = ((B_1 G B_1 - B_2)\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}) \neq 0 \; \forall t \in [0;T], \qquad /27/$$

то система /II/ має на відрізку $[0;T]$ s формальних розв'язків вигляду /I3/, де функція $\xi(t,\varepsilon)$ і вектор $v(t,\varepsilon)$ зображаються розвиненнями /I6/, в яких $\nu = \varepsilon^{1/s}$, $m=1$.

Якщо $M_{o1} = (B_1\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}) \neq 0$, то степінь многочлена $L_{o1}(\lambda_o)$ дорівнює n і, якщо всі його корені задовольняють умови теореми I2, то система /II/ матиме n розв'язків першої групи. Якщо ж виконується умова /26/, то степінь многочлена $L_{o1}(\lambda_o)$ дорівнює $n-s$ і тоді можна побудувати лише $n-s$ розв'язків першої групи. Як випливає з теореми I3, ці розв'язки доповнюються до фундаментальної системи s розв'язками другої групи за виконання умови /27/, яка забезпечує неособливість матриці $B(t,\varepsilon)$ при досить малих $\varepsilon > 0$.

Найбільш загальним з доведених тверджень є наступна

Теорема I4. Нехай $L_{os}(\lambda_o) \equiv 0$ при $s < s_o$, корені рівняння $L_{os_o}(\lambda_o) = 0$ мають постійну кратність на відрізку $[0;T]$ і відповідні діаграми Ньютона для рівнянь розгалуження /24/,/25/ залишаються незмінними при всіх $t \in [0;T]$. Тоді система /II/ має $n-k$ лінійно незалежних формальних розв'язків, де k - довжина жорданового ланцюжка матриці $B(t,\varepsilon)$ відносно оператора $\xi(A - \varepsilon^h B \frac{d}{dt})$. При цьому кількість розв'язків першої групи співпадає з кількістю коренів рівняння $L_{os_o}(\lambda_o) = 0$, рахуючи їх кратність, а решта є розв'язками другої групи.

Таким чином, на відміну від регулярного випадку, у випадку сингулярного пучка граничних матриць розв'язки першої та другої груп взаємопов'язані. Дослідження, проведені в § I7, виявили, що відмінність від нуля хоча б одного з коефіцієнтів M_{os} забезпечує невиродженість системи при досить малих $\varepsilon > 0$ і, отже, існування в неї n лінійно незалежних розв'язків, частина з яких належить до першої групи, а частина - до другої, причому в даному випадку немає такого чіткого розподілу їх кількості, як у випадку регулярності матричного пучка $\mathcal{L}(t,\lambda)$. Відмінність же від нуля хоча б одного з коефіцієнтів L_{os} забезпечує регулярність даної системи при досить малих $\varepsilon > 0$ і існування в неї загального розв'язку типу Коші. У цьому випадку кількість лінійно незалежних асимптотичних розв'язків першої та другої груп, що будуються розробленим методом, також узгоджується зі структурою точного загального розв'язку, яка визначається теоремою 2.

Нарешті, коли всі коефіцієнти $L_{0s} \equiv 0$, то виявляється, що і всі $L_{ks} \equiv 0$ та $M_{ks} \equiv 0$ і на координатних площинах, які відповідають рівнянням розгалуження /24/,/25/, де зображаються відповідні діаграми Ньютона, не буде жодної точки. Показано, що в цьому випадку система /II/ стає сингулярною і має один розв'язок, який залежить від довільної функції. Асимптотика цього розв'язку будується у вигляді регулярного розкладу за цілими степенями ε.

Аналогічні дослідження проведені і в багатовимірному випадку, коли пучок матриць $\mathcal{L}(t,\lambda)$ має кілька мінімальних індексів для стовпців та рядків і не має регулярного "ядра". Під час дослідження цього випадку, який розглядається в § 18, використовується метод внутрішнього проектування, розроблений в § 10.

Якщо в одновимірному випадку, при побудові розв'язків першої групи функція $\lambda_0(t)$ знаходиться з рівнянь $L_{0s}(\lambda_0) = 0$, то в багатовимірному випадку вона визначається як власне значення поліноміальних матричних пучків $\mathcal{R}_s(t,\lambda_0) = \|(L_{0s}(\lambda_0)\varphi_j(\lambda_0), \psi_i(\lambda_0))\|_1^r$ де r - кількість мінімальних індексів для стовпців та рядків пучка $\mathcal{L}(t,\lambda)$, $\varphi_i(\lambda)$, $\psi_j(\lambda)$, $i,j = \overline{1,r}$, - власні вектори пучків $\mathcal{L}(t,\lambda)$, $\mathcal{L}^*(t,\lambda)$ відповідно. Зокрема, доведено таке твердження.

<u>Теорема 15.</u> Нехай поліноміальний пучок матриць

$$\mathcal{R}_1(t,\lambda_0) = \lambda_0 \|(B_1\varphi_j(\lambda_0), \psi_i(\lambda_0))\|_1^r - \|(A_1\varphi_j(\lambda_0), \psi_i(\lambda_0))\|_1^r$$

регулярний на відрізку $[0;T]$ і має власне значення $\lambda_0(t)$ кратності ℓ, якому відповідає один жорданів ланцюжок векторів довжини ℓ. Тоді, якщо виконується умова

$$\delta_{1,h}\Big(\Big\|\Big(\big((A_1 - \lambda_0 B_1)H(\lambda_0)B_0 + B_0 H(\lambda_0)(A_1 - \lambda_0 B_1) - B_1\big)\varphi_j(\lambda_0), \psi_i(\lambda_0)\Big)\Big\|_1^r g, \tilde{g}\Big) +$$

$$+\Big(\Big\|\Big(\big(\Gamma_2 - \Gamma_1 H(\lambda_0)\Gamma_1\big)\varphi_j(\lambda_0), \psi_i(\lambda_0)\Big)\Big\|_1^r g, \tilde{g}\Big) \neq 0 \ \forall t \in [0;T],$$

де $g(t)$, $\tilde{g}(t)$ - відповідні власні вектори пучка $\mathcal{R}_1(t,\lambda_0)$ та спряженого з ним пучка $\mathcal{R}_1^*(t,\lambda_0)$, то система /II/ має на даному відрізку ℓ лінійно незалежних формальних розв'язків вигляду /12/, де функція $\lambda(t,\varepsilon)$ і вектор $u(t,\varepsilon)$ зображаються формальними розвиненнями /15/, в яких $\mu = \varepsilon^{1/l}$.

Якщо степінь многочлена $\det \mathcal{R}_1(t,\lambda_0)$ дорівнює n і кожне з власних значень $\lambda_0(t)$ поліноміального пучка $\mathcal{R}_1(t,\lambda_0)$ задовольняє умови теореми 15, то система /11/ буде невиродженою при досить малих $\varepsilon > 0$ і дана теорема дозволяє побудувати її n лінійно незалежних розв'язків. Якщо ж степінь многочлена $\det \mathcal{R}_1(t,\lambda_0)$ менший, ніж n, і дорівнює $n-s$, то теорема 15 дозволяє побудувати лише $n-s$ розв'язків. У дисертації показано, що в цьому випадку поліноміальний пучок матриць $\widetilde{\mathcal{R}}_1(t,\lambda)$, симетричний пучку $\mathcal{R}_1(t,\lambda_0)$, має нульове власне значення кратності s і за умови неповного виродження системи /11/ можна побудувати s розв'язків другої групи. Доведена наступна

Теорема 16. Нехай поліноміальний пучок матриць $\widetilde{\mathcal{R}}_1(t,\lambda)$, симетричний пучку $\mathcal{R}_1(t,\lambda_0)$, має на відрізку $[0;T]$ нульове власне значення кратності s, якому відповідає один жорданів ланцюжок векторів довжини s, і виконується умова

$$\left(\left\|\left((B_1 G B_1 - B_2)\widetilde{\varphi}_j, \widetilde{\varphi}_i\right)\right\|_1^r \varkappa, \widetilde{\varkappa}\right) \neq 0 \ \forall\, t \in [0;T], \qquad /28/$$

де $\varkappa(t)$, $\widetilde{\varkappa}(t)$ - власні вектори пучків $\widetilde{\mathcal{R}}_1(t,\lambda)$, $\widetilde{\mathcal{R}}_1^*(t,\lambda)$ відповідно, які відповідають їх нульовому власному значенню. Тоді система /11/ має на даному відрізку s формальних розв'язків вигляду /13/, де функція $\xi(t,\varepsilon)$ і вектор $v(t,\varepsilon)$ зображаються формальними розвиненнями /16/, в яких $\nu = \varepsilon^{1/s}$, $m = 1$.

Проаналізована також ситуація, коли умова /28/ /яка забезпечує неособливість матриці $B(t,\varepsilon)$ при досить малих $\varepsilon > 0$ / не виконується. При цьому знайдено інші умови неповного виродження системи /11/ та умови її регулярності у випадку повного виродження. Зокрема, встановлено, що дана система буде регулярною при досить малих $\varepsilon > 0$, якщо регулярним буде поліноміальний пучок матриць $\mathcal{R}_1(t,\lambda)$, і вказано шляхи подальших досліджень у випадку його сингулярності. Показано, що коли $\mathcal{R}_1(t,\lambda_0) \equiv 0$, то структура асимптотичних розв'язків системи /11/ визначається властивостями поліноміального пучка $\mathcal{R}_2(t,\lambda_0)$, і так далі. Якщо ж усі $\mathcal{R}_s(t,\lambda_0) \equiv 0$, то система стає сингулярною, а її загальний розв'язок містить r довільних функцій. Як і в одновимірному випадку, він будується у вигляді регулярного розвинення за цілими степенями ε.

Коротко аналізується також найбільш складний загальний випадок, коли сингулярний пучок матриць $\mathcal{L}(t,\lambda)$, крім кількох мінімальних індексів, має ще й регулярне "ядро", в яке входять "скінченні" та "нескінченні" елементарні дільники як однакової, так і різної кратності. У цьому випадку доведено таку теорему.

Теорема I7. Нехай виконуються умови:

1) пучок матриць $\mathcal{L}(t,\lambda)$ має на відрізку $[0;T]$ мінімальні індекси p_1 , ... , p_r для стовпців та q_1 , ... , q_r - для рядків, а його регулярне "ядро" містить m_i "скінченних" елементарних дільників $(\lambda-\omega_0(t))^{r_i}$ кратності r_i $/i=\overline{1,\alpha}/$ і n_j "нескінченних" елементарних дільників кратності s_j $/j=\overline{1,\gamma}/$;

2) кратності "скінченних" та "нескінченних" елементарних дільників занумеровані так, що $r_1>r_2>\dots>r_\alpha$, $s_1>s_2>\dots>s_\gamma$, причому $r_\alpha>1$;

3) поліноміальний пучок матриць $\mathcal{R}_1(t,\lambda)$ регулярний на $[0;T]$ і має $p_1+\dots+p_r+q_1+\dots+q_r+r$ простих власних значень, жодний з яких не дорівнює $\omega_0(t)$;

4) всі корені рівнянь

$$\det\left(\left\|(\Gamma_1\varphi_i,\psi_j)\right\|_1^{r+m_1+\dots+m_\kappa}-\eta\Lambda_{m_\kappa}\right)=0,\ \kappa=\overline{1,\alpha};$$

$$\det\left(\left\|(B_1\tilde{\varphi}_i,\tilde{\psi}_j)\right\|_1^{r+n_1+\dots+n_\kappa}-\theta\Lambda_{n_\kappa}\right)=0,\ \kappa=\overline{1,\gamma},$$

прості і відмінні від нуля на відрізку $[0;T]$, де φ_i , $i=\overline{1,r+m_1+\dots+m_\alpha}$, $\tilde{\varphi}_j$, $j=\overline{1,r+n_1+\dots+n_\gamma}$, - базисні вектори нуль-просторів матриць $\mathcal{L}(t,\omega_0)$ та B_0 відповідно, ψ_i , $\tilde{\psi}_j$ - базисні вектори нуль-просторів відповідних спряжених матриць, а матриці Λ_{m_κ} , Λ_{n_κ} мають таку ж структуру, що й у теоремі 7.

Тоді система /II/ має на даному відрізку наступні групи формальних розв'язків:

- $(p_1+\dots+p_r+q_1+\dots+q_r+r)$ розв'язків вигляду /I2/, які відповідають сингулярній частині пучка $\mathcal{L}(t,\lambda)$ і в яких $\lambda_0(t)$ - власне значення поліноміального пучка матриць $\mathcal{R}_1(t,\lambda)$, а функції $\lambda(t,\varepsilon)$ та вектор-функції $u(t,\varepsilon)$ зображаються формальними розвиненнями /I5/ за степенями $\mu=\varepsilon$;

- $(m_1r_1+\dots+m_\alpha r_\alpha)$ розв'язків вигляду /I2/, що відповідають "скінченним" елементарним дільникам, у яких $\lambda_0(t)=\omega_0(t)$, а $\lambda(t,\varepsilon)$, $u(t,\varepsilon)$ зображаються розвиненнями /I5/ за степенями $\mu=\sqrt[r_i]{\varepsilon}$, $i=\overline{1,\alpha}$;

- $(n_1s_1+\dots+n_\gamma s_\gamma)$ розв'язків вигляду /I3/, що відповідають "нескінченним" елементарним дільникам, де функції $\xi(t,\varepsilon)$ та вектор-функції $V(t,\varepsilon)$ зображаються розвиненнями /16/, у яких $\nu = \sqrt[s_i]{\varepsilon}$, $i=\overline{1,r}$, $m=1$.

В останньому параграфі даного розділу розглядається питання про побудову частинного розв'язку неоднорідної системи /1/. Як і у випадку регулярності граничного пучка матриць, розв'язок системи /1/ будується у вигляді /23/ і вивчається залежність числа m від властивостей коефіцієнтів системи. Детально досліджені одновимірний і багатовимірний випадки за умови відсутності регулярного "ядра". Зокрема, в одновимірному випадку розроблено ефективний геометричний спосіб для визначення числа m. У обох випадках знайдено умови, які повинен задовольняти вектор $f(t,\varepsilon)$, для існування розв'язку системи /1/ у тій ситуації, коли вона стає сингулярною. Показано, що за виконання цих умов частинний розв'язок системи /1/ можна побудувати у вигляді /23/, поклавши $m=0$.

Коротко аналізується також випадок, коли пучок матриць $\mathcal{L}(t,\lambda)$ має регулярне "ядро". Встановлено, що на процес побудови розв'язків системи /1/ суттєво впливає наявність у регулярному "ядрі" пучка $\mathcal{L}(t,\lambda)$ "скінченного" елементарного дільника вигляду $(\lambda-\alpha(t))^{k}$, і проаналізовано деякі характерні особливості, пов'язані з цією ситуацією.

У четвертому розділі дисертації розглядаються деякі узагальнення та застосування теорії асимптотичного інтегрування лінійних сингулярно збурених систем з виродженнями, яка розроблена в попередніх розділах.

Зокрема, в § 21 вивчається структура загального асимптотичного розв'язку однорідної системи диференціальних рівнянь другого порядку

$$\varepsilon^{2h}A(t,\varepsilon)\frac{d^2x}{dt^2}+\varepsilon^{h}B(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt}+C(t,\varepsilon)x=0, \qquad /29/$$

в якій матриці $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)$, $C(t,\varepsilon)$ на даному відрізку $[0;T]$ допускають рівномірні асимптотичні розвинення, аналогічні /2/, і $\det A_0(t)\equiv 0$.

Хоча система диференціальних рівнянь другого порядку може бути зведена до еквівалентної системи першого порядку, однак у процесі побудови асимптотичних розв'язків це призводить до зайвої громіздкості, якої можна уникнути, інтегруючи цю систему безпосередньо. Крім того, для практичних потреб бажано мати результати, які б виражались у термінах матриць даної системи, а не еквівалентної їй системи першого порядку.

Зазначимо, що система /29/ була недостатньо вивчена навіть у випадку неособливості матриці $A_0(t)$. Різні автори, як правило, досліджували її або у випадку простих коренів характеристичного рівняння, або ж накладали досить суттєве обмеження $B_0(t)\equiv 0$, що обумовлено не стільки принциповими труднощами, скільки намаганням оперувати звичним лінійним граничним пучком матриць $C_0(t)+\lambda A_0(t)$, теорія якого добре розроблена.

Щоб дослідити систему /29/ у найбільш загальному вигляді, спочатку в § 20 проводяться деякі дослідження квадратичного пучка матриць $C+\lambda B+\lambda^2 A$ з виродженою матрицею A . По аналогії з теорією Кронекера-Вейєрштрасса для лінійних пучків, тут вводяться поняття "скінченних" і "нескінченних" елементарних дільників та мінімальних індексів даного пучка і встановлюється структура відповідних жорданових наборів векторів.

Ці дослідження, а також результати § 5, і стали тією основою, на якій у § 21 вивчається асимптотика загального розв'язку системи /29/. При цьому по аналогії з системами першого порядку використовуються як методи безпосередньої побудови розв'язків, так і методи асимптотичного аналізу їхньої структури за допомогою діаграм Ньютона. Це дало можливість проаналізувати різні випадки, пов'язані з структурою жорданових наборів граничного пучка матриць $C_0(t)+\lambda B_0(t)+\lambda^2 A_0(t)$ за умови його регулярності та випадок, коли цей пучок сингулярний і має по одному мінімальному індексу для стовпців та рядків. В результаті цих досліджень, зокрема, встановлено, що за відсутності точок повороту структура загального асимптотичного розв'язку системи /29/, який будується за розробленим алгоритмом, повністю узгоджується з теоремою 4.

Відмітимо, що запропонований підхід дозволяє без принципових труднощів узагальнити здобуті результати й на системи вищих порядків.

У § 22 вивчається питання про побудову асимптотичних розв'язків сингулярно збурених лінійних систем, які містять два незалежні малі параметри:

$$\varepsilon_1^{h_1}\varepsilon_2^{h_2}B(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\frac{dx}{dt}=A(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)x+f(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2), \quad /30/$$

де h_1 , h_2 - цілі невід'ємні числа такі, що $h_1+h_2\geq 1$. При цьому припускається, що матриці $A(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, $B(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ та вектор

$f(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ розкладаються в подвійні асимптотичні ряди за степенями малих параметрів:

$$A(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon_1^k\varepsilon_2^s A_{ks}(t), \quad B(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon_1^k\varepsilon_2^s B_{ks}(t),$$

$$f(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon_1^k\varepsilon_2^s f_{ks}(t),$$

$\det B_{00}(t) \equiv 0$ і граничний пучок матриць $A_{00}(t)-\lambda B_{00}(t)$ регулярний при всіх $t \in [0;T]$.

Питання про побудову асимптотичних розв'язків системи /30/ вивчалось іншими авторами лише у випадку, коли B - одинична матриця, а відповідний граничний пучок матриць має простий спектр. У даній роботі для асимптотичного аналізу системи /30/ використовується просторовий аналог діаграм Ньютона, що дозволило вперше дослідити випадок кратного спектра граничного пучка матриць і детально проаналізувати структуру загального асимптотичного розв'язку даної системи за умови як неповного, так і повного її виродження. В результаті цих досліджень встановлено, що, подібно до систем з одним параметром, асимптотичні розв'язки відповідної однорідної системи поділяються на дві групи, перша з яких відповідає "скінченним" елементарним дільникам граничного пучка матриць і будується у вигляді

$$x(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2) = u(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\exp\left(\varepsilon_1^{-h_1}\varepsilon_2^{-h_2}\int_0^t(\lambda_0(t)+\lambda(t,\varepsilon))dt\right), \qquad /31/$$

де $\lambda_0(t)$ - власне значення даного пучка, а друга - відповідає "нескінченним" елементарним дільникам і має вигляд

$$x(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2) = v(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\exp\left(\varepsilon_1^{-h_1}\varepsilon_2^{-h_2}\int_0^t \xi^{-1}(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)dt\right). \qquad /32/$$

При цьому функції $\lambda(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, $\xi(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ та вектор-функції $u(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, $v(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ у випадку простих елементарних дільників зображаються подвійними розвиненнями за цілими степенями параметрів, а у випадку кратних елементарних дільників - за дробовими або цілими степенями одного з параметрів та їх відношення, показники яких залежать від кратності відповідних елементарних дільників і властивостей коефіцієнтів системи. Зокрема, доведена така

Теорема 18. Нехай граничний пучок матриць $A_{00}(t)-\lambda B_{00}(t)$ має на відрізку $[0;T]$ один "скінченний" елементарний дільник $(\lambda-\lambda_0(t))^p$ кратності $p>1$ та один "нескінченний" елементарний дільник кратності $q>1$ і виконуються умови

$$\left(\left(\lambda_0 B_{01}-A_{01}-\delta_{0,k_1}\delta_{1,k_2}B_{00}\frac{d}{dt}\right)\varphi,\psi\right)\neq 0\ \forall t\in[0;T];$$

$$(B_{01}\tilde{\varphi},\tilde{\psi})\neq 0\ \forall t\in[0;T],$$

де $\varphi(t)$, $\tilde{\varphi}(t)$ - елементи нуль-просторів матриць $A_{00}(t)-\lambda_0(t)B_{00}(t)$ та $B_{00}(t)$ відповідно, $\psi(t)$, $\tilde{\psi}(t)$ - елементи нуль-просторів спряжених з ними матриць. Тоді однорідна система, яка відповідає /30/, має p формальних розв'язків вигляду /31/ і q розв'язків вигляду /32/, де функції $\lambda(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, $\xi(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ та вектор-функції $u(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, $v(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ зображаються формальними розвиненнями

$$\lambda(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\mu_2\sum_{i+j\geq 0}\mu_1^i\mu_2^j\lambda_{ij}(t),\ u(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\varphi(t)+\sum_{i+j\geq 1}\mu_1^i\mu_2^j u_{ij}(t);$$

$$\xi(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\nu_2\sum_{i+j\geq 0}\nu_1^i\nu_2^j\xi_{ij}(t),\ v(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\tilde{\varphi}(t)+\sum_{i+j\geq 1}\nu_1^i\nu_2^j v_{ij}(t),$$

в яких $\mu_1=\varepsilon_1/\varepsilon_2$, $\mu_2=\sqrt[p]{\varepsilon}$, $\nu_1=\varepsilon_1/\varepsilon_2$, $\nu_2=\sqrt[q]{\varepsilon_2}$.

Розглядається також питання про побудову частинного розв'язку неоднорідної системи /30/. Встановлено, що його можна побудувати у вигляді формального розвинення за цілими степенями одного з параметрів та їх відношення. Показано, що при виконанні певних умов побудовані формальні розв'язки є рівномірними асимптотичними розвиненнями відповідних точних розв'язків у досить малому околі прямої $\varepsilon_1=0$ або $\varepsilon_2=0$ на площині $\varepsilon_1\varepsilon_2$.

Як можливе застосування деяких результатів дисертації, в § 23 розглядається задача Коші для слабо нелінійної системи:

$$\varepsilon B(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt}=A(t,\varepsilon)x+\varepsilon f(x,t,\varepsilon),\ x(0,\varepsilon)=x_0,$$

де $\det B_0(t)\equiv 0$ і пучок матриць $A_0(t)-\lambda B_0(t)$ регулярний на $[0;T]$. Показано, що у випадку неповного виродження розв'язок даної задачі можна побудувати у вигляді суми регулярного ряду та примежових рядів, кількість яких визначається структурними особливостями матриці $B(t,\varepsilon)$. Розроблено алгоритм для знаходження коефіцієнтів цих рядів.

Основні результати дисертації опубліковані в наступних роботах:

1. Яковец В.П. Об асимптотической сходимости формальных решений линейных систем дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами // Укр. мат. журн.- 1987.- 39, № 6.- С.804-809.

2. Яковец В.П. Асимптотика решений линейной сингулярно возмущенной системы с вырождениями // Всесоюз. конф. "Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики", г. Тернополь, 12-15 сент. 1989 г.: Тез. докл.- Тернополь, 1989.- С.489-491.

3. Яковец В.П. Об асимптотических решениях линейных сингулярно возмущенных систем с вырождениями // Асимптотические методы в уравнениях математической физики.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989.- С. 156-161.

4. Шкиль Н.И., Старун И.И., Яковец В.П. Асимптотическое интегрирование линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.- Киев: Вища шк., 1989.- 287 с.

5. Яковец В.П. Асимптотика решений линейной сингулярно возмущенной системы с вырождением // Укр. мат. журн.- 1990.- 42, № 11.- С. 1559-1566.

6. Яковец В.П. Асимптотика решений одного класса линейных сингулярно возмущенных систем // Докл. АН УССР. Сер. А.- 1991.- № 1.- С. 18-21.

7. Яковець В.П. Асимптотика загального розв'язку сингулярно збуреної лінійної системи у випадку сингулярного жмутка граничних матриць // Доп. АН УРСР. Сер. А.- 1991.- № 6.- С. 11-15.

8. Яковец В.П. Асимптотическое интегрирование сингулярно возмущенной системы второго порядка с вырождением // Тез. докл. Всесоюз. конф. "Асимптотические методы теории сингулярно возмущенных уравнений и некорректно поставленных задач", г. Бишкек, 10-12 сент. 1991 г.- Бишкек: Илим, 1991.- С. 120.

9. Яковец В.П. Асимптотика решений неоднородной сингулярно возмущенной системы с вырожденной предельной матрицей при производной // Асимптотические решения нелинейных уравнений с малым параметром.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1991.- С. 134-141.

10. Яковец В.П. Интегрирование сингулярно возмущенной линейной системы в случае сингулярного пучка предельных матриц // Дифференциально-функциональные уравнения.- Киев: КГПИ, 1991.- С. 107-114.

11. Шкиль Н.И., Старун И.И., Яковец В.П. Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями.- Киев: Вища шк., 1991.- 207 с.
12. Яковец В.П. Асимптотический анализ сингулярно возмущенной линейной системы с сингулярным предельным пучком матриц // Укр. мат. журн.- 1992.- 44, № 1.- С. 106-122.
13. Яковец В.П. Асимптотика решений сингулярно возмущенных систем с малой нелинейностью и вырождающейся матрицей при производной // Конф. "Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики - вторые боголюбовские чтения", г. Киев, 28 сент. - 2 окт. 1993 г.: Тез. докл..- Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992.- С. 186.
14. Яковець В.П. Асимптотичне розщеплення одного класу лінійних сингулярно збурених систем // Доп. АН України.- 1992.- № 5.- С. 40-44.
15. Яковец В.П. Асимптотический анализ общего решения вырождающихся сингулярно возмущенных линейных систем с двумя малыми параметрами // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения.- Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992.- С. 111-113.
16. Яковец В.П. Исследование некритичности и устойчивости вырождающейся сингулярно возмущенной системы с периодическими коэффициентами // Аналитические методы исследования нелинейных дифференциальных систем.- Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992.- С. 134-140.
17. Яковец В.П. Методы возмущений в задаче асимптотического интегрирования вырождающихся сингулярно возмущенных линейных систем с двумя малыми параметрами.- Киев, 1992.- 52 с.- /Препр./ Ин-т математики АН Украины; 92.34/.
18. Яковец В.П. Построение асимптотических решений вырождающихся сингулярно возмущенных систем со слабой нелинейностью // Асимптотическое интегрирование нелинейных уравнений.- Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992.- С. 132-139.
19. Яковец В.П. Построение асимптотических решений линейных сингулярно возмущенных систем второго порядка с вырождением // Укр. мат. журн.- 1992.- 44, № 8.- С. 1102-1112.
20. Яковец В.П. Асимптотика общего решения линейной сингулярно возмущенной системы с двумя малыми параметрами // Дифференц. уравнения.- 1993.- 29, № 2.- С. 256-266.

21. Самойленко А.М., Яковец В.П. О приводимости вырожденной линейной системы к центральной канонической форме // Докл. АН Украины.- 1993.- № 4.- С. 10-15.
22. Яковец В.П. Исследование асимптотики общего решения линейной сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений второго порядка с вырождением // Укр. мат. журн.- 1993.- 45, № 4.- С. 561-575.
23. Яковец В.П. Исследование асимптотики решений сингулярно возмущенной линейной системы в случае сингулярного пучка предельных матриц // Мат. физика и нелинейн. механика.- 1993.- Вып. 18/52/.- С. 40-47.

В. Яковец

Підп. до друку 28.09.93. Формат 60x84/16. Папір друк. Офс. друк. Ум. друк. арк. 2,09. Ум. фарбо-відб. 2,09. Обл.-вид. арк. 1,6. Тираж 120 пр. Зам. 391 Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики АН України
252601 Київ 4, ГСП, вул. Терещенківська, 3