Київський університет імені Тараса Шевченка

На правах рукопису

УДК 518.9

БЕЗМАГОРИЧНИЙ Віктор Володимирович

МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ В ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ІГРАХ З ІНТЕГРАЛЬНИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ

01.01.09 — математична кібернетика

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Київ 1993

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті кібернетики імені В. М. Глушкова АН України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор Чикрій Аркадій Олексійович.

Офіційні опоненти:

1. Доктор фізико-математичних наук, професор Онопчук Юрій Миколайович,
2. Кандидат фізико-математичних наук, доцент Крак Юрій Васильович.

Провідна організація: Київський політехнічний інститут.

Захист відбудеться «27» грудня 1993 р. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 068.18.16 при Київському університеті імені Тараса Шевченка, за адресою: 252207 Київ 207, проспект Академіка Глушкова, 6.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Київського університету імені Тараса Шевченка.

Автореферат розісланий «27» листопада 1993 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради АКузь КУЗЬМІН А. В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Предмет дослідження в даній дисертаційній роботі складають конфліктні задачі про керування об'єктами, які описуються звичайними диференціальними рівняннями. Такі задачі прийнято об'єднувати терміном диференціальні ігри. При цьому вивчення обмежене розглядом лінійних диференціальних ігор переслідування за наявності інтегральних обмежень на керування гравців.

Досліджуються якісні питання про можливості приведення траєкторії диференціального рівняння, що знаходиться під впливом двох протидіючих сторін, на задану множину. Критерієм якості є час.

Ігровий характер таких конфліктних задач керування проявляється в тому припущенні, що гравцю (у даній роботі гра розглядається з точки зору переслідувача, тобто гравцю, що намагається вивести траєкторію процесу на задану множину) в кожний момент часу не відомий точно майбутній спосіб дій суперника (невідомо точно, якими будуть у майбутньому керуючі впливи суперника), і при визначенні своїх дій цей гравець може спиратися лише на знання фізичних можливостей своїх та суперника.

Вже існуюча історія розвитку теорії диференціальних ігор показала великі труднощі в строгому математичному формалізуванні змістовної картини диференціальної гри. Для лінійних диференціальних ігор переслідування з інтегральними обмеженнями на керування гравців обхід цих труднощів обо їх подолання здійснюються одним з таких основних відомих на сьогодні шляхів.

Одна з формалізацій - позиційна диференціальна гра. Така назва підкреслює, що в розглядуваній грі керуючий вплив (переслідувача), який визначається в той чи інший момент часу його стратегією та подається відразу на систему, є функцією (може, випадковою) від позиції, що була реалізована в цей же момент часу (або функцією від історії позицій, що реалізувалась на цей момент часу). Така постановка диференціальної гри запропонована М.М. Красовським та розвинена в його роботах і роботах його учнів.

В Україні такий підхід до лінійних диференціальних ігор з інтегральними обмеженнями отримав свій розвиток у роботах Б.М. Пшеничного та Ю.М. Онопчука. Не вдаючись у деталі цього підходу, відмітимо, що він орієнтований на час першого поглинання, тобто визначаються деякі достатні умови (умови регулярності), виконання яких і забезпечують закінчення гри за час першого поглинання. Якщо умови регулярності не виконуються, то можливе застосування різноманітних способів регуляризації, які дозволяють закінчити переслідування за час з деякого околу часу першого поглинання. При виборі свого керування переслідувач використовує правило екстремального прицілювання.

Інша формалізація стосовно лінійних диференціальних ігор з' інтегральними обмеженнями - прямий метод. Він запропонований М.С. Нікольським і є, як відомо, аналогом першого прямого методу Л.С. Понтрягіна. Цей метод реалізовано в класі контркерувань, тобто при формуванні керуючого впливу переслідувач використовує в поточний момент часу інформацію про реалізацію керування суперника в той же момент часу. Як гарантований момент закінчення при такому підході використовується деякий момент поглинання, не завжди найменший. Коротко суть такого підходу виражається у такий спосіб. Визначаються деякі достатні умови, які накладаються на динаміку процесу і пов'язуються з інтегральними обмеженнями, при виконанні яких існує деякий вимірний селектор у просторі допустимих керувань переслідувача і відповідний до нього абсолютно неперервний селектор у фазовому просторі, який визначається до початку гри і йдучи за яким система приводиться на термінальну множину. При цьому вказані вище достатні умови гарантують переслідувачу можливість вести систему даним селектором, використовуючи інформацію про поточне значення керуючого впливу суперника. Подальший розвиток такий підхід отримав у роботах О.В. Мезенцева та А.Я. Азимова.

Для диференціальних ігор з геометричними обмеженнями на керування гравців відома ще одна формалізація - метод розв'язувальних функцій. Найповніше він викладений і детально розроблений у роботах А.О. Чикрія. Особливістю такого підходу є введення деякої допоміжної розв'язувальної функції, через яку й визначається гарантований час закінчення гри. З іншого боку, розв'язувальна функція характеризує протікання процесу. Таким чином, при визначенні гарантованого часу закінчення гри перетворення інтегралу від неї на одиницю в деякий момент означає гарантоване влучення в цей момент на термінальну множину.

Перетворення ж інтегралу від розв'язувальної функції на одиницю в деякий момент у процесі гри означає, що подальший рух системи по раніше визначеному гарантованому селектору забезпечує зустріч з термінальною множиною. Можливість же переслідувачу вести систему по заданому селектору забезпечується, в свою чергу, виконанням умови Л.С. Понтрягіна, відповідним вибором селектора і можливістю використання переслідувачем у поточний момент при формуванні свого керуючого впливу інформації про реалізацію керування суперника в той же момент. Тим самим процес переслідування розділяється на дві частини. На першій діє власне метод розв'язувальних функцій з використанням переслідувачем у кожний момент часу всієї передісторії керування втікача; коли інтеграл від розв'язувальної функції стає рівним одиниці, то процес переслідування переключається на перший прямий метод Л.С. Понтрягіна і реалізується в класі контркерувань. Потрібно зауважити, що інформованість переслідувача, яка при цьому використовується, взагалі кажучи, може допускати різні формалізації диференціальної гри, тому що за умови детермінованості процесу гри розумно допустити, що, знаючи в кожний момент передісторію керування втікача, а також деяке правило, що дозволяє за цією інформацією отримати реалізоване в цей момент власне керування, переслідувач може володіти в кожний момент інформацією про позицію, яка реалізувалась у цей самий момент часу.

Мета роботи. 1. Отримати аналог методу розв'язувальних функцій для лінійних диференціальних ігор з інтегральними обмеженнями. 2. Дослідити способи більш эфективного використання інформаційних можливостей методу розв'язувальних функцій.

Методи дослідження. В дисертації широко використовуються елементи теорії багатозначних відображень, апарат опорних функцій, апарат розв'язувальних (калібрувальних) функцій. Особливо широко застосовуються елементи опуклого аналізу. Також використовуються елементи теорії диференціальних рівнянь, функціонального аналізу та топології.

Наукова новизна. 1. Введено розв'язувальні функції загального вигляду та досліджено їх властивості. 2. Запропоновано аналог методу розв'язувальних функцій для лінійних диференціальних ігор з інтегральними обмеженнями, який дозволяє легко переходити до прямого методу (М.С. Нікольського), але не дозволяє поліпшити гарантований час закінчення переслідування, що дає прямий метод. 3. Запропоновано процедуру поліпшення методу, що дозволяє достатньо гнучко використовувати інформацію про можливість і характер "помилок" втікача. 4. Запропоновано аналог методу розв'язувальних функцій для лінійних диференціальних ігор з різнотипними обмеженнями і показано, що його використання дає можливість у деяких випадках поліпшити гарантований час закінчення переслідування порівняно з прямим методом (О.В. Мезенцева). 5. Запропоновано спосіб переслідування, який більш ефективно використовує інформаційні можливості методу розв'язувальних функцій, та визначено умови, коли за допомогою даного способу переслідування можна поліпшити гарантований час закінчення переслідування, що дає прямий метод (М.С. Нікольського). 6. Показано, що запропонований спосіб переслідування можна ефективно використати і в разі групового переслідування.

Теоретична та практична цінність роботи. Результати дисертації носять теоретичний характер і можуть служити основою для подальших досліджень. Запропонований у главі 3 спосіб переслідування дозволяє, з одного боку, гнучко настроюватися на використання "помилок", з іншого - за деяких достатньо загальних умов - на поліпшення гарантованого часу закінчення переслідування (порівняно з прямим методом).

Апробація роботи. Основні результати дисертації доповідались на науковому семінарі "Теорія оптимальних рішень" наукової ради АН України з проблеми "Кібернетика".

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в 4 статтях, список яких наведено в кінці автореферата.

Структура дисертації. Дисертація складається з вступу, чотирьох глав та списку літератури. Робота викладена на 99 сторінках машинописного тексту. Бібліографія нараховує 60 найменувань.

ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

В главі 1 розглядається задача переслідування

$$\dot{z} = Az + Bu + Cv, \qquad (1.1)$$

де $z \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ - n-мірний евклідовий простір; A,B,C - матриці з постійними коефіцієнтами розмірністю $n \times n$, $n \times p$, $n \times q$ відповідно; u,v - керуючі вектори з $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$ відповідно, такі, що

$$\int_0^\infty \langle u(\tau),u(\tau)\rangle d\tau \le \mu^2 \ (\mu>0), \qquad (1.2)$$

$$\int_0^\infty \langle v(\tau),v(\tau)\rangle d\tau \le \nu^2 \ (\nu \ge 0). \qquad (1.3)$$

Термінальна множина має вигляд $M^* = M^0 + M$,
де M^0 - лінійний підпростір в $\mathbb{R}^n$; M - опукла, замкнена множина з L - ортогонального додатку до M^0 в просторі $\mathbb{R}^n$.

Означення I. Гра (1.1)-(1.3) може бути закінчена із заданого положення $z^0 \in \mathbb{R}^n \setminus M^*$ не пізніше ніж за час $T=T(z^0)$, якщо існує вимірна функція, яка задовольняє (1.2), $u(t)=u(z^0,v_t(\cdot))$, де $v_t(\cdot)=\{v(\tau),\ \tau\in[0,t]\}$, $t\in[0,T(z^0)]$, що $z(T(z^0))\in M^*$ за будь-якої, що задовольняє (1.3) вимірної функції $v(t)$, $t\in[0,T(z^0)]$, де $z(t)$ - розв'язок системи (1.1), що відповідає керуванню $(u(t),v(t))$ та початковому положенню z^0.

Нехай π - оператор ортогонального проектування з $\mathbb{R}^n$ на підпростір L. Розглянемо лінійний оператор $\pi e^{tA}B$.

Умова A. Оператор $\pi e^{tA}B$ виконує взаємно однозначне відображення простору $\mathbb{R}^p$ на L (з чого випливає, що $\dim L=p$) для будь-якого $t>0$.

Надалі вектори πz будемо розглядати в базисі L. Позначимо Π матрицю оператора π.

При виконанні умови A маємо

$$\Pi e^{tA}B = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ \theta \end{bmatrix}, \qquad \Pi e^{tA}C = \begin{bmatrix} F_2(t) \\ \theta \end{bmatrix},$$

де $F_1(t)$ - матриця $p \times p$ з ненульовим означником при $t>0$; $F_2(t)$ - матриця $p \times q$.

При виконанні умови A існує $F(t) = F_1^{-1}(t)F_2(t)$ при $t>0$.

Умова B. Матрична функція $F(t)$ неперервна в точці $t=0$.

Введемо функцію

$$\chi^2(t)=\|F(t)\|^2\nu^2, \qquad t=0,$$

$$\chi^2(t)= \sup_{\int_0^t \langle v(s),v(s)\rangle ds \le \nu^2} \int_0^t \langle F(\tau)v(\tau),F(\tau)v(\tau)\rangle d\tau, \qquad t>0.$$

Умова С. Для будь-якого $t \geq 0$ виконується $\mu \geq \chi(t)$, де $\chi(t)$ - арифметичне значення кореня із $\chi^2(t)$.

Позначимо

$$G(t,\eta)=\left\{ \int_0^t F_1(\tau)\omega(\tau)d\tau : \int_0^t \langle\omega(\tau),\omega(\tau)\rangle d\tau \leq \eta^2 \right\},$$

де $\omega(\cdot)$ - всілякі вимірні векторні функції з $\mathbb{R}^p$.

Відмітимо деякі властивості відображення $G(t,\eta)$ при $t \geq 0$, $\eta \geq 0$.

1. $G(t,\eta)=\eta G(t,1)$.

2. $G(t,1)$ - компактнозначне, опуклозначне, причому строговипуклозначне та неперервне по $t \geq 0$.

Зауваження. Під строговипуклозначністю тут і надалі розуміється строговипуклозначність у просторі L.

Зафіксуємо неперервну функцію $\eta(t)$:

$$\chi(t) \leq \eta(t) \leq \mu, \quad t \geq 0. \tag{1.4'}$$

Зафіксуємо неперервну векторну функцію $g(t)$:

$$g(t) \in (\mu-\eta(t))G(t,1) \text{ при } t \geq 0. \tag{1.4''}$$

Введемо відображення при $t \geq 0$, $z \in \mathbb{R}^n$, $\tau \in [0,t]$, $v \in \mathbb{R}^q$, $\beta \geq 0$:

$$M(t,z)=M-\pi e^{tA}z-g(t),$$

$$W(t,\tau,v,\beta)=F_1(\tau)S^p(F(\tau)v, \|F(\tau)v\|+\sqrt{\beta}(\eta(t)-\chi(t))),$$

де $S^p(x,\rho)=\{ y \in \mathbb{R}^p : \|x-y\| \leq \rho \}$, $\|\cdot\|=\sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$, $\rho \geq 0$.

Введемо функції, що допускають безмежні значення:

$$\alpha(t,\tau,z,v,\beta)= \sup \{ \alpha \geq 0 : W(t,\tau,v,\beta) \cap \alpha M(t,z) \neq \emptyset \},$$

$$\beta(t,\tau,z,v)= \sup \{ \beta \geq 0 : W(t,\tau,v,\beta) \cap \beta M(t,z) \neq \emptyset \}.$$

Відмітимо деякі властивості функцій $\alpha(t,\tau,z,v,\beta)$ та $\beta(t,\tau,z,v)$.

Властивості функції $\alpha(t,\tau,z,v,\beta)$, $t \geq 0$, $\tau \in [0,t]$, $z \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^q$, $\beta \geq 0$:

1. $\inf\limits_{v \in \mathbb{R}^q} \alpha(t,\tau,z,v,\beta) = \alpha(t,\tau,z,\bar{o},\beta)$, де $\bar{o}$ - нуль-вектор відповідної розмірності.

2. $\alpha(t,\tau,z,\bar{o},\beta)=\sqrt{\beta}\alpha(t,\tau,z,\bar{o},1)$, якщо не виконується одночасно $\beta=0$ та $\bar{o} \in M(t,z)$.

3. $\alpha(t,\tau,z,v,\beta)$ неперервна за сукупністю всіх своїх аргументів в усіх точках, в яких $\bar{o} \notin M(t,z)$, $t>0$, $\tau>0$.

Властивості функції $\beta(t,\tau,z,v)$ при $t \geq 0$, $\tau \in [0,t]$, $z \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^q$:

1. $\inf\limits_{v \in \mathbb{R}^q} \beta(t,\tau,z,v)=\beta(t,\tau,z,\bar{o})$.

2. $\beta(t,\tau,z,\bar{o})=\sqrt{\beta(t,\tau,z,\bar{o})}\, \alpha(t,\tau,z,\bar{o},1)$ або

$$\beta(t,\tau,z,\bar{o})=[\alpha(t,\tau,z,\bar{o},1)]^2.$$

3. $\beta(t,\tau,z,v)$ неперервна за сукупністю всіх своїх аргументів в усіх точках, в яких $\bar{o} \notin M(t,z)$, $t>0$, $\tau>0$.

Розглянемо

$$T_{\eta,g}(z)=\inf\left\{t\geq 0 : \int_0^t \inf_{v\in R^q}\beta(t,\tau,z,v)d\tau\geq 1\right\},$$

де $z\in R^n\setminus M^*$.

Зауваження. Якщо $X=\emptyset$, то за домовленістю приймемо $\inf_{x\in X}(x)=\infty$.

1. $$T_{\eta,g}(z)=\inf\left\{t\geq 0:\int_0^t\beta(t,\tau,z,\bar{o})d\tau\geq 1\right\}=$$
$$=\inf\left\{t\geq 0:\int_0^t[\alpha(t,\tau,z,\bar{o},1)]^2d\tau\geq 1\right\}.$$

2. Якщо ввести

$$T_{\eta,g}(z,\beta(\cdot))=\inf\left\{t\geq 0:\int_0^t\alpha(t,\tau,z,\bar{o},\beta(\tau))d\tau\geq 1\right\},$$

де $\int_0^\infty\beta(\tau)d\tau\leq 1,\ \beta(\tau)\geq 0$;

$$T_{\eta,g}(z,v(\cdot))=\inf\left\{t\geq 0:\int_0^t\beta(t,\tau,z,v(\tau))d\tau\geq 1\right\},$$

де $v(\cdot)$ задовольняє (1.3), то буде справедливим співвідношення

$$T_{\eta,g}(z,\beta(\cdot))\geq T_{\eta,g}(z)\geq T_{\eta,g}(z,v(\cdot)).$$

3. Якщо ввести

$$T(z)=\inf\left\{t\geq 0 : (\mu-\chi(t))G(t,1)\cap(M-\pi e^{tA}z)\neq\emptyset\right\},$$

то справедливе співвідношення

$$T(z)=\inf\left\{T_{\eta,g}(z): \eta(\cdot) \text{ і } g(\cdot) \text{ задовольняють (1.4') і (1.4")}\right\}.$$

Зазначимо, що в силу властивостей 2 и 3 для $T_{\eta,g}(z)$ маємо

$$T(z)\geq\inf\left\{T_{\eta,g}(z,v(\cdot)):\eta(\cdot) \text{ і } g(\cdot) \text{ задовольняють (1.4') і (1.4")}\right\},$$

де $v(\cdot)$ задовольняє (1.3). З цього випливає, як це показано на прикладі п.1.5, що дана схема дозволяє в деяких випадках, коли можливе визначення $T_{\eta,g}(z,v(\cdot))$ в класі стратегій, зафіксованих в означенні 1, отримати час попадання на термінальну множину менше $T(z)$ за рахунок такого використання інформації про втікача, яке допускає використання "помилок" втікача. Так само за рахунок цього можливе наближення до $T_{\eta,g}(z,v(\cdot))$ в класі стратегій, зафіксованих в означенні 1 і тим самим покращання часу попадання на термінальну множину (теореми 1.2-1.3).

Для доведення властивості 3 функцій $\alpha(t,\tau,z,v,\beta)$ та $\beta(t,\tau,z,v)$ використовуються такі леми.

Лема І.І. Нехай багатозначне відображення $W:\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^+\to K(\mathbb{R}^p)$, де $K(\mathbb{R}^p)$ - непусті компакти з $\mathbb{R}^p$, володіє властивостями:

I) $\lambda W(x,\beta)\subset W(x,\lambda\beta)$, $\lambda\in[0,1]$, $\beta\geq 0$, $x\in\mathbb{R}^k$;

2) $W(x,\beta)$ напівнеперервне зверху по x для будь-якого фіксованого $\beta\geq 0$.

Нехай багатозначне відображення $M_1:\mathbb{R}^k\to K(\mathbb{R}^p)$ напівнеперервне зверху; $M_2(x) = M+f(x)$, де $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^p$ - неперервна векторна функція, M - замкнена необмежена множина з $\mathbb{R}^p$. Надалі нехай відображення $M(x)$ можна подати або як $M_1(x)$, або як $M_2(x)$. Тоді функція $\beta(x)=\sup\{\beta\geq 0: W(x,\beta)\cap\beta M(x)\neq\emptyset\}$ напівнеперервна зверху.

Лема І.2. Нехай багатозначне відображення $W:\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^+\to Kv(\mathbb{R}^p)$, де $Kv(\mathbb{R}^p)$ - непусті опуклі компакти з $\mathbb{R}^p$, володіє властивостями:

1) $\lambda W(x,\beta)\setminus\bar{o}\subset \operatorname{int} W(x,\lambda\beta)$, $0<\lambda<1$, $\beta\geq 0$, $x\in\mathbb{R}^k$, де $\operatorname{int}S=\{y\in S : \exists\ \varepsilon=\varepsilon(y)>0$ і $\|x-y\|\leq\varepsilon \Rightarrow x\in S\}$;

2) $W(x,\beta)$ напівнеперервне знизу по x для будь-якого фіксованого $\beta\geq 0$.

Нехай багатозначне відображення $M_1:\mathbb{R}^k\to K(\mathbb{R}^p)$ напівнеперервне знизу; $M_2(x) = M+f(x)$, де $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^p$ - неперервна векторна функція; M - замкнена необмежена множина з $\mathbb{R}^p$. Надалі нехай відображення $M(x)$ можна подати або як $M_1(x)$, або як $M_2(x)$. Тоді функція $\beta(x)=\sup\{\beta\geq 0:W(x,\beta)\cap\beta M(x)\neq\emptyset\}$ напівнеперервна знизу в точках, в яких $\bar{o}\notin M(x)$.

Лема І.3. Функція $\chi^2(t)$ неперервна при $t\geq 0$. При цьому

$$\chi^2(t)=N^2(t)\nu^2, \quad \text{де} \quad N(t) = \max_{0\leq\tau\leq t}\|F(\tau)\|.$$

Теорема І.І. Нехай при виконанні умов A, B і C для деяких $\eta(\cdot)$ і $g(\cdot)$, що задовольняють (1.4') і (1.4") відповідно, та $z^0\in\mathbb{R}^n\setminus M^*$ справедливе $T_{\eta,g}(z^0)<\infty$. Тоді гра може бути закінчена із заданого початкового положення z^0 не пізніше ніж за час $T_{\eta,g}(z^0)$.

В главі 2 розглядається задача переслідування (1.1),(1.2) і

$$v(\tau)\in Q, \tag{2.3}$$

де Q - непуста компактна множина простору $\mathbb{R}^q$.

Формулюється результат, аналогічний теоремі 1.1.

В главі 3 розглядається лінійна задача переслідування одним гравцем одного втікача з інтегральними обмеженнями на керування гравців. Проводиться порівняння часу закінчення переслідування, що відповідає двом різним п.дходам - позиційному методу та прямому методу, що є, як відомо, аналогом прямого методу Л.С. Понтрягіна. Вивчається можливість зближення підходів на основі прямого методу із застосуванням розв'язувальних функцій. Пропонується спосіб переслідування, що частково реалізує цю можливість.

Задача полягає в тому, щоб привести траєкторію процесу (1.1) на термінальну множину за найкоротший час, використовуючи керуючий вектор u, із заданого початкового положення z°. При цьому векторна функція $u(t)$ повинна бути вимірною та задовольняти обмеження (1.2).

Припускається, що при побудові керування $u(t)$ переслідувач може використовувати інформацію про керування втікача аж до поточного моменту t, тобто $u(t)=u(z^{\circ},v_t(\cdot))$,
де $v_t(\cdot) = \{v(\tau),\ \tau\in[0,t]\}$.

Надалі скрізь припускається виконання умов A і B.

Введемо багатозначне відображення

$$G_H(t)=\left\{ \int_0^t H(\tau)\omega(\tau)d\tau \ :\ \int_0^t\langle\omega(\tau),\omega(\tau)\rangle d\tau\le 1\right\},$$

де $H(\cdot)$ - неперервна матрична функція, елементи якої - неперервні функції з $\mathbb{R}$; $\omega(\cdot)$ - всілякі вимірні векторні функції відповідної розмірності.

Позначимо

$$M(t,z,\mu,\nu)=M-\pi e^{tA}z+\mu G_{F_1}(t)\overset{*}{-}\nu G_{F_2}(t),$$

де $X\overset{*}{-}Y=\{x:\ x+Y\subset X\}=\bigcap\limits_{y\in Y}(X-y)$.

Введемо функції

$$K(z)=\inf\left\{t\ge 0\ :\ \bar{o}\in M(t,z,\mu,\nu)\right\},$$

$$T(z)=\inf\left\{t\ge 0\ :\ \bar{o}\in M(t,z,\mu,0)\overset{*}{-}\chi(t)G_{F_1}(t)\right\},$$

де $z\in\mathbb{R}^n\setminus M^*$, $\bar{o}$ - нуль-вектор відповідної розмірності.

Відмітимо деякі властивості функцій $K(z)$ та $T(z)$.

I. $K(z)=\inf\left\{t\ge 0\ :\ \nu G_{F_2}(t)\subset M(t,z,\mu,0)\right\}\le$

$$\le\inf\left\{t\ge 0:\ (\mu G_{F_1}(t)\overset{*}{-}\nu G_{F_2}(t))\cap M(t,z,0,0)\ne\emptyset\right\};$$

$$T(z)=\inf\left\{t\geq 0 : \chi(t)G_{F_1}(t)\subset M(t,z,\mu,0)\right\} =$$
$$=\inf\left\{t\geq 0 : \bar{o}\in M(t,z,\mu-\chi(t),0)\right\} =$$
$$=\inf\left\{t\geq 0 : (\mu-\chi(t))G_{F_1}(t)\cap M(t,z,0,0)\neq\emptyset\right\},$$

причому останні дві рівності справедливі при $\chi(t)\leq\mu \quad \forall t\geq 0$.

2. Якщо $K(z)<\infty$, то $\bar{o}\in\partial M(K(z),z,\mu,\nu)$. Аналогічно, якщо $T(z)<\infty$, то $\bar{o}\in\partial\{M(T(z),z,\mu,0)\overset{*}{-}\chi(T(z))G_{F_1}(T(z))\}$.

3. Якщо ввести

$$T(z,\rho)=\inf\left\{t\geq 0 : \bar{o}\in M(t,z,\mu,(1-\rho)\nu)\overset{*}{-}\rho\chi(t)G_{F_1}(t)\right\},$$

то

$$T(z,\rho_1)\leq T(z,\rho_2), \quad 0\leq\rho_1\leq\rho_2\leq 1,$$

причому $T(z,0)=K(z)$, $T(z,1)=T(z)$.

4. Справедливе твердження, що

$$K(z) = T(z) < \infty, \quad z\in R^n\setminus M^*,$$

тоді і тільки тоді, коли

$$\bar{o}\in\partial\{M(K(z),z,\mu,(I-\rho)\nu)\overset{*}{-}\rho\chi(K(z))G_{F_1}(K(z))\} \quad \forall\rho\in[0,1].$$

Звідси, зокрема, випливає, що якщо об'єкти однотипні, тобто $F_1(t)=F_2(t)\ \forall t\geq 0$, то $K(z)=T(z)\ \forall z\in R^n\setminus M^*$.

Крім того, звідси також випливає, що якщо $T(z)<\infty$ і $\bar{o}\notin\partial M(T(z),z,\mu,\nu)$, то $K(z)<T(z)$.

Зазначимо, що в останньому випадку, як це буде показано нижче, можливе приведення траєкторії процесу (1.1) на термінальну множину раніше моменту $T(z)$ з використанням способу переслідування, відмінного від позиційного.

Нехай для деякого $z\in R^n\setminus M^*$ виконується $T(z)<\infty$. Додатково вимагатимемо, щоб $0<\chi(T(z))<\mu$. (Хоча замість цього можна розглядати $\operatorname{int}M\neq\emptyset$ $(\chi(T(z))\leq\mu)$ (див. п.1.3) або, аналогічно, $\operatorname{int}\{M(T(z),z,\mu,0)\overset{*}{-}\chi(T(z))G_{F_1}(T(z))\}\neq\emptyset$.)

Тоді

$$\exists\, g_o :\ g_o\in(\mu-\chi(T(z)))G_{F_1}(T(z)) \quad і$$
$$g_o=m_o-\pi e^{T(z)A}z, \quad m_o\in M.$$

Звідси

$$\exists\,\omega_o(\cdot):\ \int_0^{T(z)}F_1(T(z)-\tau)\omega_o(\tau)d\tau=g_o \quad і$$
$$\int_0^{T(z)}\|\omega_o(\tau)\|^2d\tau-(\mu-\chi(T(z)))^2.$$

Тоді

$$\forall s\in[0,T(z)]\ \exists\lambda_s\in[0,1]:\quad \int_0^s\|\omega_o(\tau)\|^2d\tau=(1-\lambda_s^2)(\mu-\chi(T(z)))^2,$$
$$\int_s^{T(z)}\|\omega_o(\tau)\|^2d\tau=\lambda_s^2(\mu-\chi(T(z)))^2.$$

Позначимо при $s\in[0,T(z)]$, $t\in[s,T(z)]$, $\lambda\in[0,1]$ відображення

$$M_s(t,z,\lambda)=M-\pi e^{tA}z+\lambda\lambda_s(\mu-\chi(T(z)))G_{F_1}(t-s)-\int_0^s F_1(t-\tau)\omega_o(\tau)d\tau.$$

Відмітимо, що (див. п.1.4)

1. $\bar{o}\in\partial M_s(T(z),z,\lambda)$, якщо $s=T(z)$ или $\lambda=1$.

2. $\bar{o}\in L\setminus M_s(T(z),z,\lambda)$, якщо $s\neq T(z)$, $\lambda\neq 1$.

Введемо функцію, що допускає безмежне значення й визначену при $s\in[0,T(z)]$, $\tau\in[T(z)-s,T(z)]$, $v\in\mathbb{R}^q$, $\omega\in\mathbb{R}^p$, $\lambda\in[0,1]$:

$$\beta_s(\tau,z,v,\omega,\lambda)=\sup\{\beta\geq 0: W(\tau,v,\omega)\cap\beta M_s(T(z),z,\lambda)\neq\emptyset\},$$

де

$$W(\tau,v,\omega)=F_1(\tau)S^p(F(\tau)v-\omega,N(T(z))\|v\|+\|\omega\|).$$

Відмітимо деякі властивості відображення $W(\tau,v,\omega)$:

1. $\bar{o}\in\operatorname{int}W(\tau,v,\omega) \iff \langle F(\tau)v,\omega\rangle > -N(T(z))\|v\|\|\omega\|$;

$\bar{o}\in\partial W(\tau,v,\omega) \iff \langle F(\tau)v,\omega\rangle = -N(T(z))\|v\|\|\omega\|$.

2. $\|F^*(\tau)\omega\| \neq N(T(z))\|\omega\| \Rightarrow \bar{o}\in\operatorname{int}W(\tau,v,\omega)$ або $v=\bar{o}$.

Можна показати (див. п.1.2 і п.1.4), що $\beta_s(\tau,z,v,\omega,\lambda)$ неперервна за сукупністю (τ,v,ω,λ) в усіх точках, у яких $\bar{o}\in L\setminus M_s(T(z),z,\lambda)$, $\tau>0$.

Зафіксуємо деякі $s\in(0,T(z))$ та $\lambda\in[0,1)$.

Розглянемо відображення

$$u_o(\tau,v,\omega,\lambda)=\Big\{u\in\mathbb{R}^p: F_1(\tau)u\in\Big[W(\tau,v,\omega)\cap\beta_s(\tau,z,v,\omega,\lambda)M_s(T(z),z,\lambda)\Big]\Big\},$$
$$T(z)-s\leq\tau\leq T(z),\ v\in\mathbb{R}^q,\ \omega\in\mathbb{R}^p.$$

Можна стверджувати (див. леми 1.4 та 1.6), що відображення

$$u_o(T(z)-\tau,v(\tau),\omega(\tau),\lambda)$$

однозначне та неперервне за сукупністю (τ,v,ω) і, отже, якщо $v(\tau)$ і $\omega(\tau)$ – вимірні функції, то і відображення $u_o(T(z)-\tau,v(\tau),\omega(\tau),\lambda)$ вимірне за $\tau\in[0,s]$.

Якщо

$$\int_0^s\beta_s(T(z)-\tau,z,v(\tau),\omega(\tau),\lambda)d\tau\geq 1,$$

то

$$\exists\, s^*\in[0,s]:\quad \int_0^{s^*}\beta_s(T(z)-\tau,z,v(\tau),\omega(\tau),\lambda)d\tau=1.$$

У цьому випадку припустимо

$u_o(\tau,v,\omega,\lambda)=\bar{o}$ при $T(z)-s\leq\tau\leq T(z)-s^*$, $v\in\mathbb{R}^q$, $\omega\in\mathbb{R}^p$.

Позначимо при $t\in[s,T(z)]$

$$h(t,v_s(\cdot),\lambda)=\int_0^s [F_2(t-\tau)-F_1(t-\tau)F(T(z)-\tau)]v(\tau)d\tau + \int_0^s F_1(t-\tau)u_0(T(z)-\tau,v(\tau),\omega_0(\tau),\lambda)d\tau;$$

$$k(t,v_s(\cdot)) = (\sqrt{\mu^2-\mu_s^2}-N(t-s)\sqrt{\nu^2-\nu_s^2})\lambda_s^{-1}(\mu-\chi(T(z)))^{-1},$$

де

$$\mu_s^2 = \int_0^s(N(T(z))\|v(\tau)\|+\|\omega_0(\tau)\|)^2d\tau,$$

$$\nu_s^2 = \int_0^s\langle v(\tau),v(\tau)\rangle d\tau;$$

$$T(z,v_s(\cdot),\lambda)=\inf\{t\geq s:\ h(t,v_s(\cdot),\lambda)\in M_s(t,z,k(t,v_s(\cdot)))\}.$$

Відмітимо деякі властивості відображення $T(z,v_s(\cdot),\lambda)$, які випливають з означення і перелічених вище властивостей:

I. $T(z,v_s(\cdot),\lambda) \leq T(z,v_0(\cdot),\lambda) = T(z)$ $\forall v(\cdot)$, що задовольняє (1.3).

2. $h(T,v_s(\cdot),\lambda) \in M_s(T,z,k(T,v_s(\cdot)))$,

де $T=T(z,v_s(\cdot),\lambda)$.

Звідси

$$\exists\ \omega_s(\tau)\ \ (\tau\in[0,T(z,v_s(\cdot),\lambda)-s]):$$

$$h(T,v_s(\cdot),\lambda) = m_s-\pi e^{TA}z - \int_0^{T-s} F_1(\tau)\omega_s(\tau)d\tau - \int_0^s F_1(T-\tau)\omega_0(\tau)d\tau,$$

$$\int_0^{T-s} \langle\omega_s(\tau),\omega_s(\tau)\rangle d\tau \leq k^2(T,v_s(\cdot))\lambda_s^2(\mu-\chi(T(z)))^2,$$

де $T= T(z,v_s(\cdot),\lambda)$, $m_s\in M$.

3. Якщо $\bar{0} \notin \partial M(T(z),z,\mu,\nu)$, то

$\exists s\in(0,T(z))$ і $\lambda\in[0,1)$: $h(T,v_s(\cdot),\lambda) \in \operatorname{int}M_s(T,z,k(T,v_s(\cdot)))$,

де $T=T(z)$, тобто

$T(z,v_s(\cdot),\lambda)<T(z)$ $\forall v(\cdot)$, що задовольняє (1.3).

Доведення цієї властивості наводиться в п.3.4.

Теорема 3.I. Нехай виконуються умови A, B і для деякого $z^0\in\mathbb{R}^n\setminus M^*$ виконується $T(z^0)<\infty$ і $\mu>\chi(T(z^0))>0$. Зафіксуємо деякі $s\in(0,T(z^0))$, $\lambda\in[0,1)$. Тоді траєкторія процесу (1.1) може бути приведена з початкового положення z^0 на термінальну множину не пізніше ніж за час $T(z^0,v_s(\cdot),\lambda)$.

Зауваження. Як видно з теореми, переслідувач на етапі $[0,s]$ використовує інформацію про

$$v_t(\cdot) = \{v(\tau),\ \tau\in[0,t]\},\ t\in[0,s],$$

а на етапі $[s,T(z^\circ,v_s(\cdot),\lambda)]$ – тільки інформацію про поточне значення $v(\tau)$ керування втікача. Застосування розв'язувальної функції на етапі $[0,s]$ дозволяє використовувати не тільки неминучі "помилки" втікача при

$$\bar{0} \notin \partial M(T(z^\circ),z^\circ,\mu,\nu)),$$

але й його поточні "помилки" в процесі гри.

Зауваження. Маючи на початковий момент як оцінку часу закінчення переслідування момент $T(z)$, за допомогою даної процедури в момент $s\in(0,T(z))$ можна уточнити цю оцінку, взявши за неї момент $T(z,v_s(\cdot),\lambda) \le T(z)$. Ясно, що подібну процедуру можна повторити багаторазово, якщо задати інтервал $\varepsilon>0$, тобто задати s_i і λ_i, $i\ge1$. Це дозволить протягом усього переслідування уточняти момент його закінчення у бік зменшення.

В главі 4 розглядається лінійна задача переслідування групою гравців одного втікача з інтегральними обмеженнями на керування гравців. Використовується той самий принцип, який був використаний у попередній главі. Він полягає в тому, щоб на основі прямого методу виявляти випадки, коли втікач змушений робити "помилки", і вивчати можливість використання цих "помилок" для скорочення часу переслідування. Але на відміну від попередньої глави, де такі "помилки" виявлялись у самій динаміці процесу, тут вони можуть виникати за рахунок збільшення числа переслідувачів та їх взаємного розташування відносно втікача.

Автор висловлює подяку своєму науковому керівникові Чикрію А.О. за постановку задачі та корисні поради.

Основні результати дисертаціі опубліковані у таких роботах:

1. *Безлагорычный В.В.* Метод разрешающих функций в линейной задаче преследования с интегральными ограничениями. - Киев, 1993. - 23 с. - (Препр. / АН Украины. Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова; 93-14).

2. *Безлагорычный В.В.* Метод разрешающих функций в линейных дифференциальных играх с разнотипными ограничениями / Теория и вычислительные проблемы оптимизации. - Киев : Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова АН Украины, 1993. - С.20-26.

3. *Безлагорычный В.В.* О линейных дифференціальных играх преследования одним и группой игроков с интегральными ограничениями. - Киев, 1993. - 24 с. - (Препр. / АН Украины. Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова; 93-33).

4. *Чикрий А.А., Безлагорычный В.В.* Метод разрешающих функций в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями / Автоматика. - 1993. - N4. - С.26-37.

Основні результати дисертації опубліковані в таких роботах:

1. Вольмандровский В.В. Метод разрешающих функций в линейных задачах преследования с интегральными ограничениями. — Киев, 1993. — 23 с. — (Препр. / АН Украины. Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова; 93-14).
2. Вольмандровский В.В. Метод разрешающих функций в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Теория и вычислительные проблемы оптимизации. — Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова АН Украины, 1993. — С.20-28.
3. Вольмандровский В.В. О линейных дифференциальных играх преследования одним и группой убегающих с интегральными ограничениями. — Киев, 1993. — [illegible] с. — (Препр. / АН Украины. Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова; 93-[illegible]).
4. Чикрий А.А., Вольмандровский В.В. Метод разрешающих функций в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Автоматика. — 1993. — №4. — С.26-37.

Підп. до друку 18.11.93. Формат 60×84/16. Папір друк. №2. Офс. друк. Ум. друк. арк. 0,93. Ум. фарбо-відб. 1,05. Обл.-вид. арк. 1,0. Тираж 100. Зам. 1588.

Редакційно-видавничий відділ з поліграфічною дільницею
Інституту кібернетики імені В. М. Глушкова АН України
252207 Київ 207, проспект Академіка Глушкова, 40