КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

На правах рукопису

СЕЙЛХАМЕР Анна Володимирівна

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ТОЧОК ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

01.01.09 — *математична кібернетика*

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

КИЇВ — 1993

КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

На правах рукопису

СЕЙЛХАМЕР Анна Володимирівна

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ТОЧОК ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

01.01.09 — *математична кібернетика*

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

КИЇВ — 1993

Робота виконана на кафедрі моделювання складних систем Київського університету імені Тараса Шевченка.

Науковий керівник - доктор фізико-математичних наук, професор НАКОНЕЧНИЙ О.Г.

Офіційні опоненти - доктор фізико-математичних наук, професор КНОПОВ П.С.

доктор фізико-математичних наук, професор КОЗАЧЕНКО Ю.В.

Провідна установа - інститут прикладної математики і механіки АН України, м.Донецьк

Захист відбудеться "27" грудня 1993 р. о на засіданні спеціалізованої ради Д 068.18.16 при Київському університеті імені Тараса Шевченка за адресою 252127, м.Київ - 127, проспект Академіка Глушкова, 6, факультет кібернетики, ауд. 40.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Київського університету імені Тараса Шевченка.

Автореферат розісланий "18" листопада 1993 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради КУЗЬМІН А.В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Різні проблеми, що виникають в задачах оптимального керування об'єктами в умовах стохастичних збурень, оцінювання невідомих параметрів по спостереженнях на траєкторіях складних систем, та задачах стохастичної оптимізації приводять до загальної моделі: знайти $\theta \in R^r$ таке, що мінімізує значення деякого випадкового поля $F_n(\theta)$, де n як правило показує кількість спостережень (позначимо через

$$\{\theta_n\} = \arg \inf_{\theta} F_n(\theta) \qquad (1)$$

множину точок мінімуму).

До цієї моделі зводиться класична задача оптимізації : знайти

$$\theta_0 = \arg \inf_{\theta} Ef(\theta,\xi) \qquad (2)$$

по спостереженнях $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, а також задача пошуку оцінки методу найменьших квадратів (МНК-оцінки) для моделі спостережень

$$y_k = \varphi(\theta_0, x_k) + \xi_k(x_k) \ , \ k=1,n, \qquad (3)$$

де x_k - деяка можливо стохастична послідовність, $\xi_k(\cdot)$ - випадковий шум.

Зауважимо, що для моделі (2) поле $F_n(\theta)$ має вигляд

$$F_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\theta, \xi_k),$$

а для моделі (3)

$$F_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |y_k - \varphi(\theta, x_k)|^2 \ .$$

Дослідженню асимптотичних властивостей оцінок в моделі (2) присвячені роботи Р.Ветса, Ю.Єрмольєва, І.Дупачевої, Г.Салінетті, Г.Флюга, А.Кінга, П.Кнопова та інших авторів.

В цих роботах в умовах незалежності вимірювань $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ вивчалися умови збіжності по ймовірності θ_n до θ_0, а також поведінка відхилення $\theta_n - \theta_0$.
Асимптотичні властивості МНК-оцінок вивчалися в монографіях А.Я.Дороговцева, М.М.Леоненко і О.В.Іванова та В.Л.Праказа Рао.
Ця проблема тісно пов'язана також із властивостями мінімаксних оцінок, що вивчалися в роботах Б.Н.Бубліка, О.Г.Наконечного, В.Покотило і з асимптотичними властивостями оцінок максимальної правдоподібності, які найбільш повно досліджені в монографії І.А.Ібрагімова і Р.З.Хасьмінського.

В роботі вивчається загальна модель (1), що об'єднує моделі (2) і (3) і дозволяє також вивчати ситуації залежних спостережень. В такій загальній постановці модель розглядається вперше.

Розглядається також зовсім нова модель: дослідити поведінку багатозначного або множинного процесу

$$\{\theta_n(t)\} = arg \inf_{\theta} F_n(\theta, t), \qquad (4)$$

де $F_n(\theta, t)$ -випадкове поле, $\theta \in R^r, \tau > 0$. Ця модель дає змогу вивчати властивості траєкторії множини $\{\theta_n(t)\}$ як процесу у часі і виникає в тих задачах, коли проведено $[nt]$ спостережень (або вони проводяться в точках k/n на проміжку $[0, t]$), і нам треба дослідити властивості екстремальних точок як функцій t.

Мета роботи. Дослідити асимптотичні (при $n \to \infty$) властивості послідовності $\{\theta_n\}$ в моделі (1) і множинного процесу $\{\theta_n(t)\}$ в моделі (4). За умов збіжності поля $F_n(\theta)$ (або $F_n(\theta, t)$) до граничного поля $F_0(\theta)$ (або $F_0(\theta, t)$) довести збіжність послідовності $\{\theta_n\}$ до θ_0 (або процесу $\{\theta_n(t)\}$ до $\theta_0(t)$), де .

$$\theta_0 = \arg \inf_\theta F_0(\theta),$$

$$\theta_0(t) = \arg\inf F_0(\theta, t),$$

а також дослідити збіжність послідовностей $V_n(\theta_n - \theta_0)$ і $V_n(\theta_n(t) - \theta_0(t))$ до граничного розподіла і процесу відповідно, де $V_n \to \infty$.

Методика дослідження. В роботі використовуються методи математичного аналізу, теорії функцій, методи теорії випадкових процесів і асимптотичні методи.

При дослідженні поведінки відхилення пропонується нова методика, яка базується на вивченні асимптотичної поведінки випадкового поля

$$A_n(z) = V_n^\alpha \left[F_n(\theta_0 + \frac{1}{V_n} z) - F_n(\theta_0) \right] \tag{5}$$

або

$$A_n(z,t) = V_n^\alpha \left[F_n(\theta_0 + \frac{1}{V_n} z, t) - F_n(\theta_0, t) \right] \tag{6}$$

Наукова новізна. В роботі розглянута узагальнена модель стохастичної оптимізації (I), що об'єднує моделі (2) і (3), і вперше розглянута модель (4).

Введені нові поняття збіжності по ймовірності і слабкої для послідовності випадкових множин, а також U -збіжності і J_2 -збіжності для множинних процесів (що є аналогами U і J_2 -збіжностями Скороходу для звичайних функцій).

Одержані загальні умови збіжності послідовності $\{\theta_n\}$ до θ_0 і умови U і J_2 -збіжності послідовності множинних процесів $\{\theta_n(t)\}$ до $\theta_0(t)$.

Одержані загальні умови збіжності послідовності $V_n(\tilde{\theta}_n - \theta_0)$, послідовності процесів $V_n(\tilde{\theta}_n(t) - \theta_0(t))$, де $\tilde{\theta}_n(\tilde{\theta}_n(t))$ - деяка послідовність точок локального мінімуму поля $F_n(\theta)$ $(F_n(\theta, t))$ до точки мінімума граничного поля $A_0(z)$ (відповідно $A_0(z, t)$) (див. (5), (6)).

На базі цих загальних результатів досліджені асимптотичні властивості послідовностей $\{\theta_n\}$ і $\{\theta_n(t)\}$ для моделі стохастичної оптимізації (2) і для моделі пошуку МНК-оцінки (3) з незалежними або марківськими похибками ξ_k. Для моделі (3) розглянуто також однорідний та неоднорідний випадки.

Практична цінність. Робота виконана у відповідності з планом наукових досліджень кафедри моделювання складних систем факультету кібернетики Київського університету.

Результати роботи були використані у наукових звітах по бюджетних темах "Статистичний аналіз еволюційних систем та моделей мережевих структур" і "Розробка інтелектуальної обчислювальної системи керування нелінійними об'єктами." (по програмі 6.4.1. Фонду прикладних досліджень Госкомітету України по науці і технологіям.

Результати роботи можуть бути застосовані в теорії оптимального керування , задачах стохастичного програмування та задачах статистики випадкових процесів.

Апробація роботи. Результати дисертації доповідались і обговорювались на таких конференціях та семінарах: Білоруська школа-семінар по теорії масового обслуговування: "Сети связи и сети ЭВМ. Анализ и применение." (м.Брест,1992 р.), "Математические методы исследования систем и сетей массового обслуживания"(м.Мінськ,1993 р.), на 6-ій Міжнародній Вільнюській конференції по теорії ймовірностей та математичній статистиці (1993 р.), наукових семінарах кафедри моделювання складних систем та прикладної статистики Київського університету.

Публікації. По темі дисертації опубліковано 3 роботи і одна знаходиться у друку .

Структура та обсяг роботи. Робота складається з вступу, трьох розділів та списку літератури. Обсяг роботи   сторінок.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі дається короткий огляд результатів, пов'язаних з тематикою роботи. Обгрунтована актуальність проведених досліджень, їх зв'язок. Стисло викладено основні результати.

Глава I присвячена вивченню асимптотичних властивостей екстремальних точок загальних випадкових полів.

§ 1.1 носить допоміжний характер. В ньому наводяться необхідні для подальшого результати про різні типи збіжності випадкових процесів та полів.

§ 1.2 присвячений вивченню асимптотичних власивостей екстремальних точок випадкових полів.

Нехай при кожному $n = 1,2,\dots$ $F_n(\theta)$, $\theta \in \Theta \subset R^r$ -випадкове поле із значеннями в R, Θ - обмежена замкнута множина. Припустимо, що функція $F_n(\theta)$ обмежена знизу при кожному n в області Θ.

Розглянемо спочатку випадок, коли поле $F_n(\theta)$ при кожному n неперервно по θ. Позначимо

$$\left\{ \theta_n \right\} = \arg \inf_{\theta \in \Theta} F_n(\theta)$$

де $\left\{ \theta_n \right\}$ означає множину всіх тих θ, на яких досягається інфімум функції $F_n(\theta)$. Має місце

Теорема 2.1. Нехай виконані слідуючі умови:

1. Існує детермінована функція $F_0(\theta)$, $\theta \in \Theta$ така, що для будь якого $\theta \in \Theta$ при $n \to \infty$ $F_n(\theta) \xrightarrow{P} F_0(\theta)$;
2. Для будь якого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{c\to+0} \overline{\lim_{n\to\infty}} P\left\{ \Delta_u(c,F_n(\cdot),\theta)) > \varepsilon \right\} = 0$$

3. Виконується умова відокремлюванності:

існує така точка

$\theta_0 \in \Theta$, що $F_0(\theta_0) < F_0(\theta)$ при $\theta \neq \theta_0$.

Тоді при $n\to\infty$

$$\left\{ \theta_n \right\} \xrightarrow{P} \theta_0 \qquad (7)$$

(θ_0 - точка строгого мінімума функції $F_0(\theta)$, а функція $F_0(\theta)$ при умовах 1 та 2 буде неперервною).

Тут $\Delta_u(c,F_n(\cdot),\theta)$ позначає модуль неперервності функції $F_0(\theta)$ на множині Θ, тобто

$\Delta_u(c,F_n(\cdot),\theta)=\sup \{|F(\theta_1)-F(\theta_2)|: |\theta_1-\theta_2| < c,\ \theta_1,\theta_2\in\Theta\}$,

а співвідношення (7) означає, що

$$\rho(\theta_0,\{\theta_n\}) \xrightarrow{P} 0,$$

де $\rho(a,A)=\sup\limits_{x\in A} |a-x|$, $|a|$-норма в просторі R^r.

При доведенні використовується метод Скорохода одного ймовірносного простору.

Далі результат теореми продовжується на випадок, коли поля можуть бути розривними, а граничне поле $F_0(\theta)$ - випадковим.

Через $\Delta(\Theta)$ позначимо простір функцій на Θ, які мають слідуючу властивість: кожна функція має не більш чим злічену кількість точок розриву та обмежена на Θ.

Позначимо через $\underline{F}(\theta)$ - нижне замикання функції $F(\theta)$, а саме

$$\underline{F}(\theta) = \underline{\lim}_{\theta'\to\theta} F(\theta')$$

(якщо $F(\theta)$ - випадкова то замикання визначається для кожної реалізації $F(\theta,\omega)$)

Нехай тепер $F_n(\theta)$, $\theta \in \Theta$ - послідовність функцій з $\Delta(\Theta)$.

Введемо поняття inf-збіжності випадкових полів. Позначимо через $\Delta\left[\alpha^{(t)}; \beta^{(t)}, t=\overline{1,r}\right]$ прямокутник в R^r виду:

$$\Delta\left[\alpha^{(t)}; \beta^{(t)}, t=\overline{1,r}\right]=$$
$$= \left\{ \theta : \theta=(\theta^{(1)},\dots,\theta^{(r)}),\ \alpha^{(t)} \leqslant \theta^{(t)} \leqslant \beta^{(t)},\ t=\overline{1,r} \right\}.$$

Означення 2.4. Послідовність випадкових функцій $F_n(\theta)$ inf-збігається до випадкової функції $F_0(\theta)$, $\theta \in \Theta$, якщо:

1. скінченновимірні розподіли $F_n(\theta)$ слабко збігаються до розподілів $F_0(\theta)$ на деякій зліченій всюди щільній множині Q з Θ ;
2. існує злічена всюди щільна числова множина точок $N \in R$ така, що для будь-якого прямокутника $\Delta\left[\alpha^{(t)}; \beta^{(t)}, t=\overline{1,r}\right]$ в Θ такого, що $\alpha^{(t)} \in N$, $\beta^{(t)} \in N$, $t=\overline{1,r}$

$$inf \left\{ \underline{F}_n(\theta):\ \theta \in \Delta\left[\alpha^{(t)}; \beta^{(t)}, t=\overline{1,r}\right] \right\} \overset{сл}{\Rightarrow}$$
$$\overset{сл}{\Rightarrow}\ inf \left\{ \underline{F}_0(\theta):\ \theta \in \Delta\left[\alpha^{(t)}; \beta^{(t)}, t=\overline{1,r}\right] \right\}.$$

Зауважимо, що поняття inf-збіжності близьке за змістом до поняття epi-збіжності, яке вводилося для послідовності детермінованих функцій в роботах Р.Ветса, І.Дупачєвої, Г.Салінетті.

. Має місце

Теорема 2.2. Нехай $F_n(\theta)$ - послідовність випадкових функцій і виконуються умови:

1. Існує випадкова функція $F_0(\theta)$ така, що $F_n(\theta)$ inf-збігається до випадкової функції $F_0(\theta)$, $\theta \in \Theta$;
2. Виконується умова відокремлюваності: з ймовірністю одиниця
$$F_0(\theta_0) < F_0(\tilde{\theta})$$
для будь-якої випадкової величини $\tilde{\theta}$ заданої на тому ж ймовір-

носному просторі, що й $F_0(\theta)$, і такої, що $\tilde{\theta} \neq \theta_0$ з ймовірністю одиниця, де

$$\theta_0 = \arg\inf_{\theta} \underline{F}_0(\theta) .$$

Тоді

$$\left\{ \theta_n \right\} \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} \theta_0. \qquad (8)$$

Зауважимо, що в силу умови відокремлюваності інфімум $\underset{-0}{F}(\theta)$ досягається в одній єдиній точці θ_0.

Умова (8) означає, що для будь-якої послідовності точок $\tilde{\theta}_n \in (\theta_n)$

$$\tilde{\theta}_n \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} \theta_0.$$

Далі вивчається поведінка нормованного відхилення точок (θ_n) від граничної точки θ_0. Розглядається випадок, коли функція $F_0(\theta)$ детермінована.

Введемо випадкове поле :

$$A_n(z) = v_n^{\alpha} \left[F_n \left[\theta_0 + \frac{1}{v_n} z\right] - F_n(\theta_0)\right] .$$

Теорема 2.4. Нехай виконані умови теореми 2.3 та існує невипадкова послідовність $v_n \to \infty$ та $\alpha > 0$ такі, що для будь-якого $L>0$ поле $A_n(z)$ $\inf$-збігається до випадкового поля $A_0(z)$ в будь-якій області $|z| \leq L$ і випадкова точка

$$æ_0 = \arg\inf_{z} \underline{A}_0(z)$$

є власною випадковою величиною (тобто $P\left\{|æ_0| < \infty\right\} = 1$) і з ймовірністю одиниця задовольняє умові відокремлюваності.

Тоді існує послідовність точок локального мінімума $\tilde{\theta}_n$ функції $F_n(\theta)$ така, що

$$v_n(\tilde{\theta}_n - \theta_0) \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} æ_0.$$

Розглянуто декілька прикладів.

В теоремі 2.5 розглянутий випадок рівномірної збіжності, умови якої легше перевіряються.

В § 1.3 вивчається нова оригінальна модель, яка дозволяє дослідити поведінку траєкторій екстремальних точок (або множин) як випадкових процесів.

Розглянемо послідовність випадкових полів

$F_n(\theta,t) \quad \theta \in \Theta \in R^r, \ t>0$

що залежать від додаткового параметра t. У реальних задачах t як правило грає роль часу і такі моделі виникають, коли спостереження проводяться на проміжку часу $[0,t]$ і потрібно проаналізувати залежність оцінок від величини t.

Введемо множину точок інфінімума функції $F_n(\theta,t)$

$$\{ \theta_n(t) \} = \arg \inf_{\theta\in\Theta} F_n(\theta,t)$$

і будемо досліджувати її властивості в залежності від параметра t.

Зауважимо, що при кожному t значення $\{\theta_n(t)\}$ утворюють деяку множину. В подальшому такі об'єкти $\{g(t)\}$, для яких при кожному t значення $\{g(t)\}$ утворюють деяку множину будемо називати багатозначними або множинними процесами.

Теорема 3.1. Нехай існує невипадкове поле $F_0(\theta,t)$, $\theta \in \Theta, t>0$ таке, що для довільного t з деякої множини $Q \subset [0,\infty)$ виконуються слідуючі умови:

1. $F_n(\theta,t) \xrightarrow{P} F_0(\theta,t), \ \theta \in \mathbf{Q}$,

де $\mathbf{Q}$ - деяка злічена всюди щільна множина точок в Θ;

2. виконується умова 2 теореми 2.3;

3. точка

$$\theta_0(t) = \arg \inf_{\theta\in\Theta} F_0(\theta,t)$$

задовільняє умові відокремлюванності.

Тоді

$$\{ \theta_n(t)\} \xrightarrow{P} \theta_0(t),\ t \in D$$

Теорема 3.2 переносить ці результати на той випадок, коли функція $F_0(\theta,t)$ - випадкова.

Далі досліджується поведінка траєкторій множинних процесів $\{\theta_n(t)\}$, тобто умови збіжності в одній з топологій.

Наведений приклад, який показує, що у випадку розривних полів $F_0(\theta,t)$ inf-збіжність недостатня навіть для збіжності $\{\theta_n(t)\}$ в самій слабкій топології Скорохода M_2. Тому далі розглядається більш сильна рівномірна збіжність $F_n(\theta,t)$.

Теорема 3.3. Нехай $F_n(\theta,t)$, $\theta \in \Theta$, $t \in [0,T]$ -послідовність невипадкових полів і існує неперервне поле $F_0(\theta,t)$, $\theta \in \Theta$, $t \in [0,T]$ таке, що виконуються умови:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(\theta,t) = F_0(\theta,t)$, $(\theta,t) \in Q$

де Q - деяка злічена всюди щільна множина точок з $\Theta\times[0,T]$;

2. $\lim\limits_{c\to+0} \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sup\left\{\left|F_n(\theta_1,t_1) - F_n(\theta_2,t_2)\right| : |\theta_1-\theta_2|<c,\ |t_1-t_2|<c,\ \theta_1,\theta_2\in\Theta,\ 0 \leqslant t_1,t_2 \leqslant T\right\}$

3. точка $\theta_0(t) = \arg \inf\limits_{\theta\in\Theta} F_0(\theta,t)$ для довільного $t \in [0,T]$

задовольняє умові відокремлюваності.

Тоді при $n\to\infty$

$$\sup_{t\in[0,T]} \rho(\theta_0(t),\{\theta_n(t)\}) \to 0$$

де $\rho(\theta,G) = \sup\limits_{g\in G} |\theta-g|$.

В теоремі 3.4 цей результат переноситься на випадок, коли $F_0(\theta,t)$ - теж випадкове поле.

Далі розглядається поведінка відхилення $\{\theta_n(t)\}$ від $\{\theta_0(t)\}$. Розглянемо випадкове поле виду

$$A_n(z,t) = v_n^{\alpha}\left[F_n(\theta_0(t) + \frac{1}{v_n} z),\ t \right] - F_n(\theta_0(t),z)\right].$$

Теорема 3.5. Нехай $F_n(\theta,t)$, $\theta \in \Theta$, $t \in [0,T]$ послідовність випадкових полів і існує невипадкове поле $F_0(\theta,t)$ і випадкове поле $A_0(z,t)$ такі, що:

1. для довільних $(\theta,t) \in Q$

   $F_n(\theta,t) \overset{P}{\Rightarrow} F_0(\theta,t)$,
2. виконується умова(9);
3. виконується умова відокремлюваності для $\theta_0(t)$, $t \in [0,T]$;
4. існує $\alpha>0$ таке, що поля $A_n(z,t)$ та $A_0(z,t)$ по аргументам (z,t) задовольняють умові I. теореми 3.4.
5. поле $A_n(z,t)$ по парі (z,t) задовольняє умові 2. теореми 3.3.
6. точка $æ_0(t) = \arg\inf\limits_z A_0(z,t)$ для довільного $t \in [0,T]$ є власною випадковою величиною та з ймовірністю одиниця задовольняє умові відокремлюваності.

Тоді існує послідовність процесів $\tilde\theta_n(t)$, $t \in [0,T]$ таких, що при довільному t $\tilde\theta_n(t)$ - точка локального мінімума функції $F_n(\theta,t)$ і послідовність процесів $æ_n(t) = v_n(\tilde\theta_n(t) - \theta_0(t))$ U - збігається до $æ_0(t)$ на відрізку $[0,T]$.

Наприклад, нехай $\theta \subset R^r$ і поле $A_0(z,t)$ має вигляд

$$A_0(z,t) = \gamma_0(t) + (Bw(t),z) + (Cz,z)t,$$

де $\gamma_0(t)$ - довільний випадковий процес, $w(t)$ - стандартний вінеровський процес у R^r, C - додатньо визначена матриця. Тут умова відокремлюваності порушена при $t=0$. Якщо $t>0$,

$$æ_0(t) = \frac{1}{t}(C + C^*)^{-1} Bw(t)$$

і U - збіжність в умовах теореми має місце для довільного проміжка $[t_0,T]$, де $t_0>0$.

В § 1.4 розглядається збіжність траєкторій множинних процесів $\{\theta_n(t)\}$ до розривних процесів.

Розглянемо той випадок ,коли поле $F_0(\theta,t)$ неперервно, але може порушуватися умова відокремлюванності.

Нехай $F_0(\theta,t)$, $\theta \in \Theta$, $t \in [0,T]$-детерміноване поле. Вводиться аналог простору Скорохода для множинного процесу

$$\left\{\theta_0(t)\right\}= \arg\inf F_0(\theta,t).$$

Будемо говорити, що детерміноване поле $F_0(\theta,t)$ належить класу А, якщо діаметр d(t) множини $\left\{\theta_0(t)\right\}$ має не більш ніж злічену кількість точок t' таких що $d(t')>0$ і існують односторонні границі $\theta_0(t'-0)$, $\theta_0(t'+0)$.(при цьому процесс $\{\theta_0(t)\}$ належить класу D).

Позначимо $V_\varepsilon(G)=\{a:d(a,G)<\varepsilon\}$, де $d(a,G)=\inf\limits_{g\in G} |a-g|$.

Означення 4.3. Послідовність множинних процесів $\{g_n(t)\}$ J_2-збігається до процесу $\{g_0(t)\}$ з класу D, якщо для довільного $\varepsilon>0$ починаючи з деякого номеру n_ε при $n>n_\varepsilon$
$G(\{g_n(\cdot)\}) \subset V_\varepsilon(G(\{g_0(\cdot)\}))$, де $G(\{g(\cdot)\})$- графік процесу $g(\cdot)$, тобто $G(\{g(\cdot)\})=\{(t,g):g\in\{g(t)\}\}$.

Теорема 4.1. Нехай $F_n(\theta,t)$, $\theta \in \Theta$, $t \in [0,T]$- послідовність детермінованих полів , виконуються умови I та 2 теореми 3.3., поле $F_0(\theta,t)$ належить класу А. Тоді послідовність множинних процесів $\{\theta_n(t)\}$ J_2-збігається до $\{\theta_0(t)\}$ на відрізку $[0,T]$.

Далі одержаний результат переноситься на стохастичний випадок.

Вводиться модуль неперервності відносно J_2-збіжності, сформульований критерій J_2-збіжності (теорема 4.2), а також доведена теорема 4.3, що переносить результат теореми 4.1 на випадок випадкових полів.

Глава II присвячена вивченню асимптотичних властивостей екстремальних точок функцій з похибками при вимірюваннях.

Методика вивчення базується на загальних теоеретичних результатах, отриманих в § 1.2, 1.3.

В § 2.1 розглядається випадок, коли похибки при різних вимірюваннях є незалежними випадковими полями.

Розглянемо задачу оцінювання значення

$$\theta_0 = \arg\inf_{\theta} F(\theta) \tag{10}$$

у випадку коли ми можемо спостерігати величини

$$R_k(\theta)=F(\theta)+\xi_k(\theta), \quad k=1,2,\ldots,n, \tag{11}$$

де $\xi_k(\theta)$-випадкові похибки.

Ця задача також може бути сформульована як задача знаходження величини $\theta_0=\arg\inf_{\theta} E\gamma(\theta)$,

по спостереженням $\gamma_1(\theta),\ldots,\gamma_n(\theta)$, де $E\gamma(\theta)=F(\theta)$.

Розглянемо задачу (10),(11), покладемо

$$F_n(\theta)= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} R_k(\theta)$$

і дослідимо асимптотичну поведінку точок множини

$$\{\theta_n\}= \arg\inf_{\theta} F_n(\theta)$$

Припустимо, що випадкові поля $\xi_k(\theta),\theta\in\Theta$ при різних k незалежні у сукупності та їх розподіли не залежать від k.

Теорема 1.1. Нехай точка θ_0 задовільняє умові відокремлюваності , множина Θ-обмежена,

$$E\xi_1(\theta)=0,\theta\in Q ,$$

де Q-деяка злічена всюди щільна множина точок з Θ, і

$$\lim_{c\to 0} E\Delta_u(c,\xi_1(\cdot),\theta)=0. \tag{12}$$

Тоді $\quad \{\theta_n\}\xrightarrow{P}\theta_0$.

Зауважимо , що для виконання умови (12) достатньо, щоб з ймовірністю 1 існувала похідна $\xi_1'(\theta)$ в кожній точці θ (якщо r>1 $\xi_1'(\theta)$ буде вектором) і $\quad \sup_{\theta} E|\xi_1'(\theta)|< C$.

Наведені більш ослаблені варіанти умови (12) для того випадку, коли θ-одномірний параметр, а $\xi_1(\theta)$-процес з незалежними приростами або марківський процес.

Дослідимо тепер поведінку відхілення точок $\{\theta_n\}$ від θ_0.

Розглянемо випадкове поле

$$q_n(z)=V_n^{\alpha} n^{-1} \sum_{k=1}^{n} (\xi_k(\theta_0+ \frac{1}{V_n} z) - \xi_k(\theta_0))$$

Теорема 1.2. Нехай виконуються умови теореми I.I. та існує послідовність $V_n\to\infty$ і $\alpha>0$ такі, що для довільного $L>0$:

1. рівномірно у області $|z|\leq L$

$$h^{-\alpha}(F(\theta_0+hz) - F(\theta_0)) \xrightarrow[h\to 0]{} f(z)$$

2. скінченновимірні розподіли поля $q_n(z)$ слабко збігаються до розподілів неперервного поля $q(z)$ в усіх точках деякої .

зліченої всюди щільної множини Q з простору R^r.

3. для довільного $L>0$, $\varepsilon>0$

$$\lim_{c\to+0} \overline{\lim_{n\to\infty}} P\left\{ sup\ |q_n(z_1)-q_n(z_2)|:|z_1-z_2|<c,\ |z_1|v|z_2|<L)>\varepsilon \right\} = 0$$

4. випадкова точка

$$\text{æ}_0=\arg\inf_{z} (f(z)+q(z))$$

є власною випадковою величиною і з ймовірністю одиниця задовольняє умові відокремлюваності .

Тоді існує послідовність точок локального мінімуму $\tilde{\theta}_n$

функції $F_n(\theta)$ така, що

$$V_n(\tilde{\theta}_n-\theta_0)\xrightarrow{\text{сл}}\text{æ}_0.$$

Основну складність у конкретних моделях складає перевірка умов 2,3 нашої теореми . Розглянуті деякі наслідки для полів, що в околиці точки θ_0 допускають слідуючий асимптотичний розклад:

$$\xi_1(\theta_0 + \frac{1}{v_n} z)=\xi_1(\theta_0)+a(z,\gamma_1) \frac{\sqrt{n}}{v_n^{\alpha}} + \delta_{n1}(z),$$

де $a(z,v)$ - детермінована функція, γ_1-деяка випадкова величина,

$Ea(z,\gamma_1)=0$, $Ea(z_1,\gamma_1)a(z_2,\gamma_1)=r(z_1,z_2)$

або

$$\xi_1\left[\theta_0+\frac{1}{v_n} z\right]=\xi_1(\theta_0)+(\alpha(z),\gamma_1(z))\frac{\sqrt{n}}{v_n^{\alpha}} + \delta_{n1}(z),$$

де $\alpha(z)$-деяка детермінована функція, $\gamma_1(z)$-випадкове поле,

а $v_n^{\alpha} E\sup_z |\delta_{n1}(z)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Розглянуто два приклади. В 1-му $\xi_k(\theta)=(b(\theta),\gamma_k)$,

де $\gamma_k, k\geq 1$ - незалежні однаково розподілені випадкові вектори,

а в 2-му $\xi_k(\theta)=(b(\theta),\bar{w}_k(\theta))$,

де $\bar{w}_k(\theta)$- незалежні багатокомпонентні вінерівські процеси.

В § 2.2 вивчається поведінка траєкторій екстремальних точок.

Розглянемо задачу (10)у випадку, коли ми спостерігаємо величини

$R_k(\theta)=F(\theta)+\xi_k(\theta)$, $k=1,2,\dots,[nt]$.

Покладемо

$$F_n(\theta,t)= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{[nt]} R_k(\theta) ,$$

Будемо досліджувати асимптотичну поведінку точок випадкової множини

$\{\theta_n(t)\} = \arg\inf_{\theta} F_n(\theta,t)$

як множинного процесу по t.

Припустимо, що випадкові поля $\xi_k(\theta)$, $\theta \in \Theta$ при різних к незалежні у сукупності і їх розподіли не залежать від індекса к.

Теорема 2.1. Нехай точка θ_0 задовільняє умові відокремленості та $E\xi_1(\theta)=0$, $\theta \in \Theta$, де Θ - деяка злічена всюди щільна множина точок в Θ

і $\lim\limits_{c \to +0} E\Delta_u(c,\xi_1(.),\theta)=0.$

Тоді для будь-якого $t>0$

$$\{\theta_n(t)\} \xrightarrow{P} \theta_0$$

Дослідимо тепер збіжність множинного процесу $\{\theta_n(t)\}$ в U - топології.

Теорема 2.2. Нехай функція $F(\theta)$ неперервна і виконані умови теореми 2.I. Тоді для будь-яких $t_0>0$, $T>0$

$$\sup_{t_0 \leqslant t \leqslant T} \rho(\theta_0, \{\theta_n(t)\} \xrightarrow{P} 0$$

Дослідимо тепер поведінку відхилення множинного процесу $\{\theta_n(t)\}$ від θ_0. Введемо випадкові поля

$$A_n(z,t)=V_n^{\alpha}(F_n(\theta_0+\frac{1}{V_n} z,t)- F_n(\theta_0,t)),\ t>0$$

$$q_n(z,t)=V_n^{\alpha}\, n_n^{-1} \sum_{k=1}^{[nt]} (\xi_k\ (\theta_0+\frac{1}{V_n} z,t) - \xi_k(\theta_0))$$

і багатовимірну характеристичну функцію

$$G_n(\lambda_1,\dots,\lambda_k,z_1,\dots,z_k)=E\ exp\ \{i\ V_n^{\alpha}\ n^{-1}\sum_{j=1}^{r} \lambda_j(\xi_1(\theta_0+\frac{1}{V_n} z_j) - \xi_1(\theta_0))\}$$

$k=1,2,\dots,\ \lambda_1,\dots,\lambda_k \in (-\infty,\infty),\ z_1,\dots,z_k \in R^r$

Теорема 2.3. Нехай виконуються умови теореми 2.1 та існує послідовність $V_n \to \infty$ і $\alpha>0$ такі, що для довільного $L>0$:

1. рівномірно в області $|z| \leqslant L$

$$h^{-\alpha}\ (F(\theta_0+ hz)- F(\theta_0)) \xrightarrow[h \to 0]{} f(z)\ ;$$

2. існує сукупність функцій $\Phi(\lambda_1,\dots,\lambda_k,z_1,\dots,z_k)$, таких, що

$\Phi(\pm 0,\dots \pm 0,\ z_1,\dots,z_k)=0$ для будь-яких $z_1,\dots,z_k \in R^r$ і

$$\lim_{n \to \infty} n\ (G_n(\lambda_1,\dots,\lambda_k,z_1,\dots,z_k)-1)= \Phi(\lambda_1,\dots,\lambda_k,z_1,\dots,z_k),$$

$\lambda_1,\dots,\lambda_k \in (-\infty,\infty),\ z_1,\dots,z_k \in R^r,\ k=1,2,\dots;$

3. Випадкове поле $q_n(z,t)$ по θ,t задовільняє умові слабкої компактності

відносно U- збіжності.

5. Випадкова точка

$$æ_0(t)= \arg\inf (tf(z)+q(z,t))$$

при кожному $t>0$ є власною випадковою величиною і з імовірністю 1 задовільняє умову відокремлюванності, де $q(z,t)$ - неперервне з ймовірністю 1 по (z,t) випадкове поле, скінченновимірні розподіли якого визначається таким чином:

$$E\exp\{i\sum_{j=1}^{r}\lambda_j\, q(z_j,t)\}= \exp\{t\,\Phi(\lambda_1,\dots,\lambda_k,z_1,\dots,z_k)\}$$

і для будь-яких $z_j\in R^r$, $j=\overline{1,r}$,

$t_1<t_2<\dots<t_k$

$$E\exp\{i\sum_{j=1}^{r}\lambda_j\, q(z_j,t_j)\}= \exp\{t_1\Phi(\lambda_1,\dots,\lambda_k,z_1,\dots,z_k)\}\times$$

$$\times\exp\{(t_2-t_1)\,\phi(\lambda_2,\dots,\lambda_k,z_2,\dots,z_k)\}\times\dots\times$$

$$\times\exp\{(t_k-t_{k-1})\,\phi(\lambda_k,z_k)\}.$$

Тоді існує послідовність процесів $\tilde\theta_n(t)$, таких, що для будь-якого $t>0$ $\tilde\theta_n(t)$ є точкою локального мінімуму функції $F_n(\theta,t)$ і послідовність процесів

$$æ_n(t)= V_n(\tilde\theta_n(t)-\theta_0)$$

на будь-якому проміжку $[t_0,T]$, $t_0>0$, U- збігається до $æ_0(t)$.

Розглянуто деякі наслідки, що випливають з теореми 2.3 і деякі приклади.

В § 2.3 розглядається модель оцінювання екстремальної точки функції, якщо випадкові похибки є залежними через марківську послідовність.

Розглянемо знову задачу (10)

у випадку, коли ми спостерігаємо випадкові величини

$$R_k(\theta)=F(\theta)+\xi_k(\theta),\ k=1,2,\dots n,\ \text{де}$$

$\xi_k(\theta)=b(\theta,x_k)$, x_k, $k\geq 1$ - однорідний Марківський Процес (МП) із скінченою кількістю станів $\{1,2,\ldots d\}$, а $b(\theta,i),\theta\in\Theta, i=\overline{1,d}$- детерміновані функції. Будемо вважати, що $x_k, k\geq 1$ - незвідний МП. Тоді він має стаціонарний розподіл, який ми позначимо через $\pi_i, i=\overline{1,d}$.

Теорема 3.1. Нехай точка θ_0 задовільняє умові відокремлюванності, функція $b(\theta,i)$ обмежена на θ для кожного $i=\overline{1,d}$,

$$\sum_{i=1}^{d}\pi_i b(\theta,i)=0.$$

Тоді

$$\{\theta_n\}\xrightarrow{P}\theta_0 .$$

Нехай крім того існують $\alpha>0,\beta>0,\alpha>\beta$ такі, що для довільного $L>0$ рівномірно в області $|z|<L$

$$h^{-\alpha}(F(\theta_0+hz)-F(\theta_0))\xrightarrow[h\to 0]{}f(z),$$

і $\quad h^{-\beta}(b(\theta_0+hz,i)-b(\theta_0,i))\longrightarrow a(z,i),\ i=\overline{1,d},$

де функції $f(z,i)$ і $a(z,i)$ неперевні, і точка

$$\varkappa_0=\arg\inf_z\,(f(z)+q(z))$$

є власною випадковою величиною і з ймовірністю одиниця задовільняє умові відокремлюванності, де

$$q(z)=(a(z),N(0,G^2)),\quad \text{а}\quad a(z)=(a(z,1),\ldots a(z,d)).$$

Тоді існує послідовність точок локального мінімуму $\tilde\theta_n$ функції $F_n(\theta)$ така, що

$$n^{\frac{1}{2(\alpha-\beta)}}(\tilde\theta_n-\theta_0)\overset{\text{сл}}{\Longrightarrow}\varkappa_0.$$

В теоремі 3.2 доводиться U-збіжність процесів $n^{\frac{1}{2(\alpha-\beta)}}(\tilde\theta_n(t)-\theta_0)$ до процесу виду $\frac{1}{t}(B+B^*)^{-1}Q^*Gw(t)$ на проміжку $[t_0,T]$, $t_0>0$.

В теоремі 3.3 сформульовані результати, аналогічні теоремі 3.2 для більш загальної моделі, де

$$\xi_k(\theta)=b(\theta,\gamma_k(x_k),x_k),k\geq 1.$$

В **главі III** вивчаються асимптотичні властивості МНК-оцінок для нелінійної функції регресії у випадку незалежних та марківських похибок. Метод дослідження базується на загальних теоретичних результатах §1.2, 1.3 глави I.

Нехай $g(\theta)$, $\theta\in\Theta\subset R^r$ - векторозначна функція в просторі R^m, а $\xi_1,\xi_2,\ldots$-незалежні однаково розподілені випадкові вектори в R^m такі, що $\quad E\xi_1=0,\ E\xi_1\xi_1^*=R^2$

Спостерігаються величини

$$y_k=g(\theta_0)+\xi_k,\ k=1,2,\ldots,n.$$

Дослідимо властивості оцінки невідомого параметру θ_0 за методом найменших квадратів. Позначимо

$$F_n(\theta)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|y_k-g(\theta)|^2.$$

Як відомо МНК-оцінка визначається співвідношенням

$$(\theta_n)=\arg\inf_{\theta} F_n(\theta).$$

Теорема 1.1. Нехай $g(\theta)$-обмежена функція і

$$g(\theta)\neq g(\theta_0) \text{ при } \theta\neq\theta_0.$$

Тоді $\quad (\theta_n)\xrightarrow{P}\theta_0.$

Далі нехай існує $\beta>0$ таке, що при $h\to 0$ рівномірно в кожній області $|z|\leq L$

$$h^{-\beta}(g(\theta_0+hz)-g(\theta_0))\longrightarrow a(z),$$

де $a(z)$- неперервна, і рівняння

$$a(z)=y$$

має єдиний розв'язок при будь-якому $y\in R^m$.

Тоді існує послідовність точок локального мінімуму $\tilde{\theta}_n$ поля $F_n(\theta)$ таких, що

$$n^{1/2\beta}\,(\tilde{\theta}_n-\theta_0) \overset{\text{сл}}{\Longrightarrow} a^{-1}(N(0,R^2)),$$

де $a^{-1}(z)$ - функція, обернена до $a(z)$.

Теорема 1.1 легко переноситься на випадок ,коли ми маємо спостереження y_k, $k=1,2,\dots,[nt]$ і хочемо дослідити поведінку траєкторій множинних процесів $\{\theta_n(t)\}$, де

$$\{\theta_n(t)\}=\arg\inf_{\theta} F_n(\theta,t),$$

а

$$F_n(\theta,t)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{[nt]} |y_k-g(\theta)|^2.$$

Ці результати сформульовані в теоремі 1.2 , в якій граничний процес $æ_0(t)$ має вигляд

$$æ_0(t)=a^{-1}\left(\frac{1}{t}\,Rw(t)\right).$$

Розглянуто приклад недиференційовної в точці θ_0 функції регресії виду

$$g(\theta)=\begin{cases} \alpha_1(\theta-\theta_0), & \theta_0<\theta\le b,\\ \alpha_2(\theta-\theta_0), & a\le\theta<\theta_0,\ \alpha_1,\alpha_2>0. \end{cases}$$

Тоді процес $æ_0(t)$ має вигляд

$$æ_0(t)=\alpha_1^{-1}t^{-1}\sigma w(t)\chi(w(t)>0)+\alpha_2^{-1}t^{-1}\sigma w(t)\chi(w(t)<0).$$

Цей приклад поширено на випадок багатомірного параметру θ.

В § 3.2 розглядається неоднорідна модель, яка може виникати в задачах оцінювання параметрів і оптимального керування при спостереженнях на траєкторіях деякої системи .

Припустимо, що задана деяка послідовність $x_1,x_2,\dots x_n$, яка може бути послідовністю моментів часу, послідовними значеннями траєкторії деякої системи або взагалі може бути векторозначною і носити випадковий характер. Будемо вважати, що послідовність $\{x_k\}$ приймає значення в деякій множині X. Нехай також задана параметрична сукупність детермінованих функцій $g(\theta,x),\theta\in\Theta,x\in X$ із значеннями в R^m і незалежні сукупності випадкових векторів в R^m

$$\{\xi_k(x),\ x\in X\},\ k=1,2,\dots,$$

розподіли яких не залежать від індексу k , а самі величини не залежать від послідовності $\{x_k\}$, якщо вона випадкова.

В загальній ситуації точки x_k, $k\geq 1$ можуть залежати від загальної кількості випробувань n. Наприклад при спостереженнях на траєкторії $x(t)$ деякої системи можна вибирати точки з шагом $1/n$ і тоді $x_k=x(k/n)$.

Тому будемо вважати, що $x_k=x_{nk}$, $k=1,2,\dots$.

Тоді модель спостережень має вигляд

$$y_{nk}=g(\theta_0,x_{nk})+\xi_k(x_{nk}),\ k=1,2,\dots$$

Позначимо

$$F_n(\theta)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|y_{nk}-g(\theta,x_{nk})|^2$$

Припустимо, що послідовність $\{x_{nk}\}$ задовільняє деякій умові усереднення, а саме: існує неперевна функція $x(u)$ така, що для будь-якої неперевної обмеженої функції $f(x)$, $x\in X$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{[nt]}f(x_{nk})\longrightarrow\int_0^t f(x(u))du$$

В теоремі 2.1 приведені умови, при яких послідовність $\{\theta_n(t)\}$ U-збігається до θ_0.

В теоремах 2.2 і 2.3 вивчена поведінка відхилення $\theta_n(t)$ від θ_0. При цьому розглянуто два випадки:

1) функція $g(\theta,x)$ двічі неперервно диференційовна по θ;

2) $g(\theta,x)=(g(\theta),f(x))$.

В обох випадках у явному вигляді виписаний вигляд граничного процесу $\varkappa_0(t)$.

Розглянуто приклад, в якому

$$y_k=(g(\theta_0),f(x(k/n)))+\xi_k(x(k/n)),$$

де $x(t)$, $t\in[0,T]$ - деяка неперервна функція.

В § 3.3 розглядається більш загальна схема нелінійної регресії, яка може виникати в задачах оцінювання параметрів при спостереженнях на траєкторії деякої системи в умовах впливу випадкового зовнішнього середовища.

Припустимо, що задана неперервна функція $x(t)$, $t\in[0,T]$ із значеннями в X, сукупність функцій $g(\theta,x,z),\theta\in\Theta,x\in X,z\in Z$, однорідний марківський процес z_k, $k=1,2,\ldots,z_k\in Z$ і незалежні сукупності випадкових величин $\{\xi_k(x,z),x\in X,z\in Z\}$, $k=1,2\ldots$,розподіли яких не залежать від індекса k.

Спостереження проводяться в моменти часу $t_k=k/n$, $k=1,2,\ldots$ і модель спостережень має вигляд

$$y_k=g(\theta_0,x_k,z_k) + \xi_k(x_k,z_k),\ k=1,2,\ldots$$

Вказані умови ,при яких для будь-яких $0<t_0<T<\infty$

$$\sup_{t_0\leqslant t\leqslant T} \rho(\theta_0,\{\theta_n(t)\})\xrightarrow{P}0$$

Аналогічно попередньому параграфу вивчена також поведінка відхилення, як множинного процесу.

В додатку наведені алгоритми і програми моделювання марківських процесів з дискретним та неперервним часом, та довільною кількістю станів, вінерівського та дифузійного процесів, пошуку екстремальних точок для моделі (2) в умовах незалежних і марківських збурень і розглянуті конкретні приклади, які реалізовані на ЕОМ типу IBM PC XT/AT.

Автор висловлює щиру подяку науковому керівнику професору Олександру Григоровичу Наконечному за постійну підтримку і увагу до роботи.

Основні результати дисертації опубліковані в роботах:

I.Анисимова А.В. " Асимптотические свойства МНК-оценок при марковских возмущениях ". Сети связи и сети ЭВМ. Анализ и применение. Тез. докл. научн.школы-семинара, Минск, 1992. с.9.

2.Анисимова А.В. " Оценивание параметров СМО в переходных режимах ". Математ. методы исслед. сист.и сетей массового обслуж. Тез.докл.научн.шк.-семинара, Минск, 1993. с.I2-I3.

3.Anna Anisimova " Asymptotic properties of extremal points of random functions and it's applications in statistics "

Тез.докл. 6-й Міжнародній Вільнюській конференції по теорії ймовірностей та математичн. статист. 1993, с.I5.

4.Анісімов В.В., Сейлхамер Г.В. " Асимптотичні властивості екстремальних точок випадкових полів ", Теорія ймовірн. та математ. статистика, Київ (у друку).

МГП "Тираж"
Тираж 100 экз. Заказ N 3276
Печать офсетная. Формат 60/84