Академия Наук Украины
Институт Математики

На правах рукописи

Нгуен Ван Минь

ПОЛУГРУППЫ В КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

01.01.02 - дифференциальные уравнения

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Киев - 1993

Работа выполнена на кафедре математических методов теории управления Белорусского государственного университета

Официальные оппоненты: академик АН Украины Далецкий Ю.Л.

доктор физико-математических наук, профессор Перестюк Н.А.

доктор физико-математических наук, профессор Слюсарчук В.Е.

Ведущая организация: Институт математики АН Белорусии

Защита состоится 14 - 12 1993 г. в 15 часов на заседании специализированного ученого совета Д 016.50.02 при Институте математики АН Украины по адресу: 252601 Киев 4,ГСП, ул.Терещенковская, 3

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Автореферат разослан 12 - 11 1993 года

Ученый секретарь
специализированного
ученого совета А.Ю.Лучка

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Настоящая диссертационая работа посвящена исследованию асимптотического поведения решений и свойств устойчивости такого поведения при возмущениях для различных типов эволюционных дифференциальных уравнений.

Пусть $\mathcal{X}$ - некоторое банаховое пространство и $J = [0,+\infty)$ или $(-\infty,+\infty)$. Определеная на $J\times J$ функция $U(t,s)$ с значениями в пространстве $\mathbb{F}(\mathcal{X})$ непрерывных в $\mathcal{X}$ операторов называется эволюционным процессом, если эта функция удовлетворяет следующему принципу суперпозиции:

$$U(t,s) = U(t,\xi)\cdot U(\xi,s)$$

для всех $s \le \xi \le t$, кроме того, при любом $t \in J$

$$U(t,t) = I.$$

Естественным образом эволюционные процессы возникают в теории эволюционных дифференциальных уравнений, в том числе, обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, стохастических дифференциальных уравнений, функционально-дифференциальных уравнений, уравнений параболического типа и т.д.

С каждым эволюционным процессом $U(t,s)$, $t,s \in J$ можно связать полугруппу операторов сдвига $\mathcal{T} = (T^h, h \ge 0)$, определенную формулой

$$(T^h v)(s) = U(s,s-h)v(s-h) \qquad (1)$$

для всех $s \in J$, где v - элемент некоторого функционального пространства.

Оказывается, что для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \qquad (2)$$

при некотором условии эта полугруппа сильно непрерывна. и, далее, ее инфинитезимальным генератором служит оператор $\mathcal{L} = - d/dx + f(t, \cdot)$.

Формально, в этой диссертационной работе предпринимается попытка построить качественную теорию неавтономых уравнений вида (2), распространяя на нее результаты, известные для автономных абстрактных уравнений

$$\frac{dv}{dt} = \mathcal{L}(v) \qquad (3)$$

в некотором функциональном пространстве.

Исследования обратимости дифференциального оператора $\mathcal{L}$ в случае линейных уравнений, восходящие к П. Болю и О. Перронну, позволяют получить разнообразные критерии об экспоненциальной устойчивости решений на полуоси и экспоненциальной дихотомичности решений на всей оси. Дальнешее развитие и приложения этих результатов получили Р.. Беллман, Ю.Л. Далецкий, П.П. Забрейко, М.Г. Крейн, . В.Л. Кулик, . Кучер, М.Х. Майзель, Х. Массера, Ю.А. Митропольский, А.М. Самойленко, Н.А. Перестюк, В.А. Плисс, Х. Шеффер, и т.д..

Г. Флоке и А. Пуанкаре в своих исследованиях об асимптотическом поведении решений обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами впервые использовали оператор сдвига по траекториях на период (оператор монодромии, отображение Пуанкаре). Н.Н. Красовский (1959) впервые предложил для исследования свойств устойчивости решений уравнений с запаздыванием использовать отображения сдвига. В простейших случаях вышеуказанная полугруппа встречается в теории полугрупп линейных операторов как классический пример, в котором справедлива теорема об отображении спектра. В теории дифференциальных динамических систем Дж. Мезер доказал известную теорему о характеризации диффеоморфизмов Аносова, в которой явно использовалась идея оператора сдвига. Обобщение этой теоремы получили А.Б. Антоневич, Р.И. Бронштейн, К. Чикон, Р.К. Свасон.

Отметим, что для некоторых классов линейных обыкновенных дифференциальных уравнений на всей оси существует переход от их рассмотрения к рассмотрению ассоциированных с ними линейных расширений с компактной базой. Эта процедура требует от правых частей рассматриваемых уравнений выполнения специальных условий, которые, по-видимому, являются очень жесткими. Отметим еще, что эволюционные процессы можно рассматривать как расширения потоков с некомпактной базой. К сожалению, до сих пор на этом пути не было получено существенных результатов.

Отметим, что классический метод исследования асимптотического поведения решений, основанный на обратимости линейного дифференциального оператора, является универсальным, позволяющим исследовать не только линейные уравнения, но и их разнообразные возмущения. Однако внимательный анализ этого метода показывает, что его применение требует громодзких дополнительных построений для конкретных типов возмущений и уравнений. Более того, отметим, что этот метод не применим для некоторых типов уравнений. С другой стороны, хотя идея использования оператора сдвига давно известна, ее применение к исследованию асимптотического поведения решений эволюционных дифференциальных уравнений еще не распространено на линейные и нелинейные уравнения; отметим лишь недавние результаты Ю. Латушкина и А.М. Степина, относящиеся к э-дихотомичности решений на всей оси.

Естественно было попытаться для исследования асимптотического поведения решений эволюционных дифференциальных уравнений, в первую очередь, обыкновенных дифференциальных уравнений (2), использовать полугруппу (1) и абстрактные уравнения (3). В настоящей диссертационной работе предпринимается попытка продвинуться в этом направлении.

Цель работы: состоит в построении качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами (2) через исследование абстрактных уравнений с постоянными коэффициентами (3) в рамках теории полугрупп линейных и нелинейных операторов и конкретизации некоторых из полученных результатов для различных типов эволюционных дифференциальных уравнений.

Методика исследования. В этой работе используются систематически методы функционального анализа, в том числе теорема Банаха о существования обратных операторов, принцип Банаха о сжимающих отображениях, теорема о спектральном радиусе, теория возмущения линейных операторов, спектральная теория полугрупп линейных операторов, теорема об производящих операторах полугрупп нелинейных операторов и метод отображения графика и лемма Морса из дифференциальной топологии.

Научная новизна. В диссертации получено дальнейшее развитие подхода к построению качественной теории эволюционных дифференциальных уравнений, основанного на исследовании ассоцированных с рассматриваемым уравнением операторов сдвига и дифференциального оператора в подходящих функциональных пространствах. Здесь впервые рассматриваются эти оператора в рамках теории полугрупп нелинейных операторов. Основными результатами диссертации являются:

- Построение теории устойчивости и дихотомии решений линейных уравнений с переменными коэффициентами в терминах спектральных свойств абстрактных уравнений с постоянными коэффициентами, ассоцированных с этими уравнениями, в частности, новые критерии о равномерной устойчивости, экспоненциальной устойчивости, экспоненциальной устойчивости отдельных решений, экспоненциальной дихотомичности решений на всей оси и новые теоремы об устойчивости рассматриваемых свойств при различных возмущениях.

- Некоторые достаточные условия существования ограниченных с экспоненциально дихотомическим расслоением решений для нелинейных возмущений линейных уравнений.

- Аналог теоремы Гробмана-Хартмана для уравнений с переменными коэффициентами для различных типов эволюционных уравнений.

- Новые условия существования интегральных многообразий.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные в диссертации теоремы об устойчивости и дихотомии приводят к новым признакам различных типов устойчивости и дихотомичности решений на всей оси. Они могут быть использованы в научных исследованиях и для чтения специальных курсов по качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами студентам в университетах.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на семинаре по функциальному анализу и дифференциальным уравнениям в БГУ под руководством профессоров А.В. Антоневича, П.П. Забрейко, Н.А. Лукашевича, Я.В. Радыно, Н.И. Юрчука, на семинаре по дифференциальным уравнениям в Институте математики АН Беларуси под руководством акалемика И.В. Гайшуна, на семинаре по дифференциальным уравнениям в БГУ под руководством члена-корреспондента АН Беларуси Н.А. Изобова, на семинаре по дифференциальным уравнениям в КГУ пол руководством члена-корреспондента АН Украины А.М. Самойленко и профессора Н.А. Перестюка, на семинаре по обыкновенным дифференциальным уравнениям отдела обыкновенных дифференциальных уравнений в Институте математики АН Украины под руководством члена-корреспондента АН Украины А.М. Самойленко, на семинаре по нелинейным колебаниям в ВГУ под руководством профессора А.И. Перова, на международных конференциях по дифференциальным уравнениям в Венгрии (1988), в Болгарии (1991), на конгрессе вьетнамских математиков (1990) и конференции беларусских математиков (1992).

Публикации. На защиту вынесены полученные лично автором результаты, опубликованные в работах [1-14].

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, списка обозначений, трех глав и списка литературы. Она изложена на 295 страницах машинописного текста. Список литературы содержит 204 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении даются положения и краткий очерк истории по задаче ограниченных решений, экспоненциальной устойчивости и экспоненциальной дихотомичности решений. Здесь же излагаются основные результаты работы.

Первая глава посвящена спек теории лине уравнений, заданных на всей оси. Она состоит из 4 параграфов.

П.1.1 посвящен спектральной теории характеристических операторов, ассоциированных с рассматриваемыми уравнениями, действующих в пространстве

$$\mathbb{H} = \{v: \mathbb{R} \quad \mathcal{X} \mid \sup \|v(t)\| < \infty\}$$

и в его подпространстве $C_u(\mathcal{X})$, состоит из равномерно непрерывных функций. В этом параграфе установлены взаимосвязи между свойствами уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x\ ,\ x \in \mathscr{X}\ ,\ t \in \mathbb{R}\ , \qquad (4)$$

где $\mathscr{X}$ - некоторое банахово пространство, в том числе равномерная устойчивость, экспоненциальная устойчивость, экспоненциальная дихотомичность решений, и соответствующими свойствами операторов сдвига T^h, называемых нами характеристическими. Более конкретно, доказано, что уравнение (4) равномерно устойчиво на всей оси в том случае и только в том , когда справедливо

$$\sup_{h \ge 0} \|T^h\| < \infty$$

и что (4) экспоненциально дихотомично на всей оси тогда и только тогда, когда для некоторого положительного h оператор T^h гиперболичен. В частности, экспоненциальная устойчивость решений (4) на всей оси эквивалентна тому, что спектральный радиус оператора T^h $(h > 0)$ меньше чем единица. В случае линейных уравнений с периодическими коэффициентами показано, что из полученных выше результатов следуют известные утверждения для этих уравнений в терминах спектральных свойств оператора монодромии. Иными словами, можно рассмотреть характеристические оператора как распространение понятия оператора монодромии на уравнения с непериодическими коэффициентами.

В п.1.2 исследуются характеристические оператора в рамках теории полугрупп линейных операторов. Для этого рассматривается полугруппа $\mathcal{T} = \{T^h,\ h \ge 0\}$ в пространстве $C_u(\mathscr{X})$ и его подпространстве $C_\infty(\mathscr{X})$, состоящем из тех функций v , что

$$\lim_{|t| \to \infty} v(t) = 0\ .$$

Доказана теорема об отображении спектра для полугруппы характеристических операторов, т.е. равенство

$$\sigma(T^h) = \exp(h\sigma(\mathcal{L})) ,$$

где T^h, $\mathcal{L}$ действуют в пространствах $C_u(\mathcal{X})$, $C_\infty(\mathcal{X})$, а пространство $\mathcal{X}$ конечномерно. отсюда получены новые критерии об экспоненциальной дихотомичности решений на всей оси в терминах обратимости разностного оператора Δ_h, определенного формулой

$$(\Delta_h v)(t) = v(t) - X(t,t-h)v(t-h) , \; t \in \mathbb{R}$$

в одном из пространств $C_u(\mathcal{X})$, $C_\infty(\mathcal{X})$. Следует отметить, что наши построения в случае $C_\infty(\mathcal{X})$ применимы для широкого класса уравнений с непрерывными коэффициентами, имеющих ограниченный рост, т.е. справедлива

$$\|X(t,s)\| \le K \exp(L|t-s|) , \; t,s \in \mathbb{R} .$$

В случае $\dim \mathcal{X} < \infty$ показано, что спектр дифференциального оператора $\mathcal{L} = - d/dt + A(t)$, являющегося инфинитезимальным генератором полугруппы $\mathcal{T}$, состоит из конечного числа параллельных мнимой оси полос и что существует минимальное единственное экспоненциальное расщепление с люксами генеральных показателей, соответствующих этим полосам.

П.1.3 посвящен теории устойчивости решений уравнений в банаховом пространстве. Построен аналог известных утверждений об устойчивости решений уравнений с постоянными коэффициентами для абстрактных уравнений

$$\frac{dv}{dt} = \mathcal{L}v , \; v \in C_u(\mathcal{X}) , \; C_\infty(\mathcal{X}) .$$

Отсюда получаются новые признаки различных типов устойчивости решений в терминах спектральных свойств дифференциального оператора $\mathcal{L}$. Более конкретно, в этом параграфе доказано, что уравнение (4) равномерно устойчиво в том и только в том случае, когда существует $(I - n^{-1}\mathfrak{L})^{-1}$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$ и справедлива

$$\|(I - n^{-1}\mathfrak{L})^{-m}\| \le c$$

для $n, m = 1, 2, \ldots$; c – некоторая положительная постоянная, зависящая только от $\mathfrak{L}$. Для экспоненциальной устойчивости решений на полуоси получены следующие критерии:

1) $\sup\{\mathrm{Re}\,\lambda,\ \lambda \in \sigma(\mathfrak{L})\} < 0$,

2) $r(T^h) < 1$, $(h > 0)$,

3) Δ_h обратим в C_0 или $C_{0,\infty}$,

здесь операторы действуют в C_0, состоящем из функций $v \in C_u(\mathcal{X})$ таких, что $v(t) = 0$ для $t \le 0$, или его подпространстве $C_{0,\infty}$, состоящем из функций v таких, что $\lim v(t) = 0$ при $t \to \infty$. Все эти утверждения доказаны с помощью теоремы о спектральном радиусе и спектральной теории линейных операторов. Здесь показано, что справедлива теорема об отображении спектра

$$\sigma(T^h) = \exp(h\sigma(\mathfrak{L})),$$

где T^h, $\mathfrak{L}$ действуют в пространствах C_0, $C_{0,\infty}$, а фазовое пространство $\mathcal{X}$ – произвольное комплексное пространство. Для экспоненциальной устойчивости группы переменных (или отдельных решений) справедливо утверждение, что если имеет место условие

$$\sigma_{ap}(\mathfrak{L}) \cap i\mathbb{R} = \emptyset,$$

то каждое ограниченное решение $x(\cdot)$ уравнения (4) подчиняется оценке

$$\|x(t)\| \le Ne^{-\alpha(t-s)}\|x(s)\|, \quad (t \ge s)$$

для некоторых положительных постоянных N, α, не зависимых от решения $x(\cdot)$.

В п.1.4 распространены построения в предыдущих параграфах на пространства L_p $(1 \le p < \infty)$ и на дискретные уравнения. Доказана эквивалентность экспоненциальной дихотомичности решений на всей оси уравнения (4) и гиперболичности оператора T^h $(h > 0)$. Отметим, что для уравнений на всей оси справедлива теорема об отображении спектра и для пространств L_p. Отсюда следует эквивалентность экспоненциальной дихотомичности решений на всей оси и обратимости разностного оператора Δ_h. Отметим здесь, что хотя давно известно утверждение о том, что обратимость дифференциального оператора $\mathcal{L}$ в $L_p(\mathcal{X})$ влечет за собой экспоненциальную дихотомичность решений на всей оси, обратное к этому еще не даказано. В этом параграфе это доказано в рамках теории полугрупп линейных операторов. Аналогичные результаты также доказаны Ю. Латушкиным и А.Степином для пространства $L_2(\mathcal{X})$ с гильбертовым $\mathcal{X}$. Для устойчивости решений на полуоси отметим, что здесь впервые рассмотрен аналог для пространств L_p известного утверждения, принадлежащего Болю, о том, что уравнение (4) экспоненциально устойчиво в том и только в том случае, когда задача Коши

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(t)x \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

имеет ограниченное решение на $[0,\infty)$. Здесь показано преимущество рассмотрения дифференциального оператора $\mathcal{L}$ в рамках теории полугрупп линейных операторов. Отсюда показано, что аналог утверждений параграфа п.1.3 справедлив и для пространств L_p и что без труда можно распространять некоторые вышеизложенные построения на дискретные системы.

Глава 2 посвящена теории возмущения. Она состоит из трех параграфов.

В п.2.1 исследуется задача возмущения экспоненциально дихотомичных и экспоненциальо устойчивых уравнений. При применении теории возмущения линейных операторов показано, что можно рассмотреть задачу возмущения экспоненциально дихотомичных уравнений в рамках теории возмущения линейных операторов по стандартной схеме. В результате этого перехода получено новое условие на возмущение. Здесь показано, что полученное условие, т.е. условие на малость величины

$$\sup_t \|X(t,t-h) - Y(t,t-h)\|,$$

где $Y(t,s)$ - эволюционный оператор возмущенного уравнения,

$$\frac{dx}{dt} = [A(t) + B(t)]x \qquad (5)$$

является лучше часто встречающегося в теории экспоненциальной дихотомии решений условия возмущения по малости по интегралу. Для исследования задачи возмущения экспоненциально устойчивых уравнений на полуоси доказано следующее: уравнение (4) экспоненциально устойчиво в том и только в том случае, когда спектральный радиус оператора T^1_s меньше чем единица для некоторого $s \ge 0$, где T^1_s определяется формулой

$$(T^1_s v)(t) = X(t,t-1)v(t-1)\ ,\ v \in \mathbb{H}_s\ ,$$

$$\mathbb{H}_s = \{v: [s,\infty) \to X \mid \sup \|v(t)\| < \infty\}\ .$$

Отсюда получено новое условие на возмущение для того, чтобы возмущенное уравнение также было экспоненциально устойчиво. Без труда можно показать, что это условие удовлетворяется, если достаточно мало одно из следующих :

$$\sup_t \int_t^{t+1} \|B(s)\| ds \ , \ \sup_t \|B(t)\|.$$

Здесь приведен пример, показывающий, что не верно обратное. Отметим также, что можно распространять эти утверждения на различные типы уравнений, в том числе дифференциальные уравнения с воздействием.

П.2.2 посвящен исследованию структурной устойчивости линейных уравнений с переменными коэффициентами, в том числе обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Для этого понятие топологической эквивалентности распространяется на эти уравнения. Пусть мы имеем дело с следующими уравнениями :

$$\frac{dx}{dt} = A_i(t)x \ , \ i = 1,2 \ , \qquad (6,i)$$

где $A_i(t)$ непрерывные на всей оси. Будем говорить, что (6,1) топологически эквивалентно (6,2) если существует гомеоморфизм H из $\mathbb{R}\times X$ на себя такой, что H имеет вид $H(t,x) = (t,h_t(x))$ для каждого t, а h_t - гомеоморфизм фазового пространства, обладающий свойствами

а) Если $x(t)$ - некоторое решение уравнения (6,1), то $h_t(x(t))$ - решение уравнения (6,2). Гомеоморфизм h_t^{-1} обладает тем же свойством.

б) Существует неубывающая неотрицательная функция L из $[0,\infty)$ такая, что

$$\sup_t \max(\|h_t(x)\|, \|h_t^{-1}(x)\|) \le L(\|x\|)$$

для всех $x \in \mathcal{X}$.

Доказано следующее утверждение: если уравнение (4) на всей оси экспоненциально дихотомично, то оно топологически эквивалентно стандартному уравнению

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x \\ \dfrac{dy}{dt} = y \end{cases}$$

В случае, когда фазовое пространство $\mathcal{X}$ конечномерно, обратное утверждение также верно. Отсюда, используя теорию возмущения, развитую в предыдущем параграфе для гильбертова пространства, доказана структурная устойчивость экспоненциальных дихотомичных уравнений на всей оси с гильбертовым фазовым пространством. Рассмотрен также аналог для дифференциальных уравнений с импульсным воздействием.

П.2.3 посвящен вопросам о стохастическом возмущении экспоненциально дихотомичных уравнений на полуоси. Здесь рассматриваются уравнения вида

$$dx(t) = [A(t) + B(t)]x(t)dt + \sum_{k=1}^{d} C_k(t)x(t)dw_k(t). \qquad (7)$$

где $(w_1(t),\dots,w_d(t))$ - стандартный d-мерный винеровский процесс выходящий из нуля. На эти уравнения распространяется понятие экспоненциальной дихотомичности решений. Так, получаем два варианта. Первый соответствует разложению начальных условий в $\mathbb{R}^n$ на прямую сумму, а второй - разложению начальных условий в $L_2(\Omega,\mathcal{F}_s,P)$, где через $L_s(\Omega,\mathcal{F}_s,P)$ обозначается пространство $\mathcal{F}_s$-измеримых функций со значениями в $\mathbb{R}^n$ таких, что

$$\int_\Omega \|f(\omega)\|^2 P(d\omega) < \infty .$$

Для первого варианта распространения понятия экспоненциальной дихотомичности справедливо следующее утверждение: если уравнение (4) экспоненциально дихотомично с ограниченной и непрерывной матричнозначной функцией $A(t)$, то для достаточно малых возмущений $B(t)$, $C_k(t)$ возмущенное уравнение (7) также экспоненциально дихотомично. Главная идея в доказательстве этого утверждения состоит в использовании неравенства, обобщающего известную лемму Гронуола и принадлежащего В. Коппелу. А для второго варианта полезно вводить понятие спектральной дихотомичности. Будем говорить, что уравнение (7) спектрально дихотомично, если не пересекается с мнимой осью спектр комплесификации оператора T, определенного формулой

$$(Tv)(t) = X(t,t-1)v(t-1)\ ,\ \text{при}\ t \ge 1$$
$$(Tv)(t) = 0\ ,\ \text{при}\ 0 \le t < 1$$

Здесь v - элемент пространства $\mathbb{K}$, состоящего из таких функций v из $[0,\infty)$ со значениями $v(s)$ из $L_2(\Omega,\mathcal{F}_s,P)$, что

$$\sup_s \|v(s)\| < \infty\ ,$$

а $X(t,s)$ - отображение из $L_2(\Omega,\mathcal{F}_s,P)$ в $L_2(\Omega,\mathcal{F}_t,P)$, определенное из существования и единственности решений уравнения (7). Показано, что если уравнение (4) спектрально и экспоненциально дихотомично, то для достаточно малых возмущений уравнение (7) также дихотомично в смысле второго варианта.

Третья глава посвящена нелинейным уравнениям. В П.3.1 рассматриваются характеристические операторы, ассоциированные с уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x)\ , \qquad (8)$$

в рамках теории полугрупп нелинейных операторов. Для этого введено понятие допустимости отображений f. Будем говорить, что отображение f из $\mathbb{R}\times\mathcal{X}$ со значениями в комплексном банаховом пространстве $\mathcal{X}$ является допустимым, если выполняются следующие условия:

а) f непрерывно по (t, x),

б) f удовлетворяет условию Липшица по x равномерно по t

в) существует положительная постоянная N такая, что

$$\|f(t,x)\| \leq N(1 + \|x\|)$$

для всех t, x.

Допустимое отображение f удовлетворяет условию H если выполняется условие: равномерно непрерывно отображение, сопоставляющее в соответствии каждому t значение $f(t,u(t))$, где $u(\cdot)$ - некоторая равномерно непрерывная функция из $\mathbb{R}$ со значенями в $\mathcal{X}$. Доказано, что при допустимости f полугруппа $\mathcal{T}$ характеристических операторов, ассоциированная с уравнением (8), сильно непрерывна и что ее инфиинит езимальным генератором служит нелинейный дифференциальный оператор $\mathfrak{X} = -d/dt + f(t,\cdot)$. Далее, если f удовлетворяет условию H, то область определения $\mathfrak{X}$ как инфинитезимальный генератор полугруппы $\mathcal{T}$ является $C^1_u(\mathcal{X})$, состоящим из функций вместе с их производными в $C_u(\mathcal{X})$. С помощью теоремы об общем порождении, принадлежащей Крандаллу и Лигетту, доказано, что если f, g удовлетворяют условию H и существует $\alpha \in \mathbb{R}$ такое, что $\alpha I - \mathfrak{X}$ аккретивен, причем, для всякого достаточно малого $\lambda > 0$ имеет место $\mathcal{R}(I - \lambda\mathfrak{X}) = C_u(\mathcal{X})$, то оператор $\gamma I - \mathfrak{Y}$ аккретивен с $\gamma = \alpha + \beta$, где $\mathfrak{Y} = -d/dt + f(t,\cdot) + g(t,\cdot)$, β - коэффициент Липшица по x отображения g. Отсюда следует утверждение, что если $0 \leq \beta < -\alpha$, то возмущенное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) + g(t,x)$$

имеет единственное глобально экспоненциально устойчивое решение. В случае линейных уравнений показано, что если оператор Коши уравнения (4) подчиняется оценке

$$\|X(t,s)\| \le e^{\alpha(t-s)}, \quad t \ge s,$$

то оператор $\alpha I - \mathcal{L}$ аккретивен.

В п. 3.2 рассматривается существование интегральных многообразий для полулинейных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t,x) \qquad (9)$$

при предположении, что линейная часть (9) экспоненциально дихотомична. В этом параграфе без ограничения общности предположим, что $A(t)$ коммутативен с проектором P, определенным из экспоненциальной дихотомичности линейной части. Введено полное метрическое пространство

$$O_\delta(r) = \{g : \mathbb{R}\times B^2(r) \to B^1(r) \,|\, g(t,0) = 0,\ \mathrm{Lip}(g(t,\cdot)) \le \delta\},$$

где $B^1(r)$, $B^2(r)$ - замкнутые шары в $\mathrm{Im}P$ и $\mathrm{Ker}P$, соответственно, и $d(h,g) = \sup \|g(t,x) - h(t,x)\|$. В этом пространстве определим действие операторов T^h формулой

$$gr[(T^n g)(t,\cdot)] = Y(t,t-n)(gr[g(t-n,\cdot)]) \cap B(r), \qquad (10)$$

где $B(r)$ - замкнутый шар радиуса r в $\mathcal{X}$, а через $gr[f(\cdot)]$ обозначается график отображеия f, $Y(t,s)$ - оператор Коши возмущенного уравнения. Если возмущение f в (9) удовлетворяет условиям, которые гарантируют существование оператора Коши $Y(t,s)$ для возмущенного уравнения с достаточно малым

$$\sup_t \|X(t,t-1) - Y(t,t-1)\|, \qquad (11)$$

то (10) корректно определит действие оператора T^h с достаточно большим h. Показано, что в этом случае существует единственная неподвижная точка для T^h, которая определяет так называемое интегральное многообразие. Легко видеть, что малость по интегралу возмущения f влечет за собой малость величины (11). Однако, обратное не верно. Здесь все результаты относятся к уравнениям с гильбертовым фазовым пространством. Однако, без труда можно показать, что они справедливы и для уравнений в банаховом пространстве при добавочном предположении, что $A(t)$ коммутативен с проектором P. В этом параграфе показано, что эти построения применимы и для болле общих эволюционных процессов, в том числе процессы, определенные дифференциальными уравнениями с импульсным воздействием.

С помощью изложенных в предыдущем параграфе результатов в параграфах п.3.3 и п.3.4 рассматривается асимптотическое поведение решений эволюционных процессов. Доказан принцип сведения для теории устойчивости. Рассматривается задача топологической классификации полулинейных уравнений. Доказано, что уравнение (9) экспоненциально дихотомично, линейной части и достаточно малым возмущения, топологически эквивалентно стандартному уравнению. Доказан также аналог для дифференциальных уравнений с импульсным воздействием и разностных уравнений. Главная идея в доказательстве состоит в использовании леммы Морса в случае, когда возмущение достаточно гладко.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

Таким образом, основные результаты диссертации являются:

Построение спектральной теории линейных обыкновенных дифференциальных уравнений на всей оси. Получение различных типов характеризаций равномерной устойчивости, экспоненциальной устойчивости, экспоненциальной дихотомичности в терминах спектральных свойств полугрупп, ассоциированных с рассматриваемыми уравнениями. Распространение некоторых из этих на различные типы эволюционных дифференциальных уравнений.

Новые критерии различных типов устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений на полуоси, в том числе критерии об экспоненциальной устойчивости решений на полуоси в терминах обратимости разностного оператора $\mathcal{A}_h$ в пространствах C_o, $C_{o,\omega}$, $L_{o,p}$ и дифференциального оператора $\mathcal{L}$ в пространстве $L_{o,p}$, признаки экспоненциальной устойчивости некоторой группы переменных (или отдельных решений), критерия равномерной устойчивости решений.

Построение теории возмущения с общим возмущением, позволяющее использовать систематически хорошо развитую теорию возмущения линейных операторов. Исследование стохастического возмущения экспоненциально дихотомичных обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследование задачи структурной устойчивости линейных уравнений с переменными коэффициентами.

Рассмотрение полугрупп характеристических операторов в рамках теории полугрупп нелинейных операторов. Получение условия для существования глобально экспоненциального решения возмущенного уравнения. Исследование существования интегральных многообразий с использованием характеристических операторов, позволяющее получить новые общие условия на возмущение и распространять построения на другие объекты. Доказательство общего принципа сведения для теории устойчивости. Доказательствоаналога теоремы Гробмана-Хартмана для различных типов эволюционных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

В заключение автор выражает глубокую благодарность профессору П.П. Забрейко за постоянное внимание и детальное обсуждение результатов работы.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах

1. Забрейко П.П., Нгуен Ван Минь, *Группа характеристических операторов и ее приложения в теории линейных обыкновенных дифференциальных уравнений*//ДАН, т.324 (1992), N.1, с. 24 - 28.

2. Забрейко П.П., Нгуен Ван Минь, *Экспоненциальная дихотомия и интегральные многообразия в теории потоков и их применения*// ДАН, т.324 (1992), N.3, с. 515 - 518.

3. Забрейко П.П., Нгуен Ван Минь, *Стохастическое возмущение линейных э-дихотомичных систем*//ДАН Беларуси, т. 36(1992), N.9-10, с. 790 -793.

4. Нгуен Ван Минь, *О топологической классификации неоднородных дифференциальных уравнений*// Укр. мат. ж., т. 42(1990), N.3, с.423-426.

5. Нгуен Ван Минь, *Полугруппы и линейные неавтономные обыкновенные дифференциальные уравнения*//ДАН Беларуси, т.37 (1993), N. 1, с. 19 - 22.

6. Нгуен Ван Минь, *Нелинейные полугруппы и нелинейные неавтономные обыкновенные дифференциальные уравнения*//ДАН Беларуси, т.37 (1993), N. 2, с. 113 -117.

7. Nguyen Van Minh, *Semigroups and stability of nonautonomous differential equations in Banach space, accepted for publication* in **Transactions of the Amer. Math. Soc..** Тема докладывалась на **конгрессе белорусских математиков, Гродно, 29 сентября - 2 октября 1992. Тез. докл.,** часть 2, с. 113.

8. Nguyen Van Minh, *On a topological classification of nonautonomous differential equations,* **Colloquia Mathematica Societatic Janos Bolyai,** v. 53, North Holland, Amsterdam, 1990, p. 421 -426.

9. Nguyen Van Minh, *A reduction principle for topological classification of nonautonomous differential equations.* **Proceedings of the Royal Society of Edinburgh,** 123A(1993) , N.3 , p.621 -632.

10. Nguyen Van Minh, *Spectral theory for linear nonautonomous differential equations.* **J.Math. Anal. Appl.** (в печати).

11. Appel J. ,Laksmikantham V., Nguyen Van Minh, Zabreiko P.P. *A general model of evolutionary processes. Exponential dichotomy I.* **Nonlinear Anal.** v. 21(1993), N.3, p. 207 - 217.

12. Appel J., Laksmikantham V., Nguyen Van Minh, Zabreiko P.P., *A general model of evolutionary processes. Exponential dichotomy II.* **Nonlinear Anal.** , v.21(1993), N. 3, p. 219 -225.

13. Aulbach B., Nguyen Van Minh, Zabreiko P.P., *Integral manifolds of a general model of evolutionary processes with impulse effect.* Final publication to appear in **Nonlinear Anal., Preprint series of Institute of Mathematics, Univ. of Augsburg.** Report N. 260, July 1992, 22 pp.

14.Aulbach B., Nguyen Van Minh, Zabreiko P.P., *The concept of spectral dichotomy for difference equations.* Final publication to appear in **J. Math. Anal. Appl., Preprint series of Institute of Mathematics, Univ. of Augsburg.** Report N. 274, june 1993, 14 pp.

Подп. в печ. 9.11.93 . Формат 60х84/16. Бумага тип. Офс. печать.
Усл. печ. л. 1,39 . Усл. кр.-отт. 1,39 . Уч.-изд. л. 1,1
Тираж 100 экз. Зак. 390 Бесплатно.

Отпечатано в Институте математики АН Украины
252601 Киев 4, ГСП, ул. Терещенковская, 3.