

КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

На правах рукопису

ЛЕВИЩЕНКО Сергій Сергійович

**ГРУПИ З ДЕЯКИМИ
СИСТЕМАМИ
ДИСПЕРСИВНИХ ПІДГРУП**

**01.01.06 — математична логіка,
алгебра і теорія чисел**

А в т о р е ф е р а т
дисертації на одбуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ — 1993

АВ 28913

Дисертація є рукопис

Робота виконана на кафедрі вищої математики Українського державного педагогічного університету імені М.П.Драгоманова

Офіційні опоненти - член-кореспондент АН Республіки Беларусь, доктор фізико-математичних наук, професор ШЕМЕТКОВ Л.О.
доктор фізико-математичних наук, професор ШУНКОВ В.П.
доктор фізико-математичних наук ЧЕРНІКОВ М.С.

Провідна організація : Ужгородський державний університет

Захист відбудеться " 17 " січня 1994 р. о 14 год. на засіданні спеціалізованої ради Д 01.01.01 при Київському університеті імені Тараса Шевченка за адресою: 25212-7 Київ - 127, проспект Глушкова, 6, механіко-математичний факультет, ауд. 42.

З дисертацією можна ознайомитись в науковій бібліотеці університету / вул.Володимирська, 62 /.

Автореферат розісланий " 16 " грудня 1993 року.

Вчений секретар спеціалізованої ради

ОВСІЄНКО С.А.

ЛНБ України ім.В.Стефаника



00814059 (R)

М. В. Стефаника
АН України

ДВ 20.970

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність дослідження. Вивчення будови груп за заданими властивостями деяких систем її підгруп є одним з класичних і фундаментальних напрямів в теорії груп. Найбільш поширеним в цьому напрямі є такий підхід до визначення конкретного класу груп: серед усіх груп розглядаються лише ті, в яких виділено деяку систему підгруп Σ , кожна з яких всліді певною теоретико-груповою властивістю Θ /для спрощення такий клас груп часто будемо позначати через $\mathcal{K}(\Sigma, \Theta)$. Задача вивчення полягає в отриманні конструктивного опису всіх груп класу $\mathcal{K}(\Sigma, \Theta)$.

Започаткували цей напрям роботи Р.Дедекінда /1897 г./, Г.Міллера і Г.Морено /1903 р./, О.В.Шмідта /1924 р./ і ін. Загальна задача описання будови груп з тими чи іншими обмеженнями для тих чи інших систем їх підгруп явно була сформульована С.М.Черніковим /1969 р./. На цьому шляху було виділено багато важливих класів, які збагатили конкретну базу теорії груп. При такому підході, перш за все, виділяються і вивчаються класи $\mathcal{K}(\Sigma, \Theta)$ -груп, в яких Σ - система всіх власних підгруп. Зрозуміло, що групи з цього класу не обов'язково самі є Θ -групами. Не Θ -група, у якій всі власні підгрупи є Θ -групами, називається мінімальною не Θ -групою /означення А.І.Старостіна /1968 р.//. Добре відомі такі важливі класи мінімальних не Θ -груп:

- скінченні мінімальні неабелеві групи /групи Міллера-Морена або \mathcal{M} -групи/, введені в розгляд Г.Міллером і Г.Мореном в 1903 р. ;

- скінченні мінімальні неабельотентні групи /групи Шмідта

або S -групи/, введені в розгляд О.Ю.Шмідтом в 1924 р.;

- мінімальні нескінченні групи, введені в розгляд О.Ю.Шмідтом в 1938 р. /приклади таких неабелевих груп вперше побудував О.Ю.Ольшанський в 1979 р./.

Подальші дослідження в цьому напрямку присвячуються виділенню і вивченню тих класів $\mathcal{K}(\Sigma, \Theta)$ -груп, у яких Σ містить вже не всі власні підгрупи. В ролі Σ може виступати, наприклад, множина всіх: 2-максимальних підгруп; підгруп непримарного індексу; власних підгруп підгруп непримарного індексу; власних неабелевих підгруп; власних абелевих підгруп; неінваріантних підгруп і ін. Зауважимо, що в ролі Θ , незалежно від вибору Σ , можуть розглядатися такі важливі властивості: дисперсивність, φ -дисперсивність, дисперсивність за Оре, надрозв'язність, нільпотентність, абелевість, циклічність, нормальність, субнормальність, пронормальність і ін.

Важливе місце в дослідженнях розглядуваного напрямку посідають результати, які відносяться до вивчення скінченних груп. Найбільш яскраво ці результати відобразили в своїх роботах: П.П.Барішовець, В.О.Белоголов, Я.Г.Беркович, Ю.А.Гольфанд, Л.С.Казарін, В.А.Крекнін, М.Ф.Кузенний, Л.А.Курдаченко, В.С.Монахов, В.Т.Нагребецький, А.І.Новіцький, В.М.Семенчук, В.В.Сергійчук, Я.П.Сисак, А.І.Старостін, А.Д.Устюжанінов, М.С.Черніков, С.М.Черніков, С.А.Чунікін, С.І.Шатило, Л.О.Шеметков, В.О.Шерієв, О.Ю.Шмідт, В.Н.Шунков, Р.Бар, Н.Блекберн, М.Курціо, Де Віво Клеріяда, Й.Дер, К.Дерк, А.Фаттахі, З.Янко, Т.Хоукес, Б.Хупперт, О.Оре, П.Пелфі, Л.Реді, М.Сулзукі, Л.Томпсон. Розвитку цього напрямку присвячена дана робота. Зауважимо, що в роботі в ролі Θ будуть виступати такі влас-

тивості: Θ_0 /метациклічність, Θ_1 /циклічність, Θ_2 /абеле-
вість, Θ_3 /нільпотентність, Θ_4 /надрозв'язність,
 Θ_5 /дисперсивність за Оре, Θ_6 / φ -дисперсивність,
 Θ_7 /дисперсивність, а в ролі Σ - системи: Σ_1 /макси-
мальних, Σ_2 /2-максимальних, Σ_3 /3-максимальних підгруп;
 Σ_4 /підгруп непримарного індексу, Σ_5 /власних підгруп
підгруп непримарного індексу. Ясно, що для перелічених власта-
востей Θ всі підгрупи Θ -групи є також Θ -групами,
а означення не Θ -групи є логічним запереченням Θ -гру-
пи.

Мета і об'єкти дослідження. Для більш точного формулюван-
ня мети зупинимось на деяких означеннях і результатах.

Скінченна група G називається д и с п е р с и в н о ю,
якщо вона володіє таким інваріантним рядом

$$1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_{n-1} \triangleleft G_n = G,$$

що фактор-група $G_i/G_{i-1} = P_i$ -група, ізоморфна силов-
ський P_i -підгрупі групи G , P_i - просте число,

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Якщо послідовність простих чисел p_1, p_2, \dots, p_n складає
деяку фіксовану упорядкованість φ , то дисперсивна група
називається φ - д и с п е р с и в н о ю групою. Клас скін-
ченних φ -дисперсивних груп цікавий тим, що він складає
формацію. Це зумовлює використання поняття φ -дисперсивності
при формаційних дослідженнях груп.

Якщо для φ -дисперсивної групи G $P_i > P_{i+1}$,
 $i = 1, 2, \dots, n-1$, то G називається д и с п е р с и в н о ю
з а О р е групою.

Одними з перших робіт, які мають відношення до дисперсив-
них груп, є роботи О.Оре /1939 р./, С.М.Чернікова /1940 р./.

В роботах Р.Бера /1958 р., 1966 р./, А.Таттахі /1973 р./, Й.Дера /1970 р./, Й.Дера і Н.Мукерджі /1973 р./ були знайдені деякі характеристики дисперсивних груп і встановлені ознаки дисперсивності скінчених груп. Клас скінчених недисперсивних груп досить широкий /він, зокрема, містить всі скінченні нерозв'язні групи/ і вивчений не в повній мірі. В роботі Л.К.Фаддєва /1947 р./ доведено, що для недисперсивної групи порядку $\rho^{\alpha} q$ виконується нерівність $\rho^{\delta} / (\rho, \delta) \leq \alpha - 1$, де $\delta = \delta_q(\rho)$ - показник числа ρ за модулем q . Справедливість цієї нерівності для недисперсивної групи порядку $\rho^{\alpha} q^{\beta}$ з максимальною силовською ρ -підгрупою була доведена Л.О.Шеметковим /1969 р./ . Він же узагальнив цей результат, а також встановив деякі властивості небіпримарних недисперсивних груп. В роботах Т.Хоукеса /1968 р./, Р.Картера, Б.Фішера, Т.Хоукеса /1968 р./, С.М.Чернікова і автора /1973 р./, М.Ф.Кузенного і автора /1975 р./, М.Ф.Кузенного /1978 р./, А.Ф.Турбіна, В.Є.Горенцького, М.Ф.Кузенного, В.В.Пялава /1984 р./ досліджуються деякі підкласи класу недисперсивних груп.

Серед усіх розглядуваних в роботі властивостей Θ найбільш загальною є дисперсивність, всі попередні властивості, за виключенням метациклічності, є більш вузькими в порівнянні з наступними. Нагадаємо, що група називається *м е т а ц и к л і ч н о ю*, якщо вона є добутком двох циклічних підгруп, одна з яких інваріантна. Властивість метациклічності за загальністю можна помістити між властивостями циклічності і надрозв'язності.

Відповідно до введених позначень маємо 40 класів груп: $\mathcal{K}(\Sigma_i, \Theta_j)$, де $i \in \overline{1,5}$, $j \in \overline{0,7}$. Оскільки $\Sigma_1 \supset \Sigma_2 \supset \Sigma_3$ і $\Sigma_4 \supset \Sigma_5$, а також $\Theta_1 \rightarrow \Theta_2 \rightarrow$

$\rightarrow \theta_3 \rightarrow \theta_4 \rightarrow \theta_5 \rightarrow \theta_6 \rightarrow \theta_7$ і $\theta_1 \rightarrow \theta_2 \rightarrow \theta_3$, то виникає ціла система включень розглядуваних класів. Зокрема, для будь-якого фіксованого i та будь-якого фіксованого j , $j \in \overline{1, 7}$ маємо: $\mathcal{K}(\Sigma_i, \theta_{j+1}) \supset \mathcal{K}(\Sigma_i, \theta_j)$, а також $\mathcal{K}(\Sigma_i, \theta_1) \subset \mathcal{K}(\Sigma_i, \theta_2) \subset \mathcal{K}(\Sigma_i, \theta_3)$. Зрозуміло, що для будь-якого j , $j \in \overline{0, 7}$ $\mathcal{K}(\Sigma_5, \theta_j) \supset \mathcal{K}(\Sigma_4, \theta_j)$ і $\mathcal{K}(\Sigma_3, \theta_j) \supset \mathcal{K}(\Sigma_2, \theta_j) \supset \mathcal{K}(\Sigma_1, \theta_j)$. Розмаїття відмічених включень введених сорока класів зумовлює необхідність пошуків загальних раціональних підходів до опису цих класів, які значно поповнюють конкретну базу теорії груп. Це і становить основну мету роботи.

Зауважимо, що будь-який клас $\mathcal{K}(\Sigma, \theta)$ є об'єднанням класів: всіх θ -груп, які не потребують окремого дослідження, оскільки вже за означенням належать до $\mathcal{K}(\Sigma, \theta)$ і не θ -груп розглядуваного класу, вивчення яких і є головною задачею опису $\mathcal{K}(\Sigma, \theta)$.

Зауважимо також, що часто складається невірне враження про тривіальність опису класу з вужчою властивістю θ на основі опису класу з більш широкою властивістю θ . Іноколи так воно і є. Наприклад, з опису класу $\mathcal{K}(\Sigma_1, \theta_2)$ /об'єднання абелевих та мінімальних неабелевих груп/ легко отримати опис класу $\mathcal{K}(\Sigma_1, \theta_1)$ /об'єднання циклічних та мінімальних нециклічних груп/. В більшості ж випадків це далеко не так. Зокрема, з опису класу $\mathcal{K}(\Sigma_1, \theta_3)$ /об'єднання нільпотентних та мінімальних ненільпотентних груп/ аж ніяк не випливає опис класу $\mathcal{K}(\Sigma_1, \theta_2)$ /об'єднання абелевих та мінімальних неабелевих груп/, оскільки самостійного розгляду потребують нільпотентні мінімальні неабелеві групи. Відмітимо також, що подібні самостійні задачі для кожного θ мають різний рівень складності. Всі ці міркування можна повторити і для кла-

сів $\mathcal{K}(\Sigma_i, \theta)$, $\mathcal{K}(\Sigma_j, \theta)$, де $\Sigma_i \supset \Sigma_j$.

Деякі з розглядуваних класів були описані іншими авторами, а деякі з них не скоро будуть досліджуватись. Детальніше на цьому зупинимось нижче.

Окреслимо коло розглянутих задач. Для зручності означимо матрицю $M_{5,8} = (K_{ij})$, елементами якої є введені класи

$\mathcal{K}(\Sigma_i, \theta_j) = K_{ij}$, $i \in \overline{1,5}$, $j \in \overline{0,7}$ і розглянемо її як частину таблиці I.

Таблиця I

Властивість Система підгруп	θ_0 мета- цик- ліч- ність	θ_1 цик- ліч- ність	θ_2 абеле- вість	θ_3 ніль- по- тент- ність	θ_4 над- роз- в'яз- ність	θ_5 дис- пер- сив- ність за Орбіт	θ_6 φ - дис- пер- сив- ність	θ_7 дис- пер- сив- ність
Σ_1 всі максимальні підгрупи	K_{10}	K_{11}	K_{12}	K_{13}	K_{14}	K_{15}	K_{16}	K_{17}
Σ_2 всі 2-максимальні підгрупи	K_{20}	K_{21}	K_{22}	K_{23}	K_{24}	K_{25}	K_{26}	K_{27}
Σ_3 всі 3-максимальні підгрупи	K_{30}	K_{31}	K_{32}	K_{33}	K_{34}	K_{35}	K_{36}	K_{37}
Σ_4 всі підгрупи неперимарного індексу	K_{40}	K_{41}	K_{42}	K_{43}	K_{44}	K_{45}	K_{46}	K_{47}
Σ_5 всі максимальні підгрупи неперимарного індексу	K_{50}	K_{51}	K_{52}	K_{53}	K_{54}	K_{55}	K_{56}	K_{57}

Історично дослідження класів \mathcal{K}_{ij} почалося з введення класів \mathcal{K}_{12} /об'єднання абелевих та мінімальних неабелевих груп/, \mathcal{K}_{13} /об'єднання нільпотентних та мінімальних не-нільпотентних груп/. Клас \mathcal{K}_{12} введений Г. Міллером і Г. Мореном в 1903 р. Ними встановлено, що мінімальні неабелеві групи /групи Міллера-Морено або \mathcal{M} -групи/ можуть бути тільки примарними і біпримарними, а також дано опис таких біпримарних груп. Клас \mathcal{K}_{13} введений О.Ю. Шмідтом в 1924 р. Ним встановлено, що мінімальні ненільпотентні групи /групи Шмідта або

\mathcal{S} -групи/ можуть бути тільки біпримарними і дано їх першу характеристику. Пізніше завершення опису груп Міллера-Морена і груп Шмідта здійснювалось у роботах Л. Реді /1947 р., 1956 р. 1958 р./, Ю.О. Гольфанда /1948 р./ та ін. Конструктивно групи Міллера-Морена G виявилися такими:

1/ G - група кватерніонів;

2/ $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $|a| = p^m$, $|b| = p^n$,

$m \geq 2$, $n \geq 1$, $b^{-1}ab = a^{1+p^{m-1}}$;

3/ $G = (\langle c \rangle \times \langle a \rangle) \times \langle b \rangle$, $|c| = p$, $|a| = p^m$,

$|b| = p^n$, $m \geq 1$, $n \geq 1$, $b^{-1}ab = ac$, $b^{-1}cb = c$;

4/ $G = \mathcal{P} \times Q$, $Q = \langle b \rangle$, $\langle b^q \rangle = Z(G)$, $Q \not\triangleleft G$,

\mathcal{P} - мінімальна нормальна підгрупа групи G , $\omega = \delta_q(p)$;

а групи Шмідта - такими:

Скінченна група G тоді і тільки тоді є групою Шмідта, коли вона розкладається в напівпрямий добуток $G = \mathcal{P} \times Q$ своєї інваріантної силовської p -підгрупи \mathcal{P} порядку p^{ω} , $\omega \geq 1$ і неінваріантної силовської q -підгрупи $Q = \langle b \rangle$ порядку q^{β} , $\beta \geq 1$, і задоволення таким умовам:

1/ $Z(G) = \Phi(G) = \Phi(\mathcal{P}) \times \langle b^q \rangle$;

2/ $G' = \mathcal{P}$, $\mathcal{P}' = \Phi(\mathcal{P})$; $G'' = \mathcal{P}'$; $e \in \mathcal{P}' \leq p$;

3/ якщо $\mathcal{P}' \neq 1$, то $Z(\mathcal{P}) = \mathcal{P}' = \Phi(\mathcal{P})$;

4/ $\exp \mathcal{P} = p$ або $\exp \mathcal{P} = 4$ і $\mathcal{P}' \neq 1$;

5/ якщо $|\mathcal{P}'| = p^x$, то $\alpha - \gamma = \delta_q(p)$, причому

$\alpha \leq \frac{3}{2}(\alpha - \gamma)$, тобто $\gamma \leq \frac{1}{2}(\alpha - \gamma)$ і при $\alpha - \gamma$ непарному $\gamma = 0$, а \mathcal{P} - абелева мінімальна нормальна підгрупа в G ;

6/ якщо $a \in \mathcal{P} \setminus \Phi(\mathcal{P})$, то $G = \langle a, b \rangle = \langle a^{-1}ba, b \rangle$;

7/ G має точно два класи максимальних підгруп:

а/ $\{\mathcal{P} \times \langle b^q \rangle\}$, б/ $\{\Phi(\mathcal{P}) \times \langle a^{-1}ba \rangle \mid a \in \mathcal{P} \setminus \Phi(\mathcal{P})\}$

8/ довільна інваріантна в G p -підгрупа або співпадає з \mathcal{P} , або міститься в $\Phi(\mathcal{P})$;

9/ $C_{\mathcal{P}}(\langle b \rangle) = \Phi(\mathcal{P})$ і $|\mathcal{P}| = p$ при $|\mathcal{P} : \Phi(\mathcal{P})| = p$.

Тут і скрізь надалі через \mathcal{P} , \mathcal{Q} , \mathcal{R} , \mathcal{S}

будемо позначати відповідно деякі фіксовані силовські p -

q - , r - , s -підгрупи скінченної групи, p , q , r .

s - попарно різні прості числа. Відмітимо також, що в дисертації використовуються загальнозживані позначення і означення.

Клас \mathcal{K}_{23} /об'єднання нільпотентних груп та ненільпотентних груп з нільпотентними 2-максимальними підгрупами/ введений в розгляд і описаний М.Судзукі /1957 р./, З.Янко /1962 р./, В.О.Белоговим /1968 р./, М.Судзукі і З.Янко встановили, що нерозв'язні групи такого роду вичерпуються групами $PSL(2, 5)$ і $SL(2, 5)$. В.О.Белогов дав опис розв'язних груп такого роду /такі ненільпотентні групи можуть бути тільки біпримарними і трипримарними, серед них лише один тип біпримарних недисперсивних груп/, а також зауважив, що з цього опису може бути отриманий опис ненільпотентних розв'язних груп з класу \mathcal{K}_{22} .

Сам клас \mathcal{K}_{22} /об'єднання абелевих груп та неабелевих

груп з 2-максимальними абелевими підгрупами/ розглядали В.О.Шерієв /1970 р./, Л.С.Казарін /1971 р./, П.Пелфі /1981 р./.

В.О.Шерієв та Л.С.Казарін встановили будову примарних груп такого роду /їх виявилось 2I тип, їх уточненням займався С.В.Драганюк /1990 р./; П.Пелфі дав опис таких непримарних розв'язаних груп /II типів біпримарних груп, 3 типи трипримарних груп, причому серед всіх таких груп тільки одна група S_4 є не-дисперсивною/. Неважко встановити з опису нерозв'язаних груп класу K_{23} , що нерозв'язною групою з класу K_{22} є тільки група $PSL(2, 5)$.

Клас K_{16} /об'єднання φ -дисперсивних та мінімальних не φ -дисперсивних груп/ ввела в розгляд і дала їх опис Де Віво Клорінда /1979 р., 1980 р./

Класи K_{12} , K_{13} , K_{22} , K_{23} , K_{16} описані іншими авторами, але оскільки вони використовуються в роботі, то їх описи з необхідними уточненнями приводяться в теоремах 2.1.2, 2.1.1, 3.1.2, 3.1.1, 2.3.1 роботи відповідно.

Класи K_{27} , K_{30} , K_{34} , K_{35} , K_{36} , K_{37} , K_{45} , K_{46} , K_{47} , K_{50} , K_{54} , K_{55} , K_{56} , K_{57} , наскільки відомо автору, явно ще не досліджувались. Деякі результати опису класу K_{20} отримані автором, М.М.Семком, М.Ф.Кузеним /1986 р./; класу K_{40} - аспіранткою автора Л.І.Зузуук /1993 р./; класу K_{44} - В.С.Монаховим /1991 р./.

Дослідженню будови решти 18 класів і присвячена дисертація. Про повноту опису і про вклад автора в ці описи буде йти мова при викладі основних результатів дисертації.

Методи і методика дослідження. Використовуються класичні методи досліджень: абстрактних груп, теорії чисел, теорії графів. На основі цих методів перш за все отриманий повний опис

мінімальних недисперсивних груп. Після цього при дослідженні всіх інших класів застосовується такий методичний підхід: досліджуваний клас розбивається завжди на підкласи дисперсивних і недисперсивних груп. Потім дисперсивні групи вивчаються окремо з використанням класичних теорем Машке, Силова, Шура-Пассенхауза, конструкцій напівпрямих добутків, груп автоморфізмів та інших найбільш загальних і відомих результатів. Кожна з недисперсивних груп містить принаймні одну мінімальну недисперсивну підгрупу. Остання ж є завжди в розглядуваних класах груп цього ж класу. Ось чому першим кроком дослідження недисперсивних груп є повний опис мінімальних недисперсивних груп такого роду /Гх, як правило простіших, виявляється значно менше, ніж довільних мінімальних недисперсивних груп, з яких ми них вибираємо/. Використовуючи цей опис і той факт, що тільки ці групи можуть бути мінімальними недисперсивними підгрупами недисперсивних груп такого роду, описуємо решту.

Наукова новизна дослідження. Всі основні результати дисертації є новими. Найважливішими з основних результатів слід вважати такі теореми дисертації:

2.2.2, 2.2.4, 2.2.6, 2.4.1, 2.5.2, 3.2.1, 3.2.2, 3.3.1, 3.4.1, 4.2.1, 4.2.2, 4.2.3, 4.3.1, 4.3.2, 4.3.3, 4.3.4, 4.4.1, 4.4.2, 4.4.3, 4.5.1, 4.5.2, 4.5.3, 4.6.1, 4.6.2, 4.6.3, 5.1.1, 5.2.1, 5.2.2, 5.2.3, 5.3.1, 5.3.2, 5.3.3, 5.3.4, 5.3.5, 5.4.3, 5.4.4.

Теоретичне та практичне значення дослідження. Описані в роботі класи груп значно поповнюють конкретну базу теорії груп. Теоретичне значення має також запропонована методика дослідження груп. Отримані в роботі результати можуть бути використані при різноманітних теоретико-групових дослідженнях. Зокрема, во-

ни використовувались в роботах аспірантів автора О.С.Белозьорова, Н.Ю.Верпатової, С.В.Драганика, Л.І.Зузук, роботах П.П.Барішова, В.Є.Горещького, О.В.Крайчука, В.А.Крекніна, М.Ф.Кузенного, В.С.Монахова, В.В.Пилаєва, М.М.Семка, О.В.Сидорова, І.Я.Суботіна, Л.Томанська, А.Ф.Турбіна, В.В.Цибулєнка та ін.

Сформульовані і нерозв'язані в роботі задачі можуть служити темами кандидатських, дипломних та курсових робіт. Деякі розділи та параграфи можуть служити основою для спецкурсів та спецсемінарів.

Автором також опублікований навчальний посібник для студентів "Групи с умовами дисперсивности для підгруп" [21], прочитано декілька спецкурсів на теми, пов'язані з матеріалом дисертації в Київському державному педагогічному інституті ім.М.П.Драгоманова, в Кошицькому університеті ім.П.Й.Шафарика /Словакія/, в вищому педагогічному інституті м.Санта Клара /Куба/.

Апробація роботи. Основні результати опубліковані в роботах [1 - 25], доповідались на 10 міжнародних та всесоюзних конференціях, симпозиумах та колоквиумах, на наукових та методичних семінарах, конференціях Інституту математики АН України, Гомельського відділення Інституту математики АН Білорусії, Гомельського, Київського, Кошицького /Словакія/, Красноярського, Московського університетів, Вінницького, Київського педінститутів. Результати робіт [3, 4, 12, 25] неподільні і отримані за різном участю авторів. Результати інших робіт, написаних у співавторстві, належать автору дисертації.

Об'єм та структура роботи. Дисертація складається зі вступу та п'яти глав, містить 230 сторінок, у списку літератури 183 назви. Глави в свою чергу діляться на параграфи. Глави нумер-

руються римськими цифрами, а параграфи - двома арабськими /перша цифра - номер главн, друга - номер параграфа, наприклад, § 3.2 означає другий параграф третьої глави/. В першій главі 3 параграфи, в другій - 5, в третій - 4, в четвертій - 6, в п'ятій - 4. Означення, твердження, леми, теореми, наслідки, приклади, зауваження тощо нумеруються /незалежно один від одного/ трьома арабськими цифрами, наприклад, теорема 4.I.II означає одинадцятую теорему з першого параграфу глави IV.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

У вступі: обґрунтована актуальність дослідження; сформульована мета і перелічені об'єкти дослідження; висвітлені методи і методика дослідження; показана наукова новизна дослідження; обґрунтоване теоретичне і практичне значення дослідження; подана інформація про анотацію та про об'єм і структуру роботи; викладено зміст дисертації.

У главі I "Методи вивчення скінченних груп з різними умовами дисперсивності для підгруп" розробляються методи вивчення скінченних груп з різними умовами дисперсивності для деяких фіксованих систем підгруп. Своєрідна переставна властивість підгруп довільної силовської бази скінченної розв'язної небіпримарної мінімальної недисперсивної групи дозволила ввести нове поняття, яке в роботі здобуло назву *контурна нормалізованості*. Вивченню властивостей цього поняття присвячені §§ I.1, I.2. Для формулювання основних результатів цих параграфів дамо декілька необхідних означень.

Непорожня система Σ підгруп деякої групи G володіє властивістю *взаємної нормалізованості /нормалізованості/*, якщо довільна /деяка/ з під-

груп A і B будь-якої пари A, B груп з Σ містяться в нормалізаторі іншої в групі G .

Підгрупа A нормалізує підгрупу B або B нормалізується підгрупою A , якщо $A \leq N_G(B)$ і підгрупа A строго нормалізує підгрупу B або B строго нормалізується підгрупою A , якщо $A \leq N_G(B)$, а $B \not\leq N_G(A)$.

При нумерації множників розкладів, їх елементів тощо ми будемо часто вибирати індекс з групи лишків Z_n кільця цілих чисел Z за модулем n . При цьому зручно позначати через i як ціле число, так і елемент групи Z_n , який йому відповідає.

Однозначне відображення ψ групи $Z_n, n > 0$ в непорожню систему підгруп деякої групи G називається нормалізаторно-контурним, а послідовність підгруп $\psi(i), i \in Z_n$ називається контуром нормалізованості, якщо:

1/ підгрупа $\psi(i)$ строго нормалізує підгрупу $\psi(i+1)$ для всіх $i \in Z_n$;

2/ підгрупи $\psi(i)$ і $\psi(j), j \in \{i-1, i, i+1\}$ /несуюдні підгрупи/ володіють властивістю взаємної нормалізованості.

В § 1.2 основними є такі теореми, які встановлюють зв'язок між недисперсивністю скінченної групи та контуром нормалізованості.

Т е о р е м а 1.2.1. Скінченна група тоді і тільки тоді недисперсивна, коли вона або не містить ні однієї силовської бази з властивістю нормалізованості, або довільна її силовська база з властивістю нормалізованості є контуром нормалізованості.

Т е о р е м а 1.2.2. Скінченна розв'язна небіпримарна група тоді і тільки тоді є мінімальною недисперсивною групою, коли довільна її силовська база є контуром нормалізованості і ні одна силовська база будь-якої її власної підгрупи цієї властивістю не володіє.

Т е о р е м а 1.2.3. Скінченна група G тоді і тільки тоді володіє силовською базою, яка є контуром нормалізованості, коли G розкладається в добуток

$$G = \left(\begin{matrix} \times & A_i \\ i \in \mathbb{Z}_n \end{matrix} \right) \cdot \left(\begin{matrix} \times & B_i \\ i \in \mathbb{Z}_n \end{matrix} \right), \quad n \geq 3,$$

таких підгруп $\left(\begin{matrix} \times & A_i \\ i \in \mathbb{Z}_n \end{matrix} \right)$ і $\left(\begin{matrix} \times & B_i \\ i \in \mathbb{Z}_n \end{matrix} \right)$, що :

- 1/ $1 \neq A_i = [A_i, B_{i-1}] \triangleleft G$ для всіх $i \in \mathbb{Z}_n$;
- 2/ підгрупа $A_i B_i = P_i$ - фіксована силовська p_i -підгрупа групи G , при цьому підгрупа $\langle P_i, B_j \rangle$ нільпотентна для всіх $j \in \{i-1, i\}$, $i, j \in \mathbb{Z}_n$.

Відмітимо, що Р.Картер, Б.Фішер, Т.Хоукес /1968 р./, Т.Хоукес /1968 р./ використовували поняття контура нормалізованості на мові теорії графів.

В § 1.3 вивчається будова одного класу скінченних недисперсивних груп нільпотентної довжини два, комутант яких не містить ні однієї силовської підгрупи всієї групи /елементарні недисперсивні групи/, цікавого тим, що він вичерпує всі небіпримарні і містить багато біпримарних мінімальних недисперсивних груп /відмітимо принагідно, що скінченну біпримарну недисперсивну групу, комутант якої містить обов'язково одну з її силовських підгруп, надалі будемо називати особливою недисперсивною групою/. В теоремі 1.3.1 встановлено, що всі елементарні недисперсивні групи вичерпуються недисперсивними підгрупами прямих добутків ненільпотентних біпримарних дисперсивних груп спеці-

ального виду.

У главі II "Скінченні групи з деякими умовами дисперсивності для максимальних підгруп" подається повна інформація про будову класів \mathcal{K}_{12} , \mathcal{K}_{13} , \mathcal{K}_{16} /теореми 2.1.2, 2.1.1, 2.3.1 відповідно/. Як наслідок теореми 2.1.2 отримується опис класу \mathcal{K}_{11} /теорема 2.1.3/. Також встановлюється опис класів \mathcal{K}_{10} , \mathcal{K}_{14} , \mathcal{K}_{15} /теореми 2.5.2, 2.4.1, 2.3.2 відповідно/ та класу \mathcal{K}_{17} /теореми 2.2.2, 2.2.3, 2.2.4, 2.2.5, 2.2.6/.

В § 2.1 з теореми 2.1.2 випливає опис класу \mathcal{K}_{11} .

Т е о р е м а 2.1.3. Скінченні мінімальні нециклічні групи вичерпуються групами таких типів:

- 1/ G - елементарна абелева група порядку p^2 ;
- 2/ G - група кватерніонів;
- 3/ $G = \mathcal{P} \rtimes Q$, $d=1$, $Q = \langle \mathcal{B} \rangle$, $\langle \mathcal{B}^q \rangle = Z(G)$.

В § 2.2 встановлено конструктивний опис скінченних мінімальних недисперсивних груп /в теоремі 2.2.2 - особливі, в теоремі 2.2.4 - елементарні, в теоремі 2.2.6 - нерозв'язні мінімальні групи/ /клас \mathcal{K}_{17} /.

В теоремі 2.2.2 отримано 9 типів особливих мінімальних недисперсивних груп. З цієї теореми можна дістати більш компактний опис таких груп.

Т е о р е м а 2.2.3. Особливі мінімальні недисперсивні групи вичерпуються групами таких типів:

- 1/ - 2/ $G = A \rtimes (Q \rtimes \langle \mathcal{B} \rangle)$, де $\mathcal{P}(A) = A' \leq Z(A)$, $[Q, \mathcal{P}(A)] = 1$, $A/\mathcal{P}(A)$ - мінімальна нормальна підгрупа в $G/\mathcal{P}(A)$, $|A/\mathcal{P}(A)| = p^k$, $k \geq 2$, $|Q/\mathcal{P}(Q)| = q^a$, $k \geq a$, $\delta_p(q)$, $|\mathcal{B}| = p^b$, $\delta \geq 1$, $\mathcal{B}^p \in Z(G)$, $[A, \mathcal{B}] \not\leq \mathcal{P}(A)$, $A \rtimes \langle \mathcal{B} \rangle$ - силовська p -підгрупа гру-

ли G ; при цьому в групах типу 1/ $Q \times \langle \mathfrak{b} \rangle$ - група Шмідта, $C_Q(A) \leq \Phi(Q)$, $|\Phi(Q) : C_Q(A)| = q^\delta$, $\delta \leq 1$, а в групах типу 2/ $[\Phi(Q), \mathfrak{b}] \neq 1$, $C_Q(A) = \Phi(Q)$;

3/ G - група, яка є фактор-групою групи типу 1/ чи 2/ цієї теореми за їх центральною підгрупою простого порядку p , що не міститься ні в A , ні в $\langle \mathfrak{b} \rangle$. Групи цього типу можна також дістати як центральні розширення підгрупи простого порядку з $\Phi(G)$ за допомогою груп типу 1/ чи 2/.

Т е о р е м а 2.2.4. Елементарні мінімальні недисперсивні групи вичерпуються групами виду $G = \prod_{i \in \mathbb{Z}_n} S_i$, $n \geq 2$, де $S_i = A_i \times \langle \mathfrak{b}_{i-1} \rangle$ - інваріантна в G підгрупа Шмідта, $A_i \langle \mathfrak{b}_i \rangle = \mathcal{P}_i$ - силовська p_i -підгрупа групи G , $[S_i, S_j] = 1$, p_i, p_j - різні прості числа, $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{Z}_n$.

З теореми 2.2.4 можна дістати опис елементарних мінімальних недисперсивних груп в дещо іншому вигляді, аналогічному до опису особливих мінімальних недисперсивних груп в теоремі 2.2.3 /теорема 2.2.5/. Наявність різних видів опису особливих та елементарних мінімальних недисперсивних груп дозволяє більш ефективно конструювати такі групи, а також використовувати їх при вивченні скінченних недисперсивних груп.

Т е о р е м а 2.2.6. Скінченні нерозв'язні мінімальні недисперсивні групи вичерпуються групами наступних типів:

- 1/ G - група, в якій $\Phi(G)$ τ -група,
 $G/\Phi(G) \cong \text{PSL}(2, 2^q)$, $q > 2$, $\tau \mid 2^q + 1$;
- 2/ G - група, в якій $\Phi(G) = \mathcal{D} \times \mathcal{R}$, $|\mathcal{D}| \leq 2$,
 $G/\mathcal{R} \cong \text{SL}(2, 3^q)$ або $\text{PSL}(2, 3^q)$, $\tau > 2$, $q > 2$,
 $\tau \mid 3^q + 1$;
- 3/ G - група, в якій $\Phi(G) = \mathcal{D} \times \mathcal{R}$, $|\mathcal{D}| \leq 2$,

груп A і B будь-якої пари A, B груп з Σ містяться в нормалізаторі іншої в групі G .

Підгрупа A нормалізує підгрупу B або B нормалізується підгрупою A , якщо $A \leq N_G(B)$ і підгрупа A строго нормалізує підгрупу B або B строго нормалізується підгрупою A , якщо $A \leq N_G(B)$, а $B \not\leq N_G(A)$.

При нумерації мисників розкладів, їх елементів тощо ми будемо часто вибирати індекс з групи лишків Z_n кільця цілих чисел Z за модулем n . При цьому зручно позначати через i як ціле число, так і елемент групи Z_n , який йому відповідає.

Однозначне відображення ψ групи $Z_n, n > 0$ в непорожню систему підгруп деякої групи G називається нормалізаторно-контурним, а послідовність підгруп $\psi(i), i \in Z_n$ називається контуром нормалізованості, якщо:

1/ підгрупа $\psi(i)$ строго нормалізує підгрупу $\psi(i+1)$ для всіх $i \in Z_n$;

2/ підгрупи $\psi(i)$ і $\psi(j), j \in \{i-1, i, i+1\}$ /не-сусідні підгрупи/ володіють властивістю взаємної нормалізованості.

В § 1.2 основними є такі теореми, які встановлюють зв'язок між недисперсивністю скінченної групи та контуром нормалізованості.

Т е о р е м а 1.2.1. Скінченна група тоді і тільки тоді недисперсивна, коли вона або не містить ні однієї силовської бази з властивістю нормалізованості, або довільна її силовська база з властивістю нормалізованості є контуром нормалізованості.

Т е о р е м а 1.2.2. Скінченна розв'язна небіпримарна група тоді і тільки тоді є мінімальною недисперсивною групою, коли довільна її силовська база є контуром нормалізованості і ні одна силовська база будь-якої її власної підгрупи цієї властивістю не володіє.

Т е о р е м а 1.2.3. Скінченна група G тоді і тільки тоді володіє силовською базою, яка є контуром нормалізованості, коли G розкладається в добуток

$$G = \left(\begin{matrix} x & A_i \\ i \in \mathbb{Z}_n \end{matrix} \right) \cdot \left(\begin{matrix} x & B_i \\ i \in \mathbb{Z}_n \end{matrix} \right), \quad n \geq 3,$$

таких підгруп $\left(\begin{matrix} x & A_i \\ i \in \mathbb{Z}_n \end{matrix} \right) \cdot \left(\begin{matrix} x & B_i \\ i \in \mathbb{Z}_n \end{matrix} \right)$, що :

- 1/ $1 \neq A_i = [A_i, B_{i-1}] \triangleleft G$ для всіх $i \in \mathbb{Z}_n$;
- 2/ підгрупа $A_i B_i = P_i$ - фіксована силовська p_i -підгрупа групи G , при цьому підгрупа $\langle P_i, B_j \rangle$ нільпотентна для всіх $j \in \{i-1, i\}$, $i, j \in \mathbb{Z}_n$.

Відмітимо, що Р.Картер, Б.Фішер, Т.Хукес /1968 р./, Т.Хукес /1968 р./ використовували поняття контура нормалізованості на мові теорії графів.

В § 1.3 вивчається будова одного класу скінченних недисперсивних груп нільпотентної довжини два, комутант яких не містить ні однієї силовської підгрупи всієї групи /елементарні недисперсивні групи/, цікавого тим, що він вичерпує всі небіпримарні і містить багато біпримарних мінімальних недисперсивних груп /відмітимо принагідно, що скінченну біпримарну недисперсивну групу, комутант якої містить обов'язково одну з її силовських підгруп, надалі будемо називати особливою недисперсивною групою/. В теоремі 1.3.1 встановлено, що всі елементарні недисперсивні групи вичерпуються недисперсивними підгрупами прямих добутоків нільпотентних біпримарних дисперсивних груп спеці-

ального виду.

У главі II "Скінченні групи з деякими умовами дисперсивності для максимальних підгруп" подається повна інформація про будову класів \mathcal{K}_{12} , \mathcal{K}_{13} , \mathcal{K}_{16} /теореми 2.1.2, 2.1.1, 2.3.1 відповідно/. Як наслідок теореми 2.1.2 отримується опис класу \mathcal{K}_{11} /теорема 2.1.3/. Також встановлюється опис класів \mathcal{K}_{10} , \mathcal{K}_{14} , \mathcal{K}_{15} /теореми 2.5.2, 2.4.1, 2.3.2 відповідно/ та класу \mathcal{K}_{17} /теореми 2.2.2, 2.2.3, 2.2.4, 2.2.5, 2.2.6/.

В § 2.1 з теореми 2.1.2 випливає опис класу \mathcal{K}_{11} .

Т е о р е м а 2.1.3. Скінченні мінімальні нециклічні групи вичерпуються групами таких типів:

1/ G - елементарна абелева група порядку p^2 ;

2/ G - група кватерніонів;

3/ $G = \mathcal{P} \times Q$, $\mathcal{L} = 1$, $Q = \langle \mathcal{B} \rangle$, $\langle \mathcal{B}^q \rangle = Z(G)$.

В § 2.2 встановлено конструктивний опис скінченних мінімальних недисперсивних груп /в теоремі 2.2.2 - особливі, в теоремі 2.2.4 - елементарні, в теоремі 2.2.6 - нерозв'язні мінімальні групи/ /клас \mathcal{K}_{17} /.

В теоремі 2.2.2 отримано 9 типів особливих мінімальних недисперсивних груп. З цієї теореми можна дістати більш компактний опис таких груп.

Т е о р е м а 2.2.3. Особливі мінімальні недисперсивні групи вичерпуються групами таких типів:

1/ - 2/ $G = A \times (Q \times \langle \mathcal{B} \rangle)$, де $\mathcal{F}(A) = A' \leq Z(A)$, $[Q, \mathcal{F}(A)] = 1$, $A / \mathcal{F}(A)$ - мінімальна нормальна підгрупа в $G / \mathcal{F}(A)$, $|A / \mathcal{F}(A)| = p^k$, $k \geq 2$, $|Q / \mathcal{F}(Q)| = q^b$, $k \geq b$, $\delta_p(q)$, $|\mathcal{B}| = p^b$, $b \geq 1$, $\mathcal{B}^p \in Z(G)$, $|A \times \mathcal{B}| \nsubseteq \mathcal{F}(A)$, $A \times \langle \mathcal{B} \rangle$ - силовська p -підгрупа гру-

ли G : при цьому в групах типу 1/ $Q \times \langle \mathcal{B} \rangle$ - група Шмідта, $C_Q(A) \leq \Phi(Q)$, $|\Phi(Q) : C_Q(A)| = q^x$, $x \leq 1$, а в групах типу 2/ $[\Phi(Q), \mathcal{B}] \neq 1$, $C_Q(A) = \Phi(Q)$:

3/ G - група, яка є фактор-групою групи типу 1/ чи 2/ цієї теорема за їх центральною підгрупою простого порядку p , що не міститься ні в A , ні в $\langle \mathcal{B} \rangle$. Групи цього типу можна також дістати як центральні розширення підгрупи простого порядку з $\Phi(G)$ за допомогою груп типу 1/ чи 2/.

Т е о р е м а 2.2.4. Елементарні мінімальні недисперсивні групи вичерпуються групами виду $G = \prod_{i \in Z_n} S_i$, $n \geq 2$, де $S_i = A_i \times \langle \mathcal{B}_{i-1} \rangle$ - інваріантна в G підгрупа Шмідта, $A_i \langle \mathcal{B}_i \rangle = \mathcal{P}_i$ - силовська p_i -підгрупа групи G , $[S_i, S_j] = 1$, p_i, p_j - різні прості числа, $i \neq j$, $i, j \in Z_n$.

З теореми 2.2.4 можна дістати опис елементарних мінімальних недисперсивних груп в деяко іншому вигляді, аналогічному до опису особливих мінімальних недисперсивних груп в теоремі 2.2.3 /теорема 2.2.5/. Наявність різних видів опису особливих та елементарних мінімальних недисперсивних груп дозволяє більш ефективно конструювати такі групи, а також використовувати їх при вивченні скінчених недисперсивних груп.

Т е о р е м а 2.2.6. Скінченні нерозв'язні мінімальні недисперсивні групи вичерпуються групами наступних типів:

- 1/ G - група, в якій $\Phi(G)$ τ -група,
- $G/\Phi(G) \cong \text{PSL}(2, 2^q)$, $q > 2$, $\tau \mid 2^q + 1$;
- 2/ G - група, в якій $\Phi(G) = \mathcal{D} \times \mathcal{B}$, $|\mathcal{D}| \leq 2$,
- $G/\mathcal{B} \cong \text{SL}(2, 3^q)$ або $\text{PSL}(2, 3^q)$, $\tau > 2$, $q > 2$, $\tau \mid 3^q + 1$;
- 3/ G - група, в якій $\Phi(G) = \mathcal{D} \times \mathcal{B}$, $|\mathcal{D}| \leq 2$,

\mathbb{R} - 5-група, $G/\mathbb{R} \cong SL(2, 5)$ або $PSL(2, 5)$,

4/ G - група, в якій $\varphi(G) = \mathbb{Q} \times \mathbb{P} \times \mathbb{R}$, $|\mathbb{Q}| < 2$

$G/\mathbb{Q} \times \mathbb{R} \cong SL(2, p)$ або $PSL(2, p)$, $\tau | p + 1$

$p \geq 13$, $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$, $p^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod{16}$

5/ G - група, в якій $\varphi(G) = \mathbb{R} \times S$, $G/\varphi(G)$ група Судзуні $Sz(2^q)$, $q > 2$, $\tau | 2^{2q} - 1$, $\tau | 2^{2q} + 1$

$\tau \nmid 3$ не є одночасно дільниками чисел $2^q - 2^{q+1/2} + 1$ і $2^q + 2^{q+1/2} + 1$.

В § 2.3 встановлено конструктивний опис скінченних мінімальних не дисперсивних за Оре груп /клас \mathcal{K}_{15} /.

Т е о р е м а 2.3.2. Скінченні мінімальні не дисперсивні за Оре групи вичерпуються не дисперсивними за Оре групами Шмідта виду $G = \mathbb{P} \times \mathbb{Q}$, $p < q$.

В § 2.4 встановлено конструктивний опис скінченних мінімальних ненадрозв'язних груп /клас \mathcal{K}_{14} /. Такі групи вивчалися в роботах Б.Хупперта /1954 р./, К.Дьорка /1966 р./, С.І.Шатла /1970 р., 1973 р./, В.Т.Нагребельського /1975 р./ . Ними отримано багато різних властивостей цих груп /всі ці властивості сформульовані в теоремі 2.1.4/. Зокрема, доведено, що вони дисперсивні і не більше ніж трипримарні, володіють єдиною силовською підгрупою шмідтовського типу. Нехай скінченна група G розкладається в налівпрямий добуток $G = \mathbb{P} \times \mathbb{B}$ своїх силовських підгруп \mathbb{P} і \mathbb{B} і підгрупа \mathbb{P} задовольняє наступним умовам: 1/ \mathbb{P} - силовська p -підгрупа групи G ; 2/ експонента \mathbb{P} не перевищує числа p або числа 4; 3/ $\mathbb{P}' \leq \varphi(\mathbb{P}) \leq \mathcal{Z}(\mathbb{P})$; 4/ $\mathbb{P}' = 1$ при $\varphi(\mathbb{P}) \neq \mathcal{Z}(\mathbb{P})$; 5/ експонента $\varphi(\mathbb{P})$ не перевищує числа p ; 6/ $\mathbb{P}/\varphi(\mathbb{P})$ - нециклічна мінімальна нормальна підгрупа групи $G/\varphi(\mathbb{P})$. Тоді підгрупу \mathbb{P} будемо називати силовською p -підгрупою

групи G шмідтовського типу.

Теорема 2.4.1. Скінченні мінімальні ненадрозв'язні групи вичерпуються групами наступних типів:

- 1/ $G = \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ - група Шмідта, $|\mathcal{P}| \geq p^2$;
- 2/ $G = \mathcal{P} \rtimes \mathcal{Q}$, \mathcal{P} - силовська p -підгрупа групи G шмідтовського типу, \mathcal{Q} - циклічна група, $\mathcal{P} \rtimes \mathcal{Q}$ і $\mathcal{P} \times \mathcal{C}(\mathcal{Q})$ - надрозв'язні групи, $[\mathcal{P}, \mathcal{C}(\mathcal{Q})] = \mathcal{P}$;
- 3/ $G = \mathcal{P} \rtimes \mathcal{Q}$, \mathcal{P} - силовська p -підгрупа групи G шмідтовського типу; $\mathcal{C}(\mathcal{Q}) > C_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}) < G$; $\mathcal{Q}/C_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P})$ - або неабелева група порядку q^3 експоненти q , або примарна група Міллера-Морена, яка містить циклічну максимальну підгрупу; $p \equiv 1 \pmod{q}$; $\mathcal{P} \rtimes \mathcal{Q}_1$, $\mathcal{P} \rtimes \mathcal{Q}_1$ - надрозв'язні групи, де \mathcal{Q}_1 - довільна максимальна підгрупа з \mathcal{Q} ; $[\mathcal{P}, \mathcal{Q}_1] = \mathcal{P}$;
- 4/ $G = \mathcal{P} \rtimes (\mathcal{Q} \times \mathcal{R})$, \mathcal{P} - силовська p -підгрупа групи G шмідтовського типу; \mathcal{Q} і \mathcal{R} - циклічні групи; $[\mathcal{P}, \mathcal{Q}] = \mathcal{P}$, $[\mathcal{Q}, \mathcal{R}] = \mathcal{Q}$, $\mathcal{C}(\mathcal{P}) \times \mathcal{C}(\mathcal{Q}) \leq \mathcal{Z}(\mathcal{P} \times \mathcal{Q})$, $\mathcal{C}(\mathcal{R}) = \mathcal{Z}(\mathcal{Q} \times \mathcal{R})$; $\mathcal{P} \times \mathcal{R}$ - надрозв'язна група.

В § 2.5 встановлюється опис мінімальних неметациклічних груп /клас \mathcal{K}_{10} /. Всього в теоремі 2.5.2 отримано 30 типів таких груп. Ці групи раніше вивчали Н.Блекберн /1961 р./ /нільпотентний випадок/ і М.Курніо /1984 р./ /ненільпотентний випадок/. Вони встановили, що такі групи не більше ніж трипримарні, дисперсовані за Оре і що їх комутант може бути однією з груп: одинична група, група порядку p , група порядку pq , група кватерніонів; p , q - прості /на обов'язково різні числа/. В роботі М.Курніо необов'язаними дивлялися групи типу G /ненільпотентні біпримарні мінімальні неметациклічні групи з інваріантною силовською підгрупою простого порядку/. В теоре-

мах 2.1.5 та 2.1.6 уточнюються будова нільпотентних та ненільпотентних мінімальних неметациклічних груп. Головна ж частина цього параграфу присвячена дослідженню груп типу $G_{\mathcal{L}}$. Виявилось, що всіх таких груп є 19 неізоморфних типів.

У главі III "Скінченні групи з деякими умовами дисперсивності для 2-максимальних підгруп" подається повна інформація про будову класів \mathcal{K}_{22} , \mathcal{K}_{23} /теореми 3.1.2, 3.1.1/. Як наслідок теореми 3.1.2 отримується опис класу \mathcal{K}_{24} /теорема 3.1.3/. Також встановлюється опис класів \mathcal{K}_{24} /теорема 3.4.1/, \mathcal{K}_{25} /теорема 3.3.1/, \mathcal{K}_{26} /теореми 3.2.1, 3.2.2/.

В § 3.1 з теореми 3.1.2 отримується результат, який дає опис нециклічних груп з 2-максимальними циклічними підгрупами.

Т е о р е м а 3.1.3. Скінченні нециклічні групи, в яких всі 2-максимальні підгрупи циклічні, вичерпуються групами наступних типів:

- 1/ G - мінімальна нециклічна група;
- 2/ $G = \mathcal{P} \times H$, $|H| = p$, H - мінімальна нециклічна не p^d -група;
- 3/ $G = \mathcal{P} \rtimes Q$ - група Шмідта, $|Q| = q$, \mathcal{P} - мінімальна нециклічна p -група;
- 4/ $G = \mathcal{P} \rtimes Q$, $Q = \langle b \rangle$, $\mathcal{P} \rtimes \langle b^q \rangle$ - мінімальна нециклічна група;
- 5/ $G = \mathcal{P} \rtimes Q$, $Q = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $|a| = |b| = q$, $\mathcal{P} \rtimes \langle a \rangle$ - мінімальна нециклічна група, $C_Q(\mathcal{P}) = \langle b \rangle$;
- 6/ $G = \mathcal{P} \rtimes Q$, Q - група кватерніонів, $d = 1$, $p > 2$, $C_Q(\mathcal{P}) \neq Q$;
- 7/ $G = \mathcal{P} \rtimes Q$, \mathcal{P} - циклічна група порядку p^2 , $\mathcal{P} \rtimes Q$ - мінімальна нециклічна група;
- 8/ $G = \mathcal{P} \rtimes Q$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_1 \rtimes Q$, $\mathcal{P}_2 \rtimes Q$ -

мінімальні нециклічні групи;

9/ $G = \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_1 \leq \mathcal{Z}(G)$, $\mathcal{P}_2 \times \mathcal{Q}$ - мінімальна нециклічна група, $\alpha = 1$;

10/ $G = (\mathcal{P} \times \mathcal{Q}) \times \mathcal{R}$, $\mathcal{P} \times \mathcal{R}$, $\mathcal{Q} \times \mathcal{R}$ - мінімальні нециклічні групи;

11/ $G = \mathcal{P} \times (\mathcal{Q} \times \mathcal{R})$, $\beta = \gamma = 1$, $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$, $\mathcal{P} \times \mathcal{R}$ - мінімальні нециклічні групи;

12/ G - нециклічна група порядку p^3 ;

13/ G - узагальнена група кватерніонів порядку 16.

В § 3.2 дається конструктивний опис скінченних груп, в яких всі 2-максимальні підгрупи φ -дисперсивні /клас \mathcal{K}_{26} / в теоремі 3.2.1 - недисперсивні, а в теоремі 3.2.2 - дисперсивні групи такого роду/.

Т е о р е м а 3.2.1. Скінченні недисперсивні групи, в яких всі 2-максимальні підгрупи φ -дисперсивні хоч би для одного впорядкування простих чисел φ , вичерпуються групами наступних типів:

1/ $G = \mathcal{A}(\mathcal{Q} \times \langle \mathcal{B} \rangle)$, $\mathcal{A} \triangleleft G$, $\mathcal{A} \cdot \langle \mathcal{B} \rangle = \mathcal{P}$ - неабелева силовська p -підгрупа з G , $\mathcal{A} \times \mathcal{Q}$ - група Шмідта, $\mathcal{B}^p \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$, $[\mathcal{Q}, \mathcal{B}] \neq 1$, $q > p$;

2/ $G = \mathcal{A}(\mathcal{Q} \times \langle \mathcal{B} \rangle)$, $\mathcal{A} \triangleleft G$, $\mathcal{Q} \times \langle \mathcal{B} \rangle$ - група Шмідта, максимальна в G , $\mathcal{A} \langle \mathcal{B} \rangle = \mathcal{P}$ - неабелева силовська p -підгрупа з G , $\mathcal{Z}(G) = \langle \mathcal{B}^q \rangle \times C_{\mathcal{Q}}(\mathcal{A})$, $C_{\mathcal{Q}}(\mathcal{A}) \leq \mathcal{C}(\mathcal{Q})$, $|\mathcal{C}(\mathcal{Q}) : C_{\mathcal{Q}}(\mathcal{A})| \leq q$, $\mathcal{C}(\mathcal{A}) \leq \mathcal{C}(\langle \mathcal{B} \rangle)$, $|\mathcal{C}(\mathcal{A})| \leq p$;

3/ $G \cong SL(2, 5)$ або $\mathcal{P}SL(2, 5)$;

4/ $G \cong SL(2, p)$ або $\mathcal{P}SL(2, p)$, $p > 13$,

$p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$, $p^2 + 1 \not\equiv 0 \pmod{16}$;

5/ $G \cong \mathcal{P}SL(2, 2^q)$, $q, 2^q + 1$ - непарні прості числа;

\mathcal{R} - 5-група, $G/\mathcal{R} \cong SL(2, 5)$ або $PSL(2, 5)$,
 4/ G - група, в якій $\varphi(G) = \mathcal{D} \times \mathcal{P} \times \mathcal{R}$, $|\mathcal{D}| < 2$

$G/\mathcal{P} \times \mathcal{R} \cong SL(2, p)$ або $PSL(2, p)$, $\tau \mid p+1$

$p \geq 13$, $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$, $p^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod{16}$.

5/ G - група, в якій $\varphi(G) = \mathcal{R} \times S$, $G/\varphi(G)$ група Судзукі $Sz(2^q)$, $q > 2$, $\tau \mid 2^{2q} + 1$, $\tau \mid 2^{2q} + 1$,
 $\tau \nmid 2^q + 2^{q+1/2} + 1$ і $2^q + 2^{q+1/2} + 1$.

В § 2.3 встановлено конструктивний опис скінченних мінімальних не дисперсивних за Оре груп /клас \mathcal{K}_{15} /.

Т е о р е м а 2.3.2. Скінченні мінімальні не дисперсивні за Оре групи вичерпуються не дисперсивними за Оре групами Шмідта виду $G = \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$, $p < q$.

В § 2.4 встановлено конструктивний опис скінченних мінімальних ненадрозв'язних груп /клас \mathcal{K}_{14} /. Такі групи вивчались в роботах Б.Хупперта /1954 р./, К.Дьорка /1966 р./, Г.І.Шаттла /1970 р., 1973 р./, В.Т.Нагребельського /1975 р./ . Ними отримано багато різних властивостей цих груп /всі ці властивості сформульовані в теоремі 2.1.4/. Зокрема, доведено, що вони дисперсивні і не більш ніж трипримарні, володіють єдиною силовською підгрупою шмідтовського типу. Нехай скінченна група G розкладається в налівпрямий добуток $G = \mathcal{P} \times \mathcal{B}$ своїх холовських підгруп \mathcal{P} і \mathcal{B} і підгрупа \mathcal{P} задовольняє наступним умовам: 1/ \mathcal{P} - силовська, p - підгрупа групи G ; 2/ експонента \mathcal{P} не перевищує числа p або числа 4; 3/ $\mathcal{P}' \leq \varphi(\mathcal{P}) \leq \mathcal{Z}(\mathcal{P})$; 4/ $\mathcal{P}' = 1$ при $\varphi(\mathcal{P}) \neq \mathcal{Z}(\mathcal{P})$; 5/ експонента $\varphi(\mathcal{P})$ не перевищує числа p ; 6/ $\mathcal{P}/\varphi(\mathcal{P})$ - нециклічна мінімальна нормальна підгрупа групи $G/\varphi(\mathcal{P})$. Тоді підгрупу \mathcal{P} будемо називати силовською p - підгрупою

групи G шмідтовського типу.

Теорема 2.4.1. Скінченні мінімальні ненадрозв'язні групи вичерпуються групами наступних типів:

- 1/ $G = \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ - група Шмідта, $|\mathcal{P}| \geq p^2$;
- 2/ $G = \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$, \mathcal{P} - силовська p -підгрупа групи G шмідтовського типу, \mathcal{Q} - циклічна група, $\mathcal{P}(\mathcal{P}) \times \mathcal{Q}$ і $\mathcal{P} \times \mathcal{P}(\mathcal{Q})$ - надрозв'язні групи, $[\mathcal{P}, \mathcal{P}(\mathcal{Q})] = \mathcal{P}$;
- 3/ $G = \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$, \mathcal{P} - силовська p -підгрупа групи G шмідтовського типу; $\mathcal{P}(\mathcal{Q}) > C_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}) \triangleleft G$;
 $\mathcal{Q}/C_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P})$ - або неабелева група порядку q^3 експоненти q , або примарна група Міллера-Морена, яка містить циклічну максимальну підгрупу; $p \equiv 1 \pmod{q}$; $\mathcal{P}(\mathcal{P}) \times \mathcal{Q}$, $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}_1$ - надрозв'язні групи, де \mathcal{Q}_1 - довільна максимальна підгрупа з \mathcal{Q} ; $[\mathcal{P}, \mathcal{Q}_1] = \mathcal{P}$;

- 4/ $G = \mathcal{P} \times (\mathcal{Q} \times \mathcal{R})$, \mathcal{P} - силовська p -підгрупа групи G шмідтовського типу; \mathcal{Q} і \mathcal{R} - циклічні групи; $[\mathcal{P}, \mathcal{Q}] = \mathcal{P}$, $[\mathcal{Q}, \mathcal{R}] = \mathcal{Q}$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}) \times \mathcal{P}(\mathcal{Q}) \leq Z(\mathcal{P} \times \mathcal{Q})$, $\mathcal{P}(\mathcal{R}) = Z(\mathcal{Q} \times \mathcal{R})$; $\mathcal{P} \times \mathcal{R}$ - надрозв'язна група.

В § 2.5 встановлюється опис мінімальних неметациклічних груп /клас \mathcal{K}_{10} /. Всього в теоремі 2.5.2 отримано 30 типів таких груп. Ці групи раніше вивчали Н.Блекберн /1961 р./ /нільпотентний випадок/ і М.Курціо /1984 р./ /ненільпотентний випадок/. Вони встановили, що такі групи не більш ніж трипримарні, дисперсивні за Оре і що їх комутант може бути однією з груп: одиначна група, група порядку p , група порядку pq , група кватерніонів; p , q - прості /не обов'язково різні числа/. В роботі М.Курціо неспівняними виявилися групи типу G /ненільпотентні біпримарні мінімальні неметациклічні групи з інваріантною силовською підгрупою простого порядку/. В теоремі

мах 2.1.5 та 2.1.6 уточняється будова нільпотентних та ненільпотентних мінімальних неметациклічних груп. Головна ж частина цього параграфу присвячена дослідженню груп типу G_{α} . Виявилось, що всіх таких груп в 19 неізоморфних типів.

У главі III "Скінченні групи з деякими умовами дисперсивності для 2-максимальних підгруп" подається повна інформація про будову класів \mathcal{K}_{22} , \mathcal{K}_{23} /теореми 3.1.2, 3.1.1/. Як наслідок теореми 3.1.2 отримується опис класу \mathcal{K}_{24} /теорема 3.1.3/. Також встановлюється опис класів \mathcal{K}_{24} /теорема 3.4.1/, \mathcal{K}_{25} /теорема 3.3.1/, \mathcal{K}_{26} /теореми 3.2.1, 3.2.2/.

В § 3.1 з теореми 3.1.2 отримується результат, який дає опис нециклічних груп з 2-максимальними циклічними підгрупами.

Т е о р е м а 3.1.3. Скінченні нециклічні групи, в яких всі 2-максимальні підгрупи циклічні, вичерпуються групами наступних типів:

- 1/ G - мінімальна нециклічна група;
- 2/ $G = \mathbb{P} \times H$, $|\mathbb{P}| = p$, H - мінімальна нециклічна не pd -група;
- 3/ $G = \mathbb{P} \rtimes Q$ - група Шмідта, $|Q| = q$, \mathbb{P} - мінімальна нециклічна p -група;
- 4/ $G = \mathbb{P} \rtimes Q$, $Q = \langle a \rangle$, $\mathbb{P} \rtimes \langle a^q \rangle$ - мінімальна нециклічна група;
- 5/ $G = \mathbb{P} \rtimes Q$, $Q = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $|a| = |b| = q$, $\mathbb{P} \rtimes \langle a \rangle$ - мінімальна нециклічна група, $C_Q(\mathbb{P}) = \langle b \rangle$;
- 6/ $G = \mathbb{P} \rtimes Q$, Q - група кватерніонів, $\alpha = 1$, $p > 2$, $C_Q(\mathbb{P}) \neq Q$;
- 7/ $G = \mathbb{P} \rtimes Q$, \mathbb{P} - циклічна група порядку p^2 , $\Phi(\mathbb{P}) \rtimes Q$ - мінімальна нециклічна група;
- 8/ $G = \mathbb{P} \rtimes Q$, $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$, $\mathbb{P}_1 \rtimes Q$, $\mathbb{P}_2 \rtimes Q$ -

мінімальні нециклічні групи;

9/ $G = \mathbb{P} \times Q$, $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$, $\mathbb{P}_i \in \mathcal{Z}(G)$, $\mathbb{P}_2 \times Q$ - мінімальна нециклічна група, $\alpha = 1$;

10/ $G = (\mathbb{P} \times Q) \times R$, $\mathbb{P} \times R$, $Q \times R$ - мінімальні нециклічні групи;

11/ $G = \mathbb{P} \times (Q \times R)$, $\beta = \gamma = 1$, $\mathbb{P} \times Q$, $\mathbb{P} \times R$ - мінімальні нециклічні групи;

12/ G - нециклічна група порядку p^3 ;

13/ G - узагальнена група кватерніонів порядку 16.

В § 3.2 дається конструктивний опис скінченних груп, в яких всі 2-максимальні підгрупи φ - дисперсивні /клас \mathcal{K}_{2G} / в теоремі 3.2.1 - недисперсивні, а в теоремі 3.2.2 - дисперсивні групи такого роду/.

Т е о р е м а 3.2.1. Скінченні недисперсивні групи, в яких всі 2-максимальні підгрупи φ - дисперсивні хоч би для одного впорядкування простих чисел φ , вичерпуються групами наступних типів:

1/ $G = A(Q \times \langle \mathcal{B} \rangle)$, $A \triangleleft G$, $A \cdot \langle \mathcal{B} \rangle = \mathbb{P}$ - неабелева силовська p -підгрупа в G , $A \times Q$ - група Шмідта, $\mathcal{B}^p \in \Phi(A)$, $[Q, \mathcal{B}] \neq 1$, $q > p$;

2/ $G = A(Q \times \langle \mathcal{B} \rangle)$, $A \triangleleft G$, $Q \times \langle \mathcal{B} \rangle$ - група Шмідта, максимальна в G , $A \cdot \langle \mathcal{B} \rangle = \mathbb{P}$ - неабелева силовська p -підгрупа в G , $\mathcal{Z}(G) = \langle \mathcal{B}^q \rangle \times C_Q(A)$, $C_Q(A) \leq \Phi(Q)$, $|C_Q(A) : C_Q(A)| \leq q$, $\Phi(A) \leq \Phi(\langle \mathcal{B} \rangle)$, $|C_Q(A)| \leq p$;

3/ $G \cong SL(2, 5)$ або $\mathbb{P}SL(2, 5)$;

4/ $G \cong SL(2, p)$ або $\mathbb{P}SL(2, p)$, $p \geq 13$,

$p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$, $p^2 \not\equiv 0 \pmod{16}$;

5/ $G \cong \mathbb{P}SL(2, 2^q)$, $q, 2^q - 1$ - непарні прості числа;

6/ $G \cong SL(2, 3^q)$ або $PSL(2, 3^q)$, $q > 2$;

7/ $G \cong Sz(2^q)$, $q, 2^q - 1$ - непарні прості числа.

Т е о р е м а 3.2.2. Скінченні дисперсивні групи, в яких кожна 2-максимальна підгрупа φ -дисперсивна хоч би для одного впорядкування простих чисел φ , вичерпуються групами наступних типів:

1/ G - скінченна φ -дисперсивна група;

2/ $G = \mathcal{P} \rtimes \mathcal{Q}$ - не φ -дисперсивна група Шмідта;

3/ $G = \mathcal{P} \rtimes \mathcal{Q}$, \mathcal{Q} - циклічна q -група непростого порядку, $\mathcal{P} \rtimes \Phi(\mathcal{Q})$ - група Шмідта, $\Phi(\mathcal{P}) \leq \mathcal{Z}(G)$;

4/ $G = \mathcal{P} \rtimes \mathcal{Q}$, $\mathcal{P} = \langle c \rangle \rtimes \mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_1 \rtimes \mathcal{Q}$ - група Шмідта, $\langle c \rangle \rtimes \Phi(\mathcal{P}_1) \leq \mathcal{Z}(G)$, $c^p \in \Phi(\mathcal{P}_1)$;

5/ $G = \mathcal{P} \rtimes \mathcal{Q}$; $\Phi(\mathcal{P}) \rtimes \mathcal{Q}$, $G/\Phi(\mathcal{P})$ - групи Шмідта;

6/ $G = \mathcal{P} \rtimes \mathcal{Q}$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2$; $\mathcal{P}_1 \rtimes \mathcal{Q}$, $\mathcal{P}_2 \rtimes \mathcal{Q}$ - групи Шмідта, $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \Phi(\mathcal{P}_1) = \Phi(\mathcal{P}_2) = \Phi(\mathcal{P}) \leq \mathcal{Z}(G)$, довільна підгрупа Шмідта з G містить $\Phi(\mathcal{P})$;

7/ $G = \mathcal{P} \rtimes \mathcal{Q}$, $\mathcal{Q} = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $b^q \in \Phi(\langle a \rangle)$, \mathcal{Q} - абелева група або група Міллера-Морена, відмінна від групи дієдра порядку 8, $\mathcal{P} \rtimes \langle a \rangle$ - група Шмідта, $C_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}) = \Phi(\langle a \rangle) \langle b \rangle$, $\Phi(\mathcal{P}) \leq \mathcal{Z}(G)$;

8/ $G = \mathcal{P} \rtimes (\mathcal{Q} \rtimes \mathcal{R})$, $\mathcal{P} \rtimes \mathcal{Q}$ - група Шмідта, $|\mathcal{R}| = \tau$, $\tau \in \{p, q\}$;

9/ $G = \mathcal{Q} \rtimes (\mathcal{P} \rtimes \mathcal{Q})$, $\mathcal{P} \rtimes \mathcal{Q}$ - група Шмідта, \mathcal{R} - не-одичинна елементарна абелева τ -підгрупа, яка є мінімальною нормальною підгрупою групи G , $\tau \in \{p, q\}$.

В § 3.3 з теорем 3.2.1 і 3.2.2 /безпосереднім переглядом всіх типів груп із цих теорем/ отримано опис класу \mathcal{K}_{25} .

Т е о р е м а 3.3.1. Скінченні групи, в яких всі 2-максимальні підгрупи дисперсивні за Орє, вичерпуються групами на-

ступних типів:

1/ G - скінченна дисперсивна за Оре група;

2/ $G = \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ - група Шмідта, $p < q$;

3/ $G = \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$, \mathcal{Q} - циклічна група, $\mathcal{P} \times \mathcal{C}(\mathcal{Q})$ -
група Шмідта, $\mathcal{C}(\mathcal{P}) \leq \mathcal{Z}(G)$, $p < q$;

4/ $G = \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_1 \triangleleft G$, $\mathcal{P}_2 \triangleleft G$, $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 =$
 $= \mathcal{C}(\mathcal{P}_1) = \mathcal{C}(\mathcal{P}_2)$, $\mathcal{P}_2 = \mathcal{C}(\mathcal{P}) \langle c \rangle$, $c \in \mathcal{P}_1$, $c^p \in \mathcal{C}(\mathcal{P})$, $\mathcal{P}_2 \leq \mathcal{Z}(G)$

$\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ - група Шмідта, $p < q$, кожна підгрупа Шмідта в
 G містить $\mathcal{C}(\mathcal{P})$;

5/ $G = \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2$; $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{Q}$, $\mathcal{P}_2 \times \mathcal{Q}$ - групи Шмідта,
 $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \mathcal{C}(\mathcal{P}_1) = \mathcal{C}(\mathcal{P}_2) = \mathcal{C}(\mathcal{P}) \leq \mathcal{Z}(G)$, $p < q$, кожна
підгрупа Шмідта в G містить $\mathcal{C}(\mathcal{P})$;

6/ $G = \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$; $\mathcal{C}(\mathcal{P}) \times \mathcal{Q}$, $G/\mathcal{C}(\mathcal{P})$ - групи Шмідта, $p < q$;

7/ $G = \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$, $\mathcal{Q} = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $b^q = 1$, $|\langle a, b \rangle| \leq q$,
 $\mathcal{P} \times \langle a \rangle$ - група Шмідта, $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}) = \mathcal{C}(\langle a \rangle) \times \langle b \rangle$,
 $\mathcal{C}(\mathcal{P}) \leq \mathcal{Z}(G)$, $p < q$;

8/ $G = (\mathcal{R} \times \mathcal{P}) \times \mathcal{Q}$, $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ - група Шмідта, $p < q$, \mathcal{R} -
неодинарна мінімальна нормальна підгрупа в підгрупі $\mathcal{R} \times \mathcal{Q}$,
при $|\mathcal{Q}| = z$ $z > q$;

9/ $G = (\mathcal{R} \times \mathcal{P}) \times \mathcal{Q}$; $\mathcal{R} \times \mathcal{Q}$, $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ - групи Міллара-
Морена, $z < q$, $p < q$;

10/ $G = \mathcal{P} \times (\mathcal{Q} \times \mathcal{R})$, $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ - група Шмідта, $|\mathcal{R}| = z$,
 $[\mathcal{P}, \mathcal{R}] = \mathcal{P}$, $p < q$ або $p < z$, причому при $p < z$
 $\mathcal{P} \times \mathcal{R}$ - група Шмідта, а $|\mathcal{Q}| = q$;

11/ $G = \mathcal{P} \times (\mathcal{Q} \times \mathcal{R})$, $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ - група Шмідта, $[\mathcal{Q}, \mathcal{R}] = \mathcal{Q}$,
 $|\mathcal{R}| = z$, $q > p > z$, $\mathcal{C}(\mathcal{P}) < \mathcal{C}(\mathcal{P})[\mathcal{P}, \mathcal{R}] < \mathcal{P}$;

12/ $G = \mathcal{P} \times (\mathcal{Q} \times \mathcal{R})$, $\mathcal{Q} \times \mathcal{R}$ - група Шмідта, $q < z - p$;
 \mathcal{P} - мінімальна нормальна підгрупа непростого порядку в G

$$[\mathcal{P}, \mathcal{Q}] \neq 1, [\mathcal{P}, \mathcal{Q}] = \mathcal{P};$$

13/ $G = A(Q \times \langle \mathcal{B} \rangle)$, $A \triangleleft G$, $A \langle \mathcal{B} \rangle = \mathcal{P}$, $\mathcal{P}' \neq 1$, $A \times Q$ група Шмідта, $\mathcal{B}^p \in \mathcal{P}(A)$, $[Q, \mathcal{B}] = Q$, $q > p$.

14/ $G = A(Q \times \langle \mathcal{B} \rangle)$, $A \triangleleft G$, $A/\mathcal{P}(A)$ - нецилічна мінімальна нормальна підгрупа в $G/\mathcal{P}(A)$, $A \langle \mathcal{B} \rangle = \mathcal{P}$, $\mathcal{P}' \neq 1$, $\mathcal{Z}(G) = \langle \mathcal{B}^p \rangle \times C_Q(A)$, $C_Q(A) \leq \mathcal{P}(Q)$, $|\mathcal{P}(Q) : C_Q(A)| \leq q$, $\mathcal{P}(A) \leq \mathcal{P}(\langle \mathcal{B} \rangle)$, $|\mathcal{P}(A)| \leq p$, $[A, Q] = A$; $p > q$;

15/ $G \cong SL(2, 5)$ або $PSL(2, 5)$;

16/ $G \cong SL(2, p)$ або $PSL(2, p)$, $p \geq 13$, $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$, $p^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod{16}$;

17/ $G \cong PSL(2, 2^q)$; $q, 2^q - 1$ - непарні прості числа;

18/ $G \cong PSL(2, 3^q)$; $q, 3^q - 1/2$ - непарні прості числа.

В § 3.4 встановлюється опис класу \mathcal{K}_{24} /теорема 3.4.I/.
 Задача опису скінченних розв'язних груп, в яких всі 2-максимальні підгрупи надрозв'язні, явно сформульована в монографії Л.О.Шеметкова /"Формации конечных групп". - М.: Наука, 1976 р./ як проблема /проблема 26/. В розв'язанні цієї задачі брали участь багато авторів, зокрема Я.Г.Беркович /1964 р./, А.І.Новицький /1974 р./, Де Віво Клорінда /1979 р./, В.М.Семенчук /1979 р.; 1985 р./, В.Т.Нагребський /1983 р./, О.В.Сидоров /1985 р./ та ін. Я.Г.Беркович без доведення навів список скінченних нерозв'язних груп, в яких всі 2-максимальні підгрупи надрозв'язні. В роботах А.І.Новицького і В.М.Семенчука отримані характеристики і таких скінченних розв'язних груп при додаткових умовах /наприклад, $\mathcal{P}(G) = 1$ /. Де Віво Клорінда вивчала властивості скінченних простих груп і властивості силовських

підгруп скінченних розв'язних груп, в яких всі 2-максимальні підгрупи надрозв'язні. Результати В.Т.Нагребелького стосуються таких же нерозв'язних груп з умовою $\Phi(G) = 1$ і подаються без доведень. О.В.Сидоров довів деякі властивості скінченних розв'язних груп, у яких всі 2-максимальні підгрупи належать деякій формалі \mathcal{F} , де \mathcal{F} , зокрема, формалія надрозв'язних груп. Всього в теоремі 3.4.1 отримано 34 типи, серед яких 33 типи ненадрозв'язних груп /групи типу 2/ - мінімальні ненадрозв'язні, групи типів 3/ - 34/ містять власну ненадрозв'язну підгрупу/. Групи типів: 3/ - 7/ - біпримарні дисперсивні, 8/ - 23/ - трипримарні дисперсивні, 24/ - 28/ - чотирипримарні дисперсивні, 29/ - 30/ - біпримарні мінімальні недисперсивні, 31/- 34/ - мінімальні нерозв'язні.

У главі ІУ "Скінченні групи з деякими умовами дисперсивності для підгруп непримарного індексу" дається опис класів \mathcal{K}_{41} , \mathcal{K}_{42} , \mathcal{K}_{43} , \mathcal{K}_{51} , \mathcal{K}_{52} , \mathcal{K}_{53} . В роботах автора /1973 - 1975 р.р./ отримано конструктивний опис S^* -груп /клас \mathcal{K}_{43} /. S^* -групи - це скінченні ненільпотентні групи, в яких всі підгрупи непримарного індексу нільпотентні. Окремі види скінченних ненільпотентних груп, в яких умова нільпотентності накладалась на всі власні підгрупи підгруп непримарного індексу всієї групи, розглядалися П.П.Баришовцем і М.О.Островерхим /1980 р./. В роботах автора, а також С.М.Чернікова і автора /1971 - 1973 р.р./ отримано конструктивний опис M^* -груп - скінченних необелевих непримарних груп, в яких всі підгрупи непримарного індексу абелеві /клас \mathcal{K}_{42} /. C^* -групи - скінченні непримарні нециклічні групи, в яких всі підгрупи непримарного індексу циклічні /клас \mathcal{K}_{41} / вивчені в роботах автора /1971 р./. Для зруч-

ності в теоремах 4.І.І, 4.І.2, 4.І.3 подана повна інформація про S^* -, M^* -, C^* -групи /класи \mathcal{K}_{43} , \mathcal{K}_{42} , \mathcal{K}_{41} відповідно/. Деякі узагальнення відмічених класів груп на мові формацій здійснені О.В.Сидоровим /1985 р./ в §§ 4.І - 4.6 цієї глави встановлено опно S^{**} -, M^{**} -, C^{**} -груп /класи \mathcal{K}_{53} , \mathcal{K}_{52} , \mathcal{K}_{51} /. Скінченна ненільпотентна /відповідно непримарна неабелева, непримарна нециклічна/ група називається S^{**} /відповідно M^{**} -, C^{**} -/ -групою, якщо в ній всі власні підгрупи підгруп непримарного індексу нільпотентні /відповідно абелеві, циклічні/. Відмітимо, що в главі ІV дуже суттєво використовуються результати глави ІІ, особливо при встановленні будови мінімальних недисперсивних S^{**} -, M^{**} -, C^{**} -груп /теорема 4.І.9, 4.І.10, 4.І.11 відповідно/.

Т е о р е м а 4.І.9. Мінімальні недисперсивні S^{**} -групи вичерпуються групами наступних типів:

- 1/ G - мінімальна недисперсивна група порядку $p^a q$,
 p, q - різні прості числа;
- 2/ $G \cong \text{PSL}(2, 5)$;
- 3/ $G \cong \text{SL}(2, 5)$.

Т е о р е м а 4.І.10. Мінімальні недисперсивні M^{**} -групи вичерпуються групами наступних типів:

1/ $G = A \langle \alpha \rangle \lambda \langle \beta \rangle$, $|\alpha| = 3$, $|\beta| = 4$, A - група кватерніонів; $A \lambda \langle \alpha \rangle$, $\langle \alpha \rangle \lambda \langle \beta \rangle$ - групи Шмідта, $A \langle \beta \rangle$ - узагальнена група кватерніонів;

2/ $G = A \lambda \langle \alpha \rangle \lambda \langle \beta \rangle$, $|\alpha| = 3$, $|\beta| = 2$, A - група кватерніонів; $A \lambda \langle \alpha \rangle$, $\langle \alpha \rangle \lambda \langle \beta \rangle$ - групи Шмідта, $A \lambda \langle \beta \rangle$ - квазідієдральна група;

3/ $G = A \lambda \langle \alpha \rangle \lambda \langle \beta \rangle$, $|\alpha| = 3$, $|\beta| = 2^{d_i}$, $d_i \geq 1$,

$|A| = 4$; $A \times \langle a \rangle$, $\langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $A \times \langle b \rangle$ - групи Міллера-Морена;

4/ $G = A \times (\langle a \rangle \times \langle b \rangle)$, $|a| = q$, $|b| = p^{\alpha}$, $\alpha \geq 1$, A - елементарна абелева група порядку p^3 ; $A \times \langle a \rangle$, $\langle a \rangle \times \langle b \rangle$ - групи Міллера-Морена;

5/ $G \cong \text{PSL}(2, 5)$;

6/ $G \cong \text{SL}(2, 5)$.

Т е о р е м а 4.1.II. Мінімальні недисперсивні C^{**} -групи вичерпуються групами наступних типів:

1/ $G = A(\langle a \rangle \times \langle b \rangle)$, $|a| = 3$, $|b| = 4$, A - група кватерніонів;

2/ $G \cong S_4$;

3/ $G \cong \text{PSL}(2, 5)$;

4/ $G \cong \text{SL}(2, 5)$.

Використовуючи ці теореми, в §§ 4.1 - 4.6 встановлюється конструктивний опис біпримарних недисперсивних /теореми 4.4.1 - 4.4.3/, розв'язних небіпримарних недисперсивних /теореми 4.5.1 - 4.5.3/, нерозв'язних /теореми 4.6.1 - 4.6.3/ S^{**} -, M^{**} -, C^{**} -груп /сього отримано 22 типи таких груп/. Виявилось, зокрема, що розв'язних недисперсивних небіпримарних C^{**} -груп взагалі не існує, а небіпримарні розв'язні недисперсивні S^{**} - і M^{**} -групи трипримарні і містять обов'язково біпримарну холловську недисперсивну підгрупу. Конструктивний опис дисперсивних S^{**} -, M^{**} -, C^{**} -груп дано в §§ 4.2 - 4.3 /сього в теоремах 4.2.1 - 4.2.3, 4.3.1 - 4.3.4 отримано III типів таких груп/.

У главі V "Деякі наслідки" досліджуються класи \mathcal{K}_{31} , \mathcal{K}_{32} /теореми 5.3.4 і 5.3.5/, \mathcal{K}_{33} /теореми 5.3.1 - 5.3.3/, а також встановлюються деякі найважливіші наслідки, які

впливають з результатів попередніх глав.

В § 5.1 в усіх допоміжних відомостей і попередніх результатів слід відмітити теорему 5.1.1, яка має певний самостійний інтерес.

Т е о р е м а 5.1.1. Скінченна A -група тоді і тільки тоді надрозв'язна, коли кожна її неединична мінімальна нормальна підгрупа має простий порядок.

В § 5.2 з теорем 2.2.2 - 2.2.6 отримуються наслідки, що дають конструктивний опис наступних трьох класів скінчених мінімальних недисперсивних груп, в яких відповідно: 1/ всі силовські підгрупи абелеві /теорема 5.2.1/; 2/ всі силовські підгрупи дедекіндові /теорема 5.2.2/; 3/ всі фактор-групи за неединичними нормальними підгрупами дисперсивні /так звані критичні недисперсивні групи /теорема 5.2.3/. Відзначимо, що з теореми 5.2.3 випливають основні результати тих робіт Т.Хоужеса /1968 р./ і А.Фаттахі /1973 р./, в яких вивчалися розв'язні і нерозв'язні критичні недисперсивні групи відповідно. При цьому результати Т.Хоужеса значно посилені.

Т е о р е м а 5.2.1. Скінченні мінімальні недисперсивні A -групи вичерпуються групами наступних типів:

1/ $G = \langle x \rangle \rtimes M_i$, $n \geq 2$, $M_i = A_i \times \langle \tau_{i-1} \rangle$ - група Міллера-Морена, $A_i \times \langle \tau_i \rangle$ - силовська p_i -підгрупа з G , p_i, p_j - різні прості числа при $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{Z}_n$;

2/ $G \cong \text{PSL}(2, 2^q)$, q - просте число;

3/ $G \cong \text{PSL}(2, 3^q)$, q - непарне просте число;

4/ $G \cong \text{PSL}(2, p)$, p - просте число, $p \geq 13$, $p^2 - 1 \equiv 0 \pmod{5}$, $p^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod{16}$.

Т е о р е м а 5.2.2. Скінченні мінімальні недисперсивні

групи з дедекіндовими силовськими підгрупами вичерпуються групами наступних типів:

1/ $G = \prod_{i \in \mathbb{Z}_n} S_i$, $n \geq 2$, $S_i = A_i \times \langle \mathcal{B}_i \rangle$ - група Міллера-Морена для всіх $i < n$; а S_n - або група Міллера-Морена, або група Шмідта з підгрупою A_n , ізоморфною групі кватерніонів і $p_{n-1} = 3$, $|\mathcal{B}_n| = 2$, $A_i \times \langle \mathcal{B}_i \rangle$ - силовська p_i -підгрупа групи G , p_i, p_j - різні прості числа при $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{Z}_n$;

2/ $G \cong \text{PSL}(2, 2^q)$, q - просте число;

3/ $G \cong \text{PSL}(2, 3^q)$ або $SL(2, 3^q)$, q - просте непарне число;

4/ $G \cong \text{PSL}(2, 5)$ або $SL(2, 5)$;

5/ $G \cong \text{PSL}(2, p)$ або $SL(2, p)$, p - просте число, $p \geq 13$, $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$, $p^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod{16}$;

Т е о р е м а 5.2.3. Критичні недисперсивні групи вичерпуються групами наступних типів:

1/ $G = A \times (Q \times \langle \mathcal{B} \rangle)$, A - елементарна абелева група порядку p^k , $k \geq 2$, що є мінімальною нормальною підгрупою групи G , $|Q/\Phi(Q)| = q^{\beta}$, $k \geq \beta \geq \delta_p(q)$, $|\mathcal{B}| = p$, $Q \times \langle \mathcal{B} \rangle$ - група Шмідта, $[A, \mathcal{B}] \neq 1$, $C_Q(A) = 1$, $|\Phi(Q)| \leq q$, $A \times \langle \mathcal{B} \rangle$ - силовська p -підгрупа в G ;

2/ $G = \prod_{i \in \mathbb{Z}_n} M_i$, $n \geq 2$, $M_i = A_i \times \langle \mathcal{B}_i \rangle$ - група Міллера-Морена, $|\mathcal{B}_i| = p_i$, $A_i \times \langle \mathcal{B}_i \rangle = P_i$ - силовська p_i -підгрупа в G , p_i, p_j - різні прості числа, $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{Z}_n$;

3/ $G \cong \text{PSL}(2, 2^q)$, q - просте число;

4/ $G \cong \text{PSL}(2, 3^q)$, q - непарне просте число;

5/ $G \cong \text{PSL}(2, p)$, p - просте число, $p \geq 13$, $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$, $p^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod{16}$;

6/ $G \cong S_2(2^q)$, q - непарне просте число

В § 5.3 вивчається будова скінченних груп з умовами нільпотентності, абелевості, циклічності для 3-максимальних підгруп. В теоремах 5.3.1 - 5.3.3 встановлено будову скінченних ненільпотентних груп, в яких всі 3-максимальні підгрупи нільпотентні. В теоремах 5.3.4, 5.3.5 встановлено конструктивний список скінченних нерозв'язних груп, в яких всі 3-максимальні підгрупи відповідно абелеві, циклічні. Відмітимо, що будову примарних регулярних 2-породжених груп, в яких всі 3-максимальні підгрупи абелеві, встановив аспірант автора С.В. Драганчик /1989 - 1992 р.р./.

§ 5.4 присвячений встановленню деяких ознак дисперсивності і недисперсивності скінченних груп. Відмітимо серед них особливу теорему 5.4.3 і 5.4.4.

Т е о р е м а 5.4.3. Скінченна група дисперсивна, якщо в ній всі підгрупи Шмідта надрозв'язні.

Т е о р е м а 5.4.4. Порядок скінченної недисперсивної групи G ділиться або на 24, або на четвертий степінь деякого свого простого дільника, або ж силовська 2-підгрупа з G є елементарною абелевою підгрупою порядку 4 і G містить підгрупу H , ізоморфну групі одного з наступних типів:

1/ $\Phi(H)$ - τ -група, $H/\Phi(H) \cong \text{PSL}(2, 3^q)$, τ -

q - непарні прості числа, $\tau \mid 3^q + 1$;

2/ $\Phi(H)$ - 5-група і $H/\Phi(H) \cong \text{PSL}(2, 5)$;

3/ $\Phi(H) = \Phi_p \times \Phi_\tau$, Φ_p, Φ_τ - силовські p - і τ -підгрупи з $\Phi(H)$ відповідно, $H/\Phi(H) \cong \text{PSL}(2, p)$,

p, τ - різні прості числа, $\tau \mid p + 1$, $p \geq 13$,

$p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$, $p^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod{16}$.

На закінчення відмітимо, що найбільш повно в роботі дано

опис таких класів: K_{10} , K_{11} , K_{14} , K_{15} ,
 K_{17} , K_{21} , K_{24} , K_{25} , K_{26} , K_{44} ,
 K_{42} , K_{43} , K_{51} , K_{52} , K_{53} . Класи K_{31} ,
 K_{32} , K_{33} досліджені лише частково і з різною точністю.
Завершення описання кожного з цих класів може бути окремою
задачею.

ПУБЛІКАЦІЇ АВТОРА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Скінченні нелінійні групи з деякими заданими системами
нелінійних підгруп // Допов. АН УРСР. Сер. А-1974 - № 1.
- С. 35 - 37.
2. Конечные группы с нильпотентными подгруппами непримарного
индекса // Некоторые вопросы теории групп. - Киев: Ин-т
математики АН УССР. - 1975. - С. 197 - 217.
3. Разрешимые недисперсивные группы с некоторыми силовскими
подгруппами, порядки которых делятся не более чем на куб
простого числа // Укр. мат. журн. - 1975, 27, № 3. - С. 329
336 / сп. з Кузеним М.Ф. /.
4. Конечные разрешимые минимальные недисперсивные группы //
Укр. мат. журн. - 27, № 4. - 1975. - С. 526 - 528 / сп. з
Кузеним М.Ф. /.
5. О конечных недисперсивных группах. - Киев, 1978. - 48 с. -
/Препр. /АН УССР. Ин-т математики; 78.7/ /сп. з Кузеним
М.Ф. /.
6. Конечные квазибипримарные группы // XV Всесоюзная алгебра-
ическая конференция, Красноярск, 3-6 июля 1979 г.: Тез.
докл. Часть первая. - Красноярск: Изд-во Красноярский гос-
университет, 1979. - С. 91.
7. Конечные квазибипримарные группы // Группы, определяемые
свойствами системы подгрупп, Киев: Ин-т математики АН УССР.

- 1979. - С. 83 - 97.

8. Конечные недисперсивные группы, в которых любая подгруппа непримарного индекса нильпотентна либо является группой Шмидта // Конструктивное описание групп с заданными свойствами подгрупп. - Киев: Ин-т математики АН УССР. - 1980. - С. 117 - 132 /сп. з Кузением М.Ф./
9. конечные ненильпотентные группы, в которых любая ненильпотентная подгруппа ^п непримарного индекса является группой Шмидта // XVI Всесоюзная алгебраическая конференция, Ленинград, 22 - 25 сентября 1981 г.: Тез. Часть вторая. - Ленинград, 1981. - С. 80 - 81 /сп.з Кузением М.Ф./
10. Конечные бипримарные дисперсивные группы, в которых всякая подгруппа непримарного индекса нильпотентна либо является группой Шмидта // Исследование групп с заданными свойствами подгрупп. - Киев: Ин-т математики АН УССР. - 1981. - С. 93-104 /сп.з Кузением М.Ф./
11. Конечные дисперсивные небипримарные группы, всякая ненильпотентная подгруппа непримарного индекса которых является группой Шмидта // Подгрупповая характеристика групп. - Киев: Ин-т математики АН УССР. - 1982. - С. 74 - 84 /сп. з Кузением М.Ф./.
12. Строение конечных минимальных недисперсивных групп // Группы и системы их подгрупп. - Киев: Ин-т математики АН УССР. - 1983. - С. 56 - 66 /сп. з Кузением М.Ф./.
13. Об одном классе конечных минимальных недисперсивных групп // Строение групп и их подгрупповая характеристика. - Киев: Ин-т математики АН УССР. - 1984. - С. 66 - 73 /сп. з Кузением М.Ф./.
14. Группы с некоторыми системами дисперсивных подгрупп. -

- Киев, 1984. - 60 с. - /Препр. / АН УССР, Ин-т математики: 84.11/.
15. Недисперсивные группы с некоторыми системами дисперсивных подгрупп. - Киев, 1984. - 47 с. - /Препр. /АН УССР, Ин-т математики: 84.35//сп. з Кузеним М.Ф./.
16. Группы условиями дисперсивности для подгрупп. - Киев: КТИ, 1985. - 96 с. / сп. з Кузеним М.Ф./.
17. Конечные группы с условиями дисперсивности по Оре для 2-максимальных подгрупп. - Киев: КТИ, 1986. - 15 с. - Деп. В УкрНИИТИ 16.02.86, № 629 /сп. з Кузеним М.Ф./.
18. Конструктивное описание конечных групп, у которых все 2-максимальные подгруппы сверхразрешимы. - Киев: КТИ, 1986. - 42 с. - Деп. в УкрНИИТИ 17.04.86, № 1086 /сп. з Кузеним М.Ф. /.
19. Конечные группы со сверхразрешимыми 2-максимальными подгруппами //Строение групп и свойства их подгрупп. - Киев: Ин-т математики АН УССР. - 1986. - С. 63 - 73 /сп. з Кузеним М.Ф./.
20. Конструктивное описание конечных несверхразрешимых групп, у которых все 2-максимальные подгруппы метациклические // Исследование групп с ограничениями для подгрупп. - Киев: Ин-т математики АН УССР. - 1986. - С. 42 - 51 /сп. з Семком М.М./
21. Конструктивное описание конечных минимальных неосверхразрешимых групп //Вопросы алгебры. - Минск: Изд-во "Университетское", 1987. - № 3. - С. 66 - 63 /сп. з Кузеним М.Ф./.
22. Конечные группы Шмидта и их обобщения //Укр.мат. журн. - 1991. - 43 , № 7 - 8. - С. 963 - 968 /сп. з Кузеним М.Ф./.
23. Строение конечных минимальных неметациклических групп //

Zborník Pedagogickej Fakulty Prešovskej
University P. J. Šafarika v Košiciach,
Roč. xxiv, Zväzok 1, Prírodné
vedy, matematika. - Košice. - 1990/1992. -

S. 49-98 /сп. з Кузенним М.Ф., Семком М.М., Томанеком Л./

24. Стрoение конечных групп, у которых все 2-максимальные подгруппы сверхразрешимы //там же. - С. 125 - 160 /сп. з Кузенним М.Ф., Томанеком Л./.
25. Конструктивное описание конечных недисперсивных групп, в которых все подгруппы непримарного индекса абелевы // Укр. мат. журн. - 1992. - 44, № 6. - С. 818 - 822 /сп. з Черниковим С.М./.

Підп. до друку 14.12.93. Формат 60x84/16. Папір друк. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 1,86. Ум. фарбо-відб. 1,86. Обл.-вид. арк. 1,6
Тираж 100 пр. Зам. 453 Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики АН України
252601 Київ 4, ГСП, вул. Терещенківська, 3

464533

AB28913

AB 28.913