КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ім. Тараса Шевченка

на правах рукопису

ПРИШЛЯК ОЛЕКСАНДР ОЛЕГОВИЧ

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА ФУНКЦІЇ МОРСА НА МНОГОВИДАХ І ПАРАХ МНОГОВИДІВ

01.01.02 - диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття вченого ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ - 1993

Роботу виконано на кафедрі геометрії механіко-математичного фекультету Київського університету ім. Тараса Шевченка

Науковий керівник - доктор фізико - математичних наук, професор В.В.Шарко

Офіційні опоненти - доктор фізико - математичних наук, професор Г.І.Пелюх
кандидат фізико-математичних наук, доцент І.О.Парасюк

Провідна установа - Інститут сучасних проблем математики та механіки ім. Я.С.Підстригача АН України

Захист відбудеться "___"____________ 1993 року о ___ год. на засіданні спеціалізованної ради К 068.18.11 у Київському університеті ім. Тараса Шевченко за адресою 252127, м.Київ, просп. Академіка Глушкова, 6, механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Київського університету ім. Тараса Шевченка (вул. Володимирська, 58)

Автореферат розіслано "___" ____________ 1993 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради В.Н.Сушанский

АВ-28.959

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. В дисертаційній роботі розглядаються функції Морса та диференціальні рівняння (векторні поля) на многовидах з ізольованими особливими точками. В 1885 р. Пуанкаре довів, що сума індексів особливих точок такого векторного поля на двовимірному многовиді дорівнює эйлеровій характеристиці цього многовиду. n-мірний варіант цієї теореми (теорема Пуанкаре-Хопфа) був повністю доведений Хопфом у 1926 р., слідом за частковими результатами Брауера та Адамара. Теорема вірна і для многовидів з краєм, якщо векторне поле в кожній точці краю направлено зовні. Було також встановлено існування векторного поля без особливих точок, якщо ейлерова характеристика многовиду дорівнює 0.

З 1925 р. Морсом почалися інтенсивні роботи в області вивчення многовидів за допомогою критичних точок та ліній рівня функцій. Був встановлений зв'язок між критичними точками власної гладкої функції на гладкому многовиді і його гомологіями.

Введений Смейлом розклад на ручки, по одній ручці на кожну критичу точку функції f, дозволив йому в 1960 р. довести існування на гладкому однозв'язному многовиді M^n вимірності $n \geq 6$ точної функції Морса. Як наслідок, були одержані: узагальнена гіпотеза Пуанкаре та теорема про h - кобордизм.

Відсутність прийому Уітні в вимірностях менших 5 обумовлює труднощі пов'язані зі спробами побудови точного розкладу на ручки многовиду вимірності не більше 5. Проте Фрідман, використовуючи конструкцію Кассона, виконав прийом Уітні для чотиривимірних топологічних многовидів та довів теорему про h-кобордизм у вимірності 5 та гіпотезу Пуанкаре в вимірності 4 .

В.В.Шарко показав що, якщо $n \geq 6$, то на однозв'язному многовиді W^n з неоднозв'язними краями існує єдиний мінімальний розклад на ручки.

Таким чином, становить інтерес 1) побудова диференціальних рівнянь, які мають задані набори індексів, що задовольняють умовам теореми Пуанкаре - Хопфа, тобто доведення теореми, оберненої до теореми Пуанкаре - Хопфа, 2) побудова точної функції Морса на парі многовидів , 3) побудова мінімального топологічного розкладу на ручки п'ятивимірного однозв'язного многовиду з неоднозв'язними краями.

Мета роботи. Головна мета дисертації полягає в розробці методів побудови векторних полів з заданими наборами індексів ізольованих особливих точок і мінімальних функцій Морса на п'ятивимірних многовидах і парах многовидів.

Методика досліджень грунтується на загальних методах топологічної теорії диференціальних рівнянь, гомотопічної топології і теорії Морса. Крім того, використовуються методи роботи з простими і вкладеними ручками.

Наукова новизна. В роботі побудовані векторні поля, які мають задані набори індексів, які задовольняють умовам теореми Пуанкаре - Хопфа, на 1) замкнених многовидах, 2) парах многовидів, 3) многовидах з краєм, а також у випадку градієнтних векторних полів.

Побудована точна функція Морса на парі многовидів (M^n, N^k) при $k \geq 6$, $n - k \geq 3$, $\pi_1(M^n) = \pi_1(M^n) = 0$

Побудовано мінімальний топологічний розклад на ручки п'ятивимірного однозв'язного многовиду з неоднозв'язними краями.

Апробація роботи. Результати дисертації доповідалися автором на семінарах з геометрії при Київському університеті ім. Тараса Шевченка (керівник проф. В.В.Кириченко), на семінарах з топології при інституті математики АН України (керівник проф. В.В.Шарко), на IX міжнародній топологічній конференції (Київ, 1992), на конференції " Нелінійні проблеми диференціальних рівнянь і задач математичної фізики - Другі Боголюбовські читання " (Київ, 1993).

Публікації. Основний зміст дисертації опубліковано в роботах автора [1 - 3].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, чотирьох глав, розбитих на 18 параграфів і списка літератури, який налічує 52 найменування. Об'єм роботи - 86 сторінок машинописного тексту.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтовується актуальність теми дисертації, дано огляд найбільш близьких до цієї теми результатів, коротко викладено зміст дисертації, а також перераховані основні результати, які виносяться на захист.

Перша глава - довідкова. В ній наводяться означення понять, що використовуються, а також необхідні факти з літератури, які зформульовані без доведення. Окремо підкреслюється рівносильність задання диференціального рівняння та векторного поля на гладкому многовиді, а також взаємно однозначна відповідність для даного многовиду (кобордізму) функцій Морса та розкладів на ручки.

У другій главі розглядаються звичайні диференціальні рівняння (векторні поля) з ізольованими особливими точками. В п. 2.1, для замкнених многовидів, доведена основна для цієї глави

ТЕОРЕМА 2.1. Нехай M^n - гладкий зв'язний многовид ($n \geq 2$), $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ ($k \geq 1$) - набір цілих чисел такий, що

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = \chi(M^n)$$

де $\chi(M^n)$- ейлерова характеристика многовиду M^n. Тоді на многовиді M^n існує векторне поле $\vec{v}$, особливі точки якого ізольовані та мають індекси $\alpha_1,\dots,\alpha_k$.

Для доведення введено дві операції з векторними полями: 1) введення пар особливих точок та 2) додавання особливих точок, які в подальшому використовуються при доведенні інших теорем в цій главі.

В п. 2.2 вводиться поняття індукованого векторного поля на підмноговидах.

ОЗНАЧЕННЯ 2.2. Нехай M^n - гладкий многовид, N^k - його підмноговид, ρ - ріманова метрика, а $\vec{v}$ - векторне поле на многовиді M^n. Казатимемо, що векторне поле $\vec{u}$ на підмноговиді N^k індуковане векторним полем $\vec{v}$ в рімановій метриці ρ, якщо для довільної точки $x \in N^k$ вектор $\vec{u}(x) \in T_x N^k$ є ортогональною в метриці ρ проекцією вектора $\vec{v}(x) \in T_x M^n$ на підпростір $T_x N^k$.

ТЕОРЕМА 2.3. Нехай N^k - підмноговид гладкого многовиду M^n, ρ - метрика на многовиді M^n і $\alpha_1,\dots,\alpha_p$ ($p \geq 1$) $\beta_1,\dots,\beta_s$ ($s \geq 1$) - набори цілих чисел такі, що

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = \chi(M^n), \quad \sum_{i=1}^{s} \beta_i = \chi(N^k),$$

де $\chi(M^n)$ і $\chi(N^k)$ - ейлерові характеристики многовидів M^n і N^k, відповідно. Тоді, якщо $n - k \geq 2$, то на многовиді M^n існує векторне поле $\vec{v}$ з особливими точками, які мають індекси $\alpha_1,\dots,\alpha_p$ таке, що векторне поле $\vec{u}$ на підмноговиді N^k, яке індуковане векторним полем $\vec{v}$ в метриці ρ, має особливі точки з індексами $\beta_1,\dots,\beta_s$.

ТЕОРЕМА 2.4. Нехай N^k - підмноговид гладкого многовиду M^n, $n - k \geq 1$, $\alpha_1,\dots,\alpha_p$ і $\beta_1,\dots,\beta_s$ - набори цілих чисел такі, що

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = \chi(M^n), \quad \sum_{i=1}^{s} \beta_i = \chi(N^k), \quad 1 \le s \le p.$$

Тоді на многовиді M^n існує векторне поле $\vec{v}$ з особливими точками, які мають індекси $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, яке дотикається підмноговиду N^k і таке, що векторне поле, індуковане векторним полем $\vec{v}$ на підмноговиді N^k, має особливі точки з індексами $\beta_1, \dots, \beta_s$.

В п. 2.3 розглядаються диференціальні рівняння на многовидах з краєм.

Т В Е Р Д Ж Е Н Н Я 7. Нехай M - гладкий многовид з краєм N, $\chi(N) = 0$. На многовиді M існує векторне поле, дотичне до многовиду N, всі особливі точки якого внутрішні і мають індекси $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, тоді та тільки тоді, коли

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j = \chi(M),$$

де $\chi(M)$ - ейлерова характеристика многовиду M з краєм N.

Т Е О Р Е М А 2.8. Нехай M^n - гладкий многовид з краєм N, $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, $\beta_1, \dots, \beta_k$, $\beta_{k+1}, \dots, \beta_p$ - набори цілих чисел. Тоді та тільки тоді існує векторне поле $\vec{v}$ з внутрішніми особливими точками з індексами $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ та з індукованим векторним полем $\vec{u}$ на многовиді N таке, що в особливих точках поля $\vec{u}$ з індексами $\beta_1, \dots, \beta_k$ поле $\vec{v}$ направлено всередину многовиду M^n, а в особливих точках поля $\vec{u}$ з індексами $\beta_{k+1}, \dots, \beta_p$ - зовні многовиду M^n, коли

$$\sum_{i=1}^{p} \beta_i = \chi(N),$$

$$\chi(M^n) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i - \sum_{i=1}^{k} \beta_i \text{ , при парному } n,$$

$$\chi(M^n) = -\sum_{i=1}^{s} \alpha_i + \sum_{i=k+1}^{p} \beta_i \text{ , при непарному } n.$$

В п. 2.4 вивчаються векторні поля градієнтів. В термінах графів векторних полів доводиться критерій того, що дане векторне поле є полем градієнта.

О З Н А Ч Е Н Н Я 2.9. Нехай $\vec{v}$ - векторне поле на многовиді M^n, яке має тільки ізольовані особливі точки. Графом $G(\vec{v})$

векторного поля $\vec{v}$ називається орієнтований граф, вершини якого α_i знаходяться у взаємно однозначній відповідності з особливими точками x_i векторного поля $\vec{v}$, та дві вершини з'єднані дугою, якщо існує інтегральна траєкторія, яка починається та закінчується у відповідних особливих точках векторного поля.

О З Н А Ч Е Н Н Я 2.10. Контуром в графі G називається така послідовність $S = (\alpha_0, \gamma_1, \alpha_1, \gamma_2, \dots, \alpha_{n-1}, \gamma_n, \alpha_n)$, його чергуючихся вершин α_i та дуг γ_i така, що α_{i-1} - початок, а α_i - кінець дуги γ_i $(i=\overline{1,n})$ та $\alpha_0=\alpha_n$.

Т Е О Р Е М А 2.11. Нехай $\vec{v}$ - гладке векторне поле на гладкому многовиді M^n, яке задовольняє наступним вимогам:

1) всі особливі точки ізольовані, та для кожної особливої точки x_i існує окіл U_i та гладка функція f_i, яка означена в околі U_i, така що $\vec{v}$ є поле градієнта функції f_i в деякій метриці ρ_i в околі U_i;

2) граф $g(\vec{v})$ векторного поля $\vec{v}$ не містить контурів.

Тоді існує ріманова метрика ρ на многовиді M^n і функція $f: M^n \to \mathbb{R}^1$ така, що $\mathrm{grad}(f) = \vec{v}$.

О З Н А Ч Е Н Н Я 2.12. Гладка функція $f: M^n \to \mathbb{R}^1$ називається мінімальною, якщо у будь-якої іншої гладкої функції $g: M^n \to \mathbb{R}^1$ число всіх критичних точок не менше ніж у функції f. Позначимо це число через $q(M^n)$.

О З Н А Ч Е Н Н Я 2.13. Набір цілих чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ називається припустимим для многовиду M^n, якщо $\alpha_1 = 1$, $\alpha_k = (-1)^n$ та $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \chi(M^n)$.

О З Н А Ч Е Н Н Я 2.14. Набір цілих чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ називається реалізованим гладкою функцією f, якщо поле градієнта функції f в деякій метриці ρ має k ізольованих особливих точок і їх індекси рівні $\alpha_1, \dots, \alpha_k$.

Т Е О Р Е М А 2.15. Нехай M^n - гладкий многовид, $n \ge 4$. Тоді для допустимого набору $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ існує гладка функція f, яка його реалізує тоді та тільки тоді, коли $k \ge q(M^n)$.

Градієнтні поля на двовимірних многовидах розглядаються в п. 2.5. Теорема 2.16 показує, що вимірність 2 накладає обмеження на індекс особливої точки такого поля.

Т Е О Р Е М А 2.16. Нехай y_0 - особлива точка векторного поля $\vec{v}$ градієнта функції f на двовимірному многовиді M^2. Тоді її індекс не більший одиниці.

Доведення теореми спирається на лему 2.18.

Будемо казати, що функція $\alpha(t)$, зростаючи (спадаючи), проходить в точці t_0 через рівень α_0, якщо $\alpha(t_0) = \alpha_0$ та існує окіл $V = (t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_2)$ точки t_0 ($\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$) такий, що функція α монотонно неспадає (незростає) на інтервалі V і

$$\alpha(t_0 - \varepsilon_1) < \alpha_0 < \alpha(t_0 + \varepsilon_2) \quad (\alpha(t_0 - \varepsilon_1) > \alpha_0 > \alpha(t_0 + \varepsilon_2)).$$

Л Е М А 2.18. Якщо траєкторія $\gamma(s)$ векторного поля $\vec{v}$ проходить через точку x_{t_0} на колі S таку, що в точці t_0 функція $\alpha(t)$, зростаючи, проходит через рівень πn ($n \in \mathbb{Z}$), то локально в околі точки x_{t_0} ця траєкторія лежить в крузі B^2.

В главі 3 розглядаються функції Морса на парі многовидів. В п 3.1 вводиться поняття функції Морса на парі многовидів та показано існування таких функцій на кожній парі многовидів. Наслідуючи роботи Рурка і Кіртона та Лікоріша, дається означення вкладення з критичними рівнями, яке може розглядатися як PL-аналог функцій Морса на парі многовидів.

О З Н А Ч Е Н Н Я 3.1. Нехай N^k - підмноговид гладкого многовиду M^n. Функція $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ називається функцією Морса на парі многовидів (M^n, N^k), якщо f - функція Морса на многовиді M^n і обмеження функції f на підмноговид N^k є функція Морса на N^k.

Л Е М А 3.2. Нехай N^k - підмноговид гладкого многовиду M^n. Якщо f - функція Морса на многовиді M^n, то існує достатньо близька до функції f функція Морса f_1 з тим же числом критичних точок кожного індексу λ на многовиді M^n, обмеження якої на підмноговид N^k є функцією Морса.

О З Н А Ч Е Н Н Я 3.4. Нехай задано розклад многовиду M^n на ручки з комірами. Будемо казати, що многовид N^k вкладено з критичними рівнями в многовид M^n, якщо многовид N^k вкладено в об'єднання комірів $\bigcup\limits_{i=1}^{l} \partial M_i \times [t_i, t_{i+1}]$ многовиду M^n і на кожному комірі відповідне вкладення частини многовиду N^k в цей комір є вкладення з критичними рівнями.

В п 3.2 вводяться поняття правильної функції Морса на парі многовидів і правильного вкладення з критичними рівнями. Показано, що такі функції і вкладення можуть бути отримані з довільної функції Морса на парі многовидів або вкладення з критичними рівнями за допомогою процесів перегрупування внутрішніх ручок, а також перегрупування внутрішніх ручок разом з ручками на многовиді.

ЛЕМА 3.5 (перегрупування ручок). Якщо індекс вкладеної ручки h_j менший ніж індекс ручки H_i та між рівнями t_i та t_j ручок H_i і h_j нема інших критичних рівнів ні на многовиді M^n, ні на многовиді N^k, то вкладена ручка h_j за допомогою ізотопії многовиду N^k в многовиді M^n може бути спущена нижче ручки H_i.

ЛЕМА 3.6 (перегрупування внутрішніх ручок). Нехай H і H' - послідовно приклеєні ручки на многовиді M, y та y' - відповідні критичні значення, h^i та h^j - вкладені ручки на підмноговиді N, y^i та y^j - їх критичні значення такі, що

$$y < y^i < y^j < y',$$

та між ручками h^i та h^j нема інших ручок. Тоді, якщо індекс j ручки h^j не більше індексу i ручки h^i та $n - k \geq 2$, то за допомогою ізотопії ручка h^j може бути спущена нижче ручки h^i.

ОЗНАЧЕННЯ 3.7. Вкладення з критичними рівнями многовиду N в многовид $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ називається правильним, якщо для будь-яких двох вкладених ручок h^i та h^j з того, що індекс $i < j$, випливає, що рівень y^i ручки h^i нижче рівня y^j ручки h^j ($y^i < y^j$), та всі вкладені ручки індексу i лежать в комірі між ручками індексів i та $i+1$ на многовиді M. При цьому многовид M припускається правильно вкладеним з критичними рівнями в евклідів простір $\mathbb{R}^{m+1}$.

ТВЕРДЖЕННЯ 3.8. Нехай N^k - підмноговид многовиду M^n, $k < n$. Тоді існує вкладення з критичними рівнями многовиду M^n в евклідів простір $\mathbb{R}^{m+1}$ і правильне вкладення з критичними рівнями підмноговиду N^k в многовид M^n, ізотопне даному вкладенню.

ОЗНАЧЕННЯ 3.9. Функція $f: M^n \to \mathbb{R}^1$ називається правильною функцією Морса на парі многовидів (M^n, N^k), якщо f є функцією Морса на парі многовидів (M^n, N^k), правильна як функція Морса на кожному із многовидів M^n і N^k та для кожного i критичні точки індексу i на многовиді N^k лежать між критичними точками індексів i та $i + 1$ на многовиді M^n.

ТВЕРДЖЕННЯ 3.10. Нехай N^k підмноговид многовиду M^n ковимірності $n - k \geq 1$. Тоді існує ізотопія підмноговиду N^k до підмноговиду N' така, що на парі многовидів (M^n, N') існує правильна функція Морса.

В п 3.3 описуються процеси додавання та скорочення внутрішніх ручок. Додавання внутрішніх ручок може бути здійснено без будь -

яких вимірносних обмежень. При скороченні алгебраїчно доповняльних ручок до звичайних обмежень на індекс ручки i вимірність многовиду додається обмеження на ковимірність, яка повинна бути не менша 3. Окремо розглядається скорочення вкладених 0- та 1-ручок, а також заміна 1-ручок на 3-ручки. В обох випадках ковимірність також повинна бути не менша 3.

Л Е М А 3.11 (Додавання ручок). "Ковзання" однієї вкладеної ручки індексу i по іншій вкладеній ручці індексу i може бути здійснено за допомогою ізотопії.

Л Е М А 3.13 (Скорочення ручок). Нехай в розкладі підмноговиду N^k на ручки при вкладенні з критичними рівнями ручки h^i та h^{i+1} є геометрично доповняльними, або, при умові $k - i \geq 4$ або $i \geq 2$ і $k \geq 6$, алгебраїчно доповняльними, то існує таке вкладення з критичними рівнями підмноговиду N^k в многовид M^n, у якого число ручок індексів i та $i + 1$ на 1 менше, а інших індексів таке ж, як у початкового розкладу на ручки.

З А У В А Ж Е Н Н Я 3.14. При $n - k \geq 3$ вимогу того, що проекції вутрішностей середніх та косередніх дисків не перетинаються, можна в умові леми 3.13 опустити.

Т В Е Р Д Ж Е Н Н Я 3.15 (Скорочення вкладених ручок індексів 0 та 1). Нехай M^n - однозв'язний многовид вимірності $n \geq 6$, який має мінімальний розклад на ручки з комірами, тобто в цьому розкладі на ручки маємо по одній ручці індексів 0 та n, відсутні ручки індексів 1 та $n - 1$, а число ручок індексу k дорівнює

$$N_k = \mu(H_k(M^n, \mathbb{Z})) + \mu(\mathrm{Tors}\, H_{k-1}(M^n, \mathbb{Z})),$$

де $\mu(H)$ - мінімальне число твірних групи H, $2 \leq k \leq n - 2$. Тоді, якщо N^k - зв'язний підмноговид ковимірності $n - k \geq 3$, вкладений з критичними рівнями в многовид M^n, то всі, крім однієї, вкладені ручки індексу 0 можуть бути скорочені з вкладеними ручками індексу 1.

З А У В А Ж Е Н Н Я 3.16. Твердження 3.15 вірне при $n - k = 2$ тоді та тільки тоді, коли $\pi_1(M^n \setminus N^k) = \mathbb{Z}$.

Т В Е Р Д Ж Е Н Н Я 3.17. Нехай N^k - замкнений однозв'язний многовид, правильно вкладений з критичними рівнями в замкнений однозв'язний многовид M^n тільки з однією вутрішньою 0-ручкой, $k \geq 6$, $n - k \geq 3$. Тоді кожна вкладена ручка індексу 1 може бути замінена вкладеною ручкою індексу 3.

В п 3.4 , спираючись на результати пп. 3.1-3.3, доведена основна для цієї глави

ТЕОРЕМА 3.19. Нехай однозв'язний многовид N^k вкладено з критичними рівнями в однозв'язний многовид M^n, і вимірність многовиду N^k - $k \geq 6$, а ковимірність - $n-k \geq 3$. Тоді існує ізотопне вкладеня з критичними рівнями многовиду N^k в многовид M^n, яке буде мінімальним. При цьому число ручок індексу i на многовиді M^n

$$m_i = \mu(H_i(M^n)) + \mu(\operatorname{Tors} H_{i-1}(M^n)),$$

а на многовиді N^k

$$n_i = \mu(H_i(N^k)) + \mu(\operatorname{Tors} H_{i-1}(N^k)),$$

де $\mu(H)$ - мінімальне число твірних групи H.

В гладкій категорії є вірним анолог цієї теореми -

ТЕОРЕМА 3.21. Нехай гладкий однозв'язний многовид N^k вкладено в гладкий однозв'язний многовид M^n, та вимірність многовиду N^k - $k \geq 6$, а ковимірність $n - k \geq 3$. Тоді на парі многовидів (M^n, N^k) існує мінімальна функція Морса. При цьому число критичних точок індексу i на многовиді M^n

$$m_i = \mu(H_i(M^n)) + \mu(\operatorname{Tors} H_{i-1}(M^n)),$$

а на многовиді N^k

$$n_i = \mu(H_i(N^k)) + \mu(\operatorname{Tors} H_{i-1}(N^k)),$$

де $\mu(H)$ - мінімальне число твірних групи H.

Глава 4 присвячена побудові мінімальних розкладів на ручки гладких однозв'язних п'ятивимірних многовидів.

Під схрещеним модулем будемо розуміти трійку (C, G, d), де C та G - групи такі, що G діє на C зліва, d: C $\rightarrow$ G - гомоморфізм такий, що

$$c_1 + c_2 - c_1 = d(c_1)c_2,$$

$$d(gc) = g(d(c))g^{-1}.$$

В п.4.1 доведена

ЛЕМА 4.2. Нехай W - однозв'язний компактний п'ятивимірний многовид з краєм $\partial W = V_0 \cup V_1$, де V_i, $i=0,1$, - зв'язні компоненти краю. Тоді існує мінімальна система твірних $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ групи $\pi_2(W,V_1)$, що розглядається як схрещений $\pi_1(V_1)$ - модуль, така, що під дією гомоморфізма Гуревича $\pi_2(W,V_1) \rightarrow H_2(W,V_1)$ твірні $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ($s \leq k$) перейдуть в мінімальну систему твірних групи $H_2(W, V_1)$, а твірні $\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_k$ будуть лежати в ядрі цього гомоморфізма.

Спираючись на цю лему, в п 4.2 доведена

ТЕОРЕМА 4.3. Нехай W - гладкий однозв'язний компактний п'ятивимірний многовид з краєм $\partial W = V_0 \cup V_1$. Через V_0 позначимо ту компоненту краю, для якої,

$$\mu(\pi_2(W,V_0)) - \mu(H_2(W,V_0)) \geq \mu(\pi_2(W,V_1)) - \mu(H_2(W,V_1)).$$

Тоді на W існує єдиний мінімальний топологічний розклад на ручки без ручок індексів 0,1,4 і 5, з

$$\mu(\pi_2(W,V_0))$$

ручками індексу 2 і з

$$\mu(\pi_2(W,V_0)) - \mu(H_2(W,V_0)) + \mu(H_2(W,V_1))$$

ручками індексу 3, де $\mu(H)$ - мінімальне число твірних групи H. $\pi_2(W, V_i)$, $i = 1, 2$, розглядаємо як схрещений $\pi_1(V_i)$ - модуль.

Як наслідок, отримуємо, що на будь-якому гладкому однозв'язному компактному п'ятивимірному многовиді W зі зв'язним краєм $\partial W = V_0$ існує єдиний мінімальний топологічний розклад на ручки без ручок індексів 0, 1, 4 та 5 і з $\mu(\pi_2(W,V_0))$ ручками індексу 2 і з $\mu(\pi_2(W,V_0)) - \mu(H_2(W,V_0)) + \mu(H_2(W,V_1))$ ручками индексу 3. Якщо W - компактний стягуваний п'ятивимірний многовид з краєм, то на W існує мінімальний топологічний розклад на ручки з однією ручкою індексу 5, без ручок індексів 0, 1 і 4 та по $\mu(\pi_2(W,\partial W))$ ручок індексу 2 та 3.

В п 4.3. вивчається вкладення однозв'язного многовиду з неоднозв'язними краями. Використовуючи ідеї глави 3 та п. 4.2, для таких многовидів, доведена

ТЕОРЕМА 4.6. Нехай однозв'язний многовид N^k з краєм $\partial N^k = V_0 \cup V_1$ вкладено з критичними рівнями в однозв'язний многовид M^n з краєм $\partial M^n = W_0 \cup W_1$, компоненти W_0 і W_1 якого однозв'язні і вимірність многовиду N^k k≥6, а ковимірність n-k≥3. Тоді існує ізотопне вкладення з критичними рівнями многовиду N^k в многовид M^n, яке є мінімальним. При цьому число ручок індексу i на многовиді M^n дорівнює

$$m_i = \mu(H_i(M^n,W_0,\mathbb{Z})) + \mu(\operatorname{Tors} H_{i-1}(M^n,W_0,\mathbb{Z})),$$

а на многовиді N^k число ручок індексу 2 дорівнює

$$n_2 = \mu(\pi_2(N^k,V_0)),$$

індексу 3 -

$$n_3 = \mu(\pi_2(N^k,V_0)) + \mu(H_3(N^k,V_0,\mathbb{Z})) + \mu(H_2(N^k,V_0,\mathbb{Q})),$$

індексу $4 \le i \le k-4$ -

$$n_i = \mu(\, H_i(N^k, V_0, \mathbb{Z})) + \mu(\, \mathrm{Tors}\, H_{i-1}(N^k, V_0, \mathbb{Z})),$$

індексу k-3 -

$$n_{k-3} = \mu(\, \pi_2(\, N^k, V_1)) + \mu(\, H_{k-3}(\, N^k, V_0, \mathbb{Q})) +$$
$$+ \mu(\, \mathrm{Tors}\, H_{k-4}(N^k, V_0, \mathbb{Z})) - \mu(\, H_{k-2}(N^k, V_0, \mathbb{Z})),$$

індексу k-2 -

$$n_{k-2} = \mu(\, \pi_2(N^k, V_1)),$$

де $\mu(H)$ - мінімальне число твірних групи H. На многовиді M^n нема ручок індексів 0,1,n-1 і n, а на многовиді N^k нема ручок індексів 0,1,k-1 і k.

ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ДИСЕРТАЦІЇ ОПУБЛІКОВАНІ В НАСТУПНИХ РОБОТАХ :

1. Пришляк А.О. Дифференциальные уравнения на многообразиях и парах многообразий. - Киев. - 1993. - 24 с. (Препр. / АН Украины. Ин-т математики; 93.27)
2. Пришляк А.О. Минимальные функции Морса на паре многообразий // Укр.мат.журн., 1993, т.45, N 1, с 143-144.
3. Prishlyak A. O. Minimal handlebody of pair of smooth manifolds // IX International conference on topology and its application, Kiev,- 1992.- P.114.

Підп. до друку 28.10.93 Формат 60·80 16. Папір друк. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 1,16. Ум. фарбо-відб. 1,16. Обл.-вид.арк. 0,85.
Тираж 100 пр. Зам. 200.

[illegible]