

Академія Наук України
Інститут математики

на правах рукопису

МОРОКА Валентина Анатоліївна
ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ СУМ НЕЗАЛЕЖНИХ ВІПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

01. 01. 05 – теорія ймовірностей і математична статистика

Автореферат
дисертації на здобуття вченого ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ - 1993

ДБ 28 941

ЛНБ України ім. В. Стефаника



00814104 (1)

Робота виконана у відділі теорії випадкових процесів
Інституту математики АН України

Науковий керівник	кандидат фізико-математичних наук ВІННІЩЕН Я.Ф.
Офіційні опоненти	доктор фізико-математичних наук ТУРБІН А.Ф. кандидат фізико-математичних наук ПРАЦІВІТИЙ М.В.
Провідна установа	Київський політехнічний інститут

Захист дисертації відбудеться "___" _____ 199__ р.
о ___ годині на засіданні спеціалізованої ради Д 016.50.01
при Інституті математики АН України за адресою:
256 601, Київ, ІСН, вул. Тарашевська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці інституту.

Автореферат розісланий "___" _____ 1993 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради *Гуцак* ГУСАК Д.В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Апарат функцій розподілу є одним із потужніших інструментів теорії ймовірностей, який має глибоке історичне коріння. При вивченні вигляду функцій розподілу часто доводиться користуватись методами теорії функцій та функціонального аналізу, наприклад, відомою теоремою Лебега про розклад функцій обмеженої варіації / саме для функцій розподілу вона переформульована, наприклад, Лоевом /1955 р.//.

Добре відома також теорема Джессена – Вінгнера про чистоту функції розподілу нескінченної згортки дискретних розподілів. Ця теорема виявилась дуже зручним інструментом при дослідженні нескінченно роздільних розподілів та взагалі в арифметиці функцій розподілу. Неодноразово звертався до неї В.М. Золотер'єв, який запропонував декілька варіантів її аналогів для сингулярних розподілів /1975-1979 р.р./.

Приклади, які демонструють той факт, що згортка скінченного числа сингулярних розподілів може мати ненульові і сингулярну, і абсолютно неперервну складові, зустрічається у багатьох монографіях / наприклад, у В. Феллера, 1966р./ При цьому питання про нескінченні згортки вже виявляється набагато складнішим. Деякі методи досліджень у цьому напрямку містяться в роботах Лукача / 1979 р., метод характеристичних функцій / та Райха / 1981 р. / . Але навіть у самих конкретних випадках, наприклад, коли розглядається випадковий степеневий ряд з однаково розподіленими бернулліївськими коефіцієнтами, питання про вид функції розподілу суми ряду остаточно не розв'язане.

Цікавість до таких об'єктів, як сингулярні розподіли, фрактальні криві та ін. значно зросла за останній час. Але перша монографія російською мовою, яка містить пілісне викладення матеріалів в цій області, була опублікована лише у 1992 р. А. Ф. Турбіном та М. В. Прапевитим і, безперечно, відкриває нові шляхи у дослідженні тих об'єктів, яким присвячена і дана дисертація.

Мета роботи. 1. Вивчення виду функції розподілу випадкових

степеневих рядів.

2. Знаходження умов абсолютної неперервності функції розподілу випадкових рядів.

3. Зведення задачі вивчення виду функції розподілу випадкового ряду до вивчення добутоків випадкових матриць.

Методика досліджень. В роботі використовуються результати з теорії сумування випадкових величин, теорії функцій та функціонального аналізу, методи теорії характеристичних функцій та матричні методи.

Наукова новизна. В дисертації доведена неможливість побудови природного аналога теореми Джессена - Вінгнера для нескінченної згортки сингулярних розподілів. Показано, що аналогічне пій теоремі твердження має місце для випадкових степеневих рядів, незалежно від виду функції розподілу доданків ряду. Детально вивчено вигляд функції розподілу випадкового степеневого ряду при малих значеннях параметра. Знайдено деякі умови абсолютної неперервності функції розподілу випадкових збіжних рядів / в т. ч. випадкових степеневих рядів / і показано, як у деяких випадках задачу вивчення виду функції розподілу випадкового степеневого ряду можна звести до вивчення добутоків відповідних випадкових матриць.

Практичне і теоретичне значення. Результати дисертації дозволяють у деяких випадках визначити вид функції розподілу суми випадкового ряду за виглядом функції розподілу доданків або в залежності від параметра, а також розв'язувати цю задачу матричними методами.

Ці результати можуть бути застосовані в теорії сумування незалежних випадкових величин, при вивченні випадкових степеневих рядів та згорток сингулярних розподілів.

Апробація роботи. Результати роботи доповідались на:

- Міжнародній конференції по випадкових еволюціях /Київелі, 1992 р./;
- Другій Українсько - Угорській конференції по наукових напрямках в теорії ймовірностей та математичній статистиці /Чукачів, 1992 р./;
- семінарах інституту математики АН України /1991-1993 р.р./.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в роботах [1 - 6].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається із вступу і чотирьох глав, розбитих на 9 параграфів. Вона займає 75 сторінок машинописного тексту. Бібліографія містить 67 назв.

Автор виражає вдячність своєму науковому керівнику Віннішину Я.Ф. за постійну увагу до цієї роботи та невичерпне терпіння, а також проф. Дороговцеву А.А. за критичні зауваження.

КОРОТКИЙ ЗМІСТ РОБОТИ.

У вступі обґрунтована актуальність теми дисертації, дано огляд найбільш близьких до цієї теми результатів, коротко викладено зміст дисертації, а також перераховано основні результати, що виносяться на захист.

У першій главі "Аналог теореми Дхессена - Вінтнера для випадкових степеневих рядів" розглядається можливість доведення аналогічних цієї теоремі тверджень для сингулярних розподілів, для випадкових рядів, яким притаманна деяка додаткова алгебраїчна структура та задача з'ясування вигляду функції розподілу суми ряду за виглядом функції розподілу коефіцієнтів.

В § 1 наводяться два гіпотетичні варіанти аналогу теореми Дхессена - Вінтнера для нескінченних згорток сингулярних розподілів, сформульовані В.М. Золотарьовим. Якщо продовжувати його ідею досягти чистоти нескінченної згортки сингулярних розподілів шляхом накладання певних умов на скінченну згортку, то природним заключним кроком у цьому напрямку буде наступна умова:

- (А) Нехай $F_1(x), F_2(x), \dots$ - деяка послідовність сингулярних функцій розподілу, що мають наступні дві властивості:
- нескінченна згортка всіх функцій послідовності збігається до деякої функції розподілу $F(x)$,
 - нехай задано послідовність випадкових величин ξ_k ,

$$P\{\xi_k < x\} = F_k(x).$$

Позначимо через F_k^i функцію розподілу випадкової величини

$$\xi_k^i = \sigma_k^i \xi_k + \beta_k^i, \text{ де } \sigma_k^i, \beta_k^i \in \mathbb{R}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{N},$$

$$\forall \{\sigma_k^i\}, \{\beta_k^i\} \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq k_n, 1 \leq k \leq n, \sigma_k^i \neq 0 \forall (k, i).$$

згортка
$$F^*[n] = \prod_{k=1}^n * \prod_{i=1}^{k_n} * F_k^i = F_1^1 * F_1^2 * \dots * F_1^{k_1} *$$

$$* F_2^1 * F_2^2 * \dots * F_2^{k_2} * \dots *$$

$$* F_n^1 * F_n^2 * \dots * F_n^{k_n} *$$

є сингулярною функцією розподілу.

Наступний приклад показує, що отримати твердження, аналогічне теоремі Дюссена - Вінгера, накладаючи якісь обмеження на скінченну згортку сингулярних розподілів, мабуть таки неможливо, оскільки навіть умова (A), яка в цьому напрямку є найбільш жорстким із природних обмежень, не забезпечує чистоти відповідної нескінченної згортки.

Приклад 1.1. Задаємо послідовність випадкових величин наступним чином:

при $n \geq 2$
$$\xi_n = \sum_{k \in A_n} \frac{1}{2^n} \eta_k,$$

де η_k - незалежні однаково розподілені бернултівські випадкові величини, $k \geq 0$, $P\{\eta_k = 0\} = P\{\eta_k = 1\} = \frac{1}{2}$.

Від множин $A_n, n \geq 0$ будемо вимагати, щоб

1) $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset,$

2) $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \mathbb{N}$, де \mathbb{N} - множина натуральних чисел,

3) $\forall n$ множина A_n містить нескінченно багато елементів,

4) $\forall m$ множина $B_m = \bigcup_{n=1}^m A_n$ має ту властивість, що

$\lim_{s \rightarrow \infty} (v_{s+1}^m - v_s^m) = \infty$, де елементи v_s^m множини B_m впорядковані за зростанням.

Покладемо
$$\xi_1 = \gamma_0 v_0 + (1 - \gamma_0)(v_0 + v_1), \text{ де } v_i = \sum_{k \in A_i} \frac{1}{2^i} \eta_k,$$

$i=0, 1.$

Тоді випадкова величина $M = \sum_{n=1}^{\infty} M_n$ має потрібні властивості, тобто:

1. Функції розподілу випадкових величин ξ_1, ξ_2, \dots задовольняють умову (А).
2. Функція розподілу випадкової величини M є сумішшю сингулярного і абсолютно неперервного розподілів.

§ 2. Якщо ряду із незалежних однаково розподілених випадкових величин притаманна деяка додаткова алгебраїчна структура, то виявляється можливим довести чистоту функції розподілу суми такого ряду.

Означення 1.1. Випадковим степеневим рядом називається ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k t^k$, де ξ_k - незалежні однаково розподілені величини з функцією розподілу $F(x)$, $t \in \mathbb{R}^1$.

Радіус збіжності такого ряду дорівнює майже всюди 1 або 0 в залежності від того, чи є скінченним або нескінченним

інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \ln_+(1/x) dF(x)$, де $\ln_+(x) = \max\{\ln x, 0\}$.

Далі, природно, розглядаємо випадкові степеневі ряди з радіусом збіжності 1.

Теорема 1.1. При довільному фіксованому $t \in]-1; 1[$ сума випадкового степеневого ряду має чисту функцію розподілу.

Після доведення цієї теореми виникає природне питання: чи можна за виглядом функції розподілу коефіцієнтів ряду з'ясувати, якою саме буде функція розподілу суми ряду - чисто дискретною, чисто сингулярною або чисто абсолютно неперервною. Цьому питанню присвячений § 3.

Приклад 1.2. Розглянемо випадковий степеневий ряд з бернулліївськими коефіцієнтами η_k .

$$P\{\eta_k = 0\} = p, \quad P\{\eta_k = 1\} = q.$$

При $t < p/q$ функція розподілу $G(x)$ суми $\eta = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k t^k$ буде чисто сингулярною.

У випадку, коли $p = q = \frac{1}{2}$ при $t = 2^{-\frac{k}{n}}$ функція $G(x)$ є абсолютно неперервною, а для $t = \frac{1}{\theta}$, де θ - числа Пізо - Відчарагхана, $G(x)$ буде сингулярною.

В четвертому параграфі будеться приклад двох сингулярних функцій розподілу, згортка яких має ненульові абсолютно неперервні і сингулярну складові і доводиться тема, в якій показано, як до такої пари можна додати послідовність сингулярних функцій розподілу так, що і нескінченна згортка всіх цих функцій буде сумішшю абсолютно неперервної і сингулярної функцій.

В главі 2 " Вид функції розподілу випадкового степеневого ряду при малих значеннях параметра t " більш детально досліджується залежність вигляду функції розподілу суми ряду від значень його параметра.

В § 1 цієї глави розглядається випадок, коли коефіцієнти ряду є дискретними випадковими величинами, що приймають скінченне число значень.

Теорема 2.1. Нехай $\xi_k, k=1, 2, \dots$ - послідовність чисто дискретних випадкових величин, однаково розподілених, із скінченим числом значень, така що

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad P\{\xi_k = a\} < 1,$$

$$\eta_t = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k t^k, \quad G_t(x) = P\{\eta_t < x\} = P\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k t^k < x\right\}$$

Тоді існує $t_0 > 0$ таке що для довільного $t \in (0; t_0)$ функція розподілу $G_t(x)$ є чисто сингулярною.

Наступний приклад показує, що t_0 не можна обрати єдиним для всіх дискретно розподілених випадкових величин із скінченим числом значень.

Приклад 2.1. Нехай задано ймовірносний простір $\Omega = [0; 1]$, \mathcal{P} - міра Лебега на ньому, x_k - k -й знак в \mathcal{N} -ічному розкладі x із Ω . Випадкові величини ξ_k визначимо співвідношенням:

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad P\{\xi_i = x_k\} = \frac{1}{N}, \quad k=1, 2, \dots$$

$$t_N = \frac{1}{N}, \quad \eta_{t_N} = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k t_N^k = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \cdot \frac{1}{N^k}$$

Тоді $G_{t_N}(x)$ - абсолютно неперервна функція розподілу, а оскільки $\frac{1}{N} \rightarrow 0$, то загальний для всіх дискретних функцій розподілу інтервал сингулярності вказати не можна.

В другому параграфі розглядаються випадкові степеневі ряди $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k t^k$, коефіцієнтами яких є дискретні випадкові величини з нескінченною кількістю значень або сингулярно розподілені випадкові величини.

Теорема 2.2. Нехай $P\{\xi_k = x_k\} = p_k, \forall i, k=1,2$.
 $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1, \eta_t = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k t^k, G_t(x) = P\{\eta_t < x\}$
 Якщо $p_k < C k^{-1-\epsilon}$, то існує таке $t_0 \in (0; 1)$, що $\forall t \in (0, t_0)$ функція розподілу $G_t(x)$ є чисто сингулярною.
 Таке t_0 можна обрати рівним $\prod_{k=1}^{\infty} p_k^{p_k}$.

У випадку сингулярно розподілених коефіцієнтів ряду такого загального "інтервалу сингулярності" функції розподілу суми не існує.

Приклад 2.2. Нехай $\eta_n^{(k)}$ - послідовність незалежних однаково розподілених бернулліївських випадкових величин.

$$P\{\eta_n^{(k)} = 0\} = P\{\eta_n^{(k)} = 1\} = \frac{1}{2}.$$

Покладемо $\xi_k = \sum_{n \in A} \eta_n^{(k)} \cdot 2^{-n}$, де A - деяка підмножина

множини \mathbb{N} натуральних чисел. Будемо вимагати, щоб вона задовольняла наступні умови:

1. $A^c = \mathbb{N} \setminus A$ - нескінченна множина,
2. нехай v_1, v_2, \dots - послідовність всіх елементів множини A^c , що виписані за зростанням. Тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_{n+1} - v_n) = \infty$.

Тоді для довільного $m \in \mathbb{N}$ функція розподілу випадкової величини $\xi_{2^{-m}} = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k 2^{-mk}$ є абсолютно неперервною, а послідовність $\frac{1}{2^m}$ при $m \rightarrow \infty$ збігається до 0.

В третій главі "Про деякі умови абсолютної неперервності функцій розподілу сум випадкових рядів" спочатку доводяться деякі більш загальні умови абсолютної неперервності суми випадкового ряду, а потім вони конкретизуються на випадок випад-

кових степеневих рядів і рядів з дискретно розподіленими коефіцієнтами.

Означення. Для функцій розподілу F і G відстанню повної варіації називається величина $\rho(F, G) = \sup_{A \in \mathcal{B}_2(R)} |M_F(A) - M_G(A)|$

де $\mathcal{B}_2(R)$ - σ -алгебра борелівських підмножин прямої, M_F, M_G - міри, що породжені функціями розподілу і

$$\text{відповідно. Відомо, що } \rho(F, G) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|dF(x) - dG(x)|}{d(F+G)(x)} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |d(F(x) - G(x))|$$

Теорема 3.1. Нехай задані дві сукупності випадкових величин $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ і $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$, причому випадкові величини в кожній сукупності незалежні. Позначимо через P_k і G_k функції розподілу випадкових величин ε_k і ν_k відповідно ($k = 1, 2, \dots$). Припустимо, що:

1. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k$ збігається з ймовірністю 1,
2. Для $\forall m \in \mathbb{N}$ випадкова величина $\sum_{k=m}^{\infty} \varepsilon_k$ має абсолютно неперервну функцію розподілу,
3. $\sum_{k=1}^{\infty} \rho(P_k, G_k) < \infty$.

Тоді ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \nu_k$ збігається з ймовірністю 1 і його сума теж має абсолютно неперервну функцію розподілу.

Наслідок. Нехай F_k - незалежні однаково розподілені випадкові величини ($k \in \mathbb{N}$) з функцією розподілу $F(x)$, причому $\int_{-\infty}^{\infty} |e_{\nu_k}(ix)| dF(x) < \infty$. Нехай, крім того, задана послідовність незалежних випадкових величин η_k , функції розподілу яких рівні $G_k(x)$ відповідно.

Тоді, якщо для деякого $t \in (-1; 1)$ функція розподілу ряду $\sum_{k=1}^{\infty} F_k t^k$ абсолютно неперервна і ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \rho(G_k, F)$ збігається, то збігається ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k t^k$ і його сума теж має а.н.

функція розподілу.

В § 2 цієї глави дана теорема уточнюється на випадок випадкових степеневих рядів з дискретними коефіцієнтами.

Теорема 3.2. Нехай незалежні однаково розподілені випадкові величини ξ_k ($k \in \mathbb{N}$) мають чисто дискретну функцію

розподілу $f(x)$ із скінченним носієм $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$.

$$P\{\xi_k = x_i\} = p_i > 0, \quad \sum_{i=1}^m p_i = 1,$$

і при деякому $t \in]-1, 1[$ функція розподілу суми випадкового степеневого ряду $\sum_{k=0}^{\infty} \xi_k t^k$ абсолютно неперервна. Її щільність позначимо через $f(x)$. Нехай, крім того, задана послідовність незалежних випадкових величин η_k з функціями розподілу

$$G_k^{(\kappa)}(x), \quad \text{причому для кожного } \kappa \in \mathbb{N} \text{ виділено множини } \{x_1^{(\kappa)}, x_2^{(\kappa)}, \dots, x_m^{(\kappa)}\}, \quad p_i^{(\kappa)} = P\{\eta_k = x_i^{(\kappa)}\} = G_k^{(\kappa)}(x_i^{(\kappa)} + 0) - G_k^{(\kappa)}(x_i^{(\kappa)}).$$

Припустимо, що виконуються умови:

1. $\exists C > 0 \quad \forall u \in \mathbb{R} \quad \|f(x+u) - f(x)\|_{L_1} < C|u|;$
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^m |x_i - x_i^{(\kappa)}| < \infty;$
3. $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^m |p_i - p_i^{(\kappa)}| < \infty.$

Тоді ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \eta_k t^k$ збігається і його сума має абсолютно неперервну функцію розподілу.

Якщо більш детально відомі властивості щільності $f(x)$ функції розподілу суми вихідного випадкового степеневого ряду $\sum_{k=0}^{\infty} \xi_k t^k$, то умови попередньої теореми можна послабити.

Приклад 3.1. Нехай незалежні випадкові величини ξ_k мають бернулліївський розподіл $P\{\xi_k = 0\} = P\{\xi_k = 1\} = 1/2$.

При $t = \frac{1}{2}$ сума випадкового ряду $\sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \frac{1}{2^k}$ має рівномірний розподіл на $[0; 1]$. Нехай, крім того, задана послідовність незалежних випадкових величин η_k , причому $P\{\eta_k = 0\} = P\{\eta_k = x_k\} = \frac{1}{2}$.

$x_k > 0$. Припустимо, що ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}$ збігається і покладемо

$$A_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{2^{k-n+1}}. \quad \text{Тоді для того, щоб сума ряду } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta_n}{2^n} \text{ мала}$$

абсолютно неперервну функцію розподілу, достатньо, щоб

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|A_{n+1} - A_n| \cdot |2A_n - A_{n+1}|}{A_n \cdot A_{n+1}} < \infty.$$

Зауваимо, що із збіжності ряду $\sum |x_n|^{-1}$ випливає збіжність

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|A_{n+1} - A_n| \cdot |2A_n - A_{n+1}|}{A_n \cdot A_{n+1}},$$

але можна навести приклад необмеженої послідовності додатних чисел x_n такої, що $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} < \infty$

відповідний ряд із величин A_n зб'їг, і, звідси, функція розподілу суми ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$ абсолютно неперервна.

При цьому, хоча й умова існування скінченної границі у послідовності $\{x_n\}$ може бути послаблена, вона виявляється разом з тим в певному сенсі необхідною, оскільки не може бути знята без додаткових обмежень на x_n .

Приклад 3.2. Задамо послідовність $\{x_k\}$ наступним чином:

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = 2n-1; \\ 2, & k = 2n. \end{cases}; \quad \xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k} \xi_k, \quad P\{\xi_k = 0\} = P\{\xi_k = 1\} = \frac{1}{2}.$$

В даному випадку ξ буде мати не абсолютно неперервний, а сингулярний розподіл.

В главі 4 "Застосування матричних методів при вивченні вигляду функції розподілу випадкових степеневих рядів" показано, як у деяких випадках задачу вивчення виду функції розподілу випадкових степеневих рядів можна звести до вивчення добутків відповідних незалежних однаково розподілених випадкових матриць.

$$\text{Нехай } \xi = \sum_{k=1}^m \xi_k t^k, \quad |t| < 1, \quad F_{\xi}(x) = P\{\xi < x\}.$$

ξ_k - незалежні однаково розподілені випадкові величини.

$$P\{\xi_k = i\} = p_i, \quad i = \overline{0, m-1}.$$

$$t = \frac{s}{5}, \quad s \in \mathcal{N}, \quad s \geq 2.$$

Вважаємо, що $m > s$.

$$\text{Нехай } A - \text{найменше натуральне число, для якого } \frac{m-1}{s-1} \leq A.$$

Міра, що відповідає функції розподілу $F_s^{(n)}(x)$, зосереджена на відрізку $[0; \frac{n-1}{s-1}] \subset [0; 1]$. Для кожного $n \in \mathbb{Z}^{n \geq 0}$ розглянемо розбиття відрізка $[0; 1]$ на однакові інтервали довжини $\frac{1}{s^n}$. Їх кількість $C_n = A \cdot s^n$.

Точки розбиття позначимо

$$0 = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \dots < x_{C_n-1}^{(n)} < x_{C_n}^{(n)} = A.$$

Нехай $P_i^{(n)} = P\left\{\sum_{k=1}^n \frac{1}{s^k} = x_i^{(n)}\right\}$, $i = \overline{0, C_n}$.

Лема 4.1. Нехай θ - деяке фіксоване додатне число.

Припустимо, що виконується умова:

$\forall \varepsilon > 0 \exists N, \exists i_1, i_2, \dots, i_N, N, \forall n \in \mathbb{N}$ такі, що

$$0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_N \leq C_n, \sum_{j=1}^N P_{i_j}^{(n)} > \theta, \frac{N}{C_n} < \varepsilon.$$

Тоді функція розподілу випадкової величини ξ буде чисто сингулярною.

Зв'язком тепер з кожним відрізком $[x_i^{(n)}, x_{i+1}^{(n)}]$ вектор

$$\bar{\alpha}_i^{(n)} = \begin{pmatrix} P_{i-1}^{(n)} \\ P_i^{(n)} \\ \vdots \\ P_{i-A+1}^{(n)} \end{pmatrix}, \quad i = \overline{0, C_n-1}.$$

Для випадку від'ємних номерів $j < 0$ вважаємо $P_j^{(n)} = 0$.

На наступному кроці розбиття ми з одного вектора $\bar{\alpha}_i^{(n)}$, що відповідає відрізку $[x_i^{(n)}, x_{i+1}^{(n)}]$ отримуємо s векторів

$$\bar{\alpha}_{si}^{(n+s)} = \begin{pmatrix} P_{si}^{(n+s)} \\ P_{si+1}^{(n+s)} \\ \vdots \\ P_{si-A+1}^{(n+s)} \end{pmatrix}; \dots; \bar{\alpha}_{si+s-1}^{(n+s)} = \begin{pmatrix} P_{si+s-1}^{(n+s)} \\ P_{si+s}^{(n+s)} \\ \vdots \\ P_{si-A+s}^{(n+s)} \end{pmatrix},$$

$i = \overline{0, C_n-1}$.

що відповідають відрізкам

$$[x_{si}^{(n+s)}, x_{si+1}^{(n+s)}], [x_{si+1}^{(n+s)}, x_{si+2}^{(n+s)}], \dots, [x_{si+s-1}^{(n+s)}, x_{si+s}^{(n+s)}].$$

снує S невідроджених матриць C_1, C_2, \dots, C_S таких, що

$$\begin{pmatrix} P_{iS}^{(n+1)} \\ \vdots \\ P_{iS-A+1}^{(n+1)} \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} P_i^{(n)} \\ \vdots \\ P_{i-A+1}^{(n)} \end{pmatrix}; \dots; \begin{pmatrix} P_{iS+S-1}^{(n+1)} \\ \vdots \\ P_{iS-A+1}^{(n+1)} \end{pmatrix} = C_S \begin{pmatrix} P_i^{(n)} \\ \vdots \\ P_{i-A+1}^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Елементи матриць C_n можна задати наступними формулами:

$$C_{\alpha\beta}^{(\kappa)} = P \{ \xi_{\alpha\beta} = (\beta-1)S + \kappa - \alpha \}, \text{ де } \kappa = \overline{1, S}, \alpha = \overline{1, A};$$

Розглянемо незалежні однаково розподілені матриці $X_{\kappa}, \kappa \in N$. Для кожного κ X_{κ} приймає з ймовірністю $\frac{1}{S}$ одне із значень C_1, C_2, \dots, C_S .

Позначимо через Z_n :

$$Z_n = \prod_{\kappa=1}^n X_{\kappa} = X_n X_{n-1} \dots X_1.$$

Вектор $\bar{z}_n = \bar{z}_n^{(e)}$ (e - фіксовано, $e \in \{0, 1, \dots, A-1\}$) з ймовірністю 1 приймає всі значення

$$\begin{pmatrix} P_i^{(n)} \\ \vdots \\ P_{i-A+1}^{(n)} \end{pmatrix}, \text{ де } i = \overline{s^2 \cdot e; s^2(\ell+1) - 1}.$$

Нехай ми маємо спочатку один початковий вектор

$$\bar{x}_0 = \bar{0}_0^{(e)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 4.1. Нехай для $\forall \lambda \in (0; 1)$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\varepsilon > 0} P \{ \lambda \varepsilon < |Z_n \bar{x}_0| < \varepsilon \} \rightarrow 0.$$

де - визначена вище випадкова матриця по ймовірностям незалежних однаково розподілених випадкових величин.

Тоді функція розподілу суми випадкового степеневого ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} t^k \bar{x}_k \text{ буде чисто сингулярною.}$$

Зуваження. Умови теореми будуть виконані, наприклад, у тому випадку, коли

існують послідовності $\{m_n\}$, $\{a_n\}$, $a_n \rightarrow \infty$, $\forall n$, $a_n \in \mathbb{R}$ і деяка неперервна функція $\varphi(t)$ наприклад, функція нормального розподілу / такі, що

$$P \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{Z_k - \bar{z}_k}{a_n} < t \right\} \rightarrow \varphi(t)$$

Тоді функція розподілу є сумою відповідного випадкового степеня ряду $\sum_{k=1}^n \xi_k t^k$, де розподілом коефіцієнтів якого побудовано випадкову матрицю Z_n , буде число сингулярне.

464610

Основні положення дисертації опубліковані в наступних роботах:

1. Виннишин Я.Ф., Морока В.А. О функции распределения суммы независимых случайных величин // Избранные задачи современной теории случайных процессов: Сб. науч. тр. - Киев: ИМ АН УССР, 1978. - С.30 - 37.
2. Виннишин Я.Ф., Морока В.А. О функциях распределения сумм случайных степенных рядов // Стохастический анализ и его приложения: Сб. науч. тр. - Киев: ИМ АН УССР, 1969. - С.17 - 25.
3. Виннишин Я.Ф., Морока В.А. О функции распределения суммы случайного степенного ряда с произвольно распределенными коэффициентами // Бесконечномерный стохастический анализ: Сб. науч. тр. - Киев: ИМ АН УССР, 1990. - С. 23 - 31.
4. Виннишин Я.Ф., Морока В.А. О свертках сингулярных функций распределения и аналогах теоремы Джексона-Винтнера // Случайные процессы и бесконечномерный анализ: Сб. науч. тр. - Киев: ИМ АН Украины, 1992. - С. 9 - 18.
5. Морока В.А. К вопросу о функции распределения суммы случайного степенного ряда // Случайные процессы и бесконечномерный анализ: Сб. науч. тр. - Киев: ИМ АН Украины, 1992. - С. 88 - 91.
6. Морока В.А. О функциях распределения сумм независимых случайных величин // Тези міжнародної конференції, присвяченої пам'яті академіка М.П.Кравчука, Київ - Луцьк - 1992. - С.186.

Підп. до друку 10.11.93. Формат 60x84/16. Папір друк. Кро. друк. Ум. друк. арк. 0,93. Ум. фарб.-відб. 0,93. Обл.-вид. арк. 0,7. Тираж 100 пр. Зам. 395. Безкоштовно.

Підготовлено і віддруковано в Інституті математики АН України 253601 Київ 4, ІСП, вул. Тершенківська, 3