А К А Д Е М І Я Н А У К У К Р А Ї Н И

І Н С Т И Т У Т М А Т Е М А Т И К И

На правах рукопису

ОВЧАР Раїса Федорівна

КРИТИЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

01.01.02 - диференціальні рівняння

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

К И Ї В - 1993

Робота виконана у відділі звичайних диференціальних рівнянь Інституту математики АН України.

Наукові керівники - чл. - кор. АН України, доктор фізико-математичних наук САМОЙЛЕНКО А.М., доктор фізико-математичних наук БОЙЧУК О.А.

Офіційні опоненти - доктор фізико-математичних наук, професор МАРТИНЮК Д.І., кандидат фізико-математичних наук ЖУРАВЛЬОВ В.П.

Провідна установа - Одеський державний університет ім. Мечнікова

Захист відбудеться "21" грудня 1993 року на засіданні спеціалізованої ради Д 016.50.02 при Інституті математики АН України за адресою: 252601 Київ-4, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Інституту.

Автореферат розісланий "12" листопада 1993 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради ЛУЧКА А.Ю.

ЛННБ України ім.В.Стефаника
00814156 (Р)

Загальна характеристика роботи

Актуальність теми. Математичний опис багатьох задач природознавства зводиться до крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією, порядок n яких в загальному випадку не співпадає з кількістю m крайових умов. Крайові задачі з імпульсною дією вивчались раніш в припущенні $m=n$ / А.Д. Мишкіс, А.М. Самойленко, М.О. Перестюк, М.Й. Ронто, А.В. Анохін, С.І. Гургула, А. Халанай, Д. Векслер /, причому найбільш повно досліджені періодичні крайові задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією в некритичному випадку / А.М. Самойленко, М.О. Перестюк /, а також періодичні крайові задачі в критичному випадку / О.А. Бойчук, М.О. Перестюк, А.М. Самойленко /. Нами розглядаються найбільш загальні, маловивчені недовизначені та перевизначені крайові задачі з імпульсною дією, в яких крайові умови задаються лінійним, або слабонелінійним векторним функціоналом, число m компонент якого, в загальному випадку не співпадає з порядком n диференціальної системи.

Мета дисертаційної роботи - знаходження необхідних і достатніх умов існування розв'язків лінійних і слабонелінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією. Побудова збіжних ітераційних алгоритмів для знаходження розв'язків таких задач.

Загальні методи вивчення. В дисертаційній роботі використані ефективні методи теорії збурень, асимптотичні методи нелінійної механіки, розроблені в працях М.М. Крилова, М.М. Боголюбова, Ю.О. Митропольського та А.М. Самойленка, апарат узагальнених операторів Гріна лінійних напіводнорідних крайових задач / О.А. Бойчук /.

Наукова новизна. На захист виносяться слідуючі основні положення, які визначають наукову новизну результатів дисертаційної роботи:

- отримані ефективні коефіцієнтні умови виникнення розв'язків лінійних неоднорідних імпульсних крайових задач з малими збуреннями у випадку, коли породжуюча крайова задача з імпульсною дією не має розв'язків при довільних правих частинах;
- отримано рівняння для породжуючих амплітуд слабонелінійних критичних крайових задач з імпульсною дією, яке визначає необхідну умову існування розв'язків таких задач;
- отримані ефективні достатні умови існування розв'язків слабонелінійних критичних і некритичних крайових задач з імпульсною дією. Запропоновані збіжні ітераційні алгоритми їх побудови;
- запропонована загальна схема дослідження лінійних та слабонелінійних крайових задач з імпульсною дією.

Теоретична і практична цінність. Робота носить теоретичний характер, узагальнює і поглиблює раніш відомі результати з лінійних і слабонелінійних періодичних крайових задач на загальний випадок, коли крайові умови задаються слабонелінійним векторним функціоналом, а кількість крайових умов не співпадає з порядком диференціальної системи. Практична цінність обумовлена тим, що питання існування і побудови розв'язків крайових задач з імпульсною дією займають важливе місце у якісній теорії диференціальних рівнянь; широким застосуванням теорії крайових задач з імпульсною дією в різноманітних за фізичною природою і функціональним призначенням технічних задачах; а також конструктивністю запропонованих в роботі коефіцієнтних умов існування розв'язків та алгоритмів їх побудови.

Апробація роботи. Основні результати дисертаційної роботи доповідались на семінарі відділу звичайних диференціальних рівнянь Інституту математики АН України / керівник семінару чл.-кор. АН України А.М. Самойленко /, на семінарі " Крайові задачі математичної геофізики" Інституту геофізики АН України / керівник семінару - доктор фізико-математичних наук О.А. Бойчук /, на школах-семінарах: " Розривні динамічні системи " / 17-20 вересня 1991 року, Ужгородський державний університет /, " Нелінійні задачі математичної фізики і їх застосування " /5-12 жовтня 1992 року, Крим /, " Нелінійні проблеми диференціальних рівнянь і математичної фізики - Другі Боголюбівські читання " / 28 вересня - 2 жовтня 1993 року, Київ /.

Публікації. Результати дисертації опубліковані в роботах [1-5]

Структура роботи. Дисертація складається із вступу, двох розділів, висновку та списку літератури, який містить 112 найменувань. Загальний обсяг роботи сторінок.

Зміст роботи.

У вступі обгрунтовано актуальність вибраного напрямку дослідження й наведено короткий аналіз основних робіт по темі дисертації, та анотація отриманих результатів.

В першому розділі розглядається лінійна крайова задача для систем звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією / Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. -Киев: Вища шк., 1987.-287с. / виду

$$\begin{cases} \dot{z} = A(t)z + f(t), \quad t \neq \tau_i \in [a,b],\ i \in Z, \\ \Delta z\big|_{t=\tau_i} = S_i z + a_i, \qquad (1) \\ \ell z = \alpha. \end{cases} \qquad (2)$$

де $A(t),\ f(t) \in C([a,b]\setminus\{\tau_i\}_I)$ – $(n\times n)$ - вимірні матричні і $(n\times 1)$ -вимірні векторні функції відповідно ($C([a,b]\setminus\{\tau_i\}_I)$ простір неперервних або кусково-неперервних на $[a,b]$ вектор-функцій, які мають розриви першого роду по t при $t=\tau_i$); S_i – $(n\times n)$-вимірні постійні матриці такі, що $E+S_i$ невироджені; a_i – n -вимірний вектор-стовпець констант: $a_i \in R^n$; $-\infty < a < \tau_1 < \ldots < \tau_i < \ldots < \tau_p < b < +\infty,\ i=1,\ldots,p$;

$\ell = col(\ell_1,\ldots,\ell_m)$ – лінійний обмежений m -вимірний векторний функціонал;

ТЕОРЕМА І.2 / Критичний випадок / Якщо $\operatorname{rank} Q = n_1 < n$, то відповідна / І /, / 2 / однорідна крайова задача з імпульсною дією ($f(t)=0,\ a_i=0,\ \mathcal{L}=0$) має $r=n-n_1$ і тільки r -лінійно-незалежних розв'язків. Неоднорідна крайова задача з імпульсною дією / І /, / 2 / розв'язна тоді і тільки тоді, коли

$$f(t) \in C([a,b]\setminus\{\tau_i\}_I),\ a_i \in R^n,\ \mathcal{L} \in R^m$$

задовольняють умову

$$P_{Q_d^*}\left\{\mathcal{L} - \ell\int_a^b K(\cdot,\tau)f(\tau)d\tau - \ell\sum_{i=1}^{p}\bar{K}(\cdot,\tau_i)a_i\right\}=0,\ d=m-n_1 \quad (3)$$

і при цьому має r -параметричне сімейство розв'язків

$$z_0(t,c_r) = X_r(t)c_r + \left(G\left[\begin{smallmatrix} f \\ a_i\end{smallmatrix}\right]\right)(t) + X(t)Q^+\mathcal{L}, \quad (4)$$

де $X(t)$ – нормальна $X(a)=E$ фундаментальна матриця відповідної / І / однорідної системи ($f(t)=0,\ a_i=0$); $K(t,\tau)$ – матриця Гріна задачі Коші системи / І / з імпульсною дією:

$$K(t,\tau) = \begin{cases} X(t)X^{-1}(\tau), & a \le \tau \le t \le b, \\ 0, & a \le t < \tau \le b, \end{cases}$$

$\bar{K}(t,\tau_i) = K(t,\tau_i+0)$; –

$Q=\ell X(\cdot)$ - $(m\times n)$ - вимірна постійна матриця, Q^+ - $(n\times m)$ - вимірна матриця, псевдообернена до Q по Муру - Пенроузу;

$P_{Q^*}: R^m \to N(Q^*)$ - $(m\times m)$ -вимірна матриця-ортопроектор: $P_{Q^*}^2 = P_{Q^*} = P_{Q^*}^*$; $X_r(t)$ - $(n\times r)$ - матриця, стовпці якої є повна система r лінійно незалежних розв'язків однорідної крайової задачі з імпульсною дією $(f(t)=0,\ a_i=0,\ \alpha=0)$;

$P_{Q^*_d}$ - $(d\times m)$ - матриця, рядки якої є повна система d лінійно незалежних рядків матриці P_{Q^*} ; G - узагальнений оператор Гріна, який визначається формулою:

$$\left(G\left[\begin{smallmatrix} f \\ a_i \end{smallmatrix}\right]\right)(t) \stackrel{def}{=} \Big[\int_a^b K(t,\tau)*d\tau - X(t)Q^+\ell\int_a^b K(\cdot,\tau)*d\tau,$$

$$\sum_{i=1}^{p} \bar K(t,\tau_i)* - X(t)Q^+\ell\sum_{i=1}^{p}\bar K(\cdot,\tau_i)*\Big]\begin{bmatrix} f(\tau) \\ a_i \end{bmatrix}. \qquad (5)$$

З теореми 1.2, сформульованої в загальному вигляді, отримано наступне твердження для некритичних крайових задач.

ТЕОРЕМА 1.3 / Некритичний випадок / Якщо $\operatorname{rank} Q = n_1 = n$, то відповідна / 1 /, / 2 / однорідна крайова задача з імпульсною дією / $f(t)=0,\ a_i=0,\ \alpha=0$ / має тільки тривіальний розв'язок. Неоднорідна крайова задача з імпульсною дією / 1 /, / 2 / розв'язна тоді і тільки тоді, коли $f(t)\in C([a,b]\setminus\{\tau_i\}_I)$, $a_i\in R^n$, $\alpha\in R^m$ задовольняють умову

$$P_{Q^*_d}\Big\{\alpha - \ell\int_a^b K(\cdot,\tau)f(\tau)d\tau - \ell\sum_{i=1}^{p}\bar K(\cdot,\tau_i)a_i\Big\}=0,\quad d=m-n \qquad (6)$$

при цьому має єдиний розв'язок

$$z_0(t) = \left(G\left[\begin{smallmatrix} f \\ a_i \end{smallmatrix}\right]\right)(t) + X(t)Q^+\alpha,\quad (X_r(t)=0), \qquad (7)$$

де узагальнений оператор Гріна $\left(G\left[\begin{smallmatrix} f \\ a \end{smallmatrix}\right]\right)(t)$ визначається формулою / 5 /.

Якщо функціонал ℓ такий, що справедливе співвідношення

$$\ell \int_a^b K(\cdot,\tau) * d\tau = \int_a^b \ell K(\cdot,\tau) * d\tau,$$

то узагальнений оператор Гріна має таке зображення:

$$\left(G\begin{bmatrix} f \\ a_i \end{bmatrix}\right)(t) = \left[\int_a^b G_0(t,\tau) * d\tau, \sum_{i=1}^{p} \bar{G}_0(t,\tau_i) *\right] \begin{bmatrix} f(\tau) \\ a_i \end{bmatrix},$$

ядро якого

$$G_0(t,\tau) = K(t,\tau) - X(t) Q^+ \ell K(\cdot,\tau), \quad \bar{G}_0(t,\tau_i) = G_0(t,\tau_i + 0)$$

називається узагальненою матрицею Гріна крайової задачі / I /, / 2 / без імпульсів.

Тут же розглянута слабозбурена лінійна неоднорідна крайова задача з імпульсною дією

$$\begin{cases} \dot{z} = A(t)z + \varepsilon A_1(t) z + f(t), \quad t \neq \tau_i \\ \Delta z\big|_{t=\tau_i} - S_i z = a_i + \varepsilon A_{1i} z(\tau_i - 0), \\ \ell z = \alpha + \varepsilon \ell_1 z \end{cases} \qquad (8)$$

в припущенні, що у породжуючої крайової задачі з імпульсною дією / I /, / 2 / не існує розв'язків при довільних неоднорідностях $f(t) \in C([a,b] \setminus \{\tau_i\}_I)$, $a_i \in R^n$, $\alpha \in R^m$. По теоремі I.2 це означає, що $\operatorname{rank} Q = n_1 < n$ і критерій розв'язності / 3 / не виконується

$$P_{Q_d^*}\left\{\alpha - \ell \int_a^b K(\cdot,\tau) f(\tau) d\tau - \ell \sum_{i=1}^{p} \bar{K}(\cdot,\tau_i) a_i\right\} \neq 0.$$

Ставиться і розв'язується задача про знаходження умов на збурені доданки $\varepsilon A_1(t)$, εA_{1i}, $\varepsilon \ell_1$, при яких задача / 8 / буде розв'язана при довільних

$$f(t) \in C([a,b] \setminus \{\tau_i\}_I), \quad a_i \in R^n, \quad \alpha \in R^m.$$

На основі методу типу Вішика - Люстерніка отримані коефіцієнтні умови існування розв'язків крайової задачі / 8 / при довільних $f(t) \in C([a,b] \setminus \{\tau_i\}_I)$, $a_i \in R^n$, $\alpha \in R^m$.

Для отримання цих умов будується $(d \times r)$ - вимірна матриця

$$B_0 = P_{Q^*_d} \left[l_1 X_r(\cdot) - l \int_a^b K(\cdot,\tau) A_1(\tau) X_r(\tau) d\tau - l \sum_{i=1}^{p} \bar{K}(\cdot,\tau_i) A_{1i} X_r(\tau_i - 0) \right] \quad (9)$$

ТЕОРЕМА I.5 Нехай крайова задача / 8 / задовольняє вказані вище умови так, що має місце критичний випадок ($\operatorname{rank} Q = n_1 < n$) і породжуюча крайова задача з імпульсною дією / I /, / 2 / при довільних неоднорідностях

$$f(t) \in C([a,b] \setminus \{\tau_i\}_I), \; a_i \in R^n, \; \alpha \in R^m$$

не має розв'язків. Тоді, якщо виконуються умови

$$P_{B_0} = 0, \quad P_{B_0^*} P_{Q^*_d} = 0, \quad (10)$$

то для крайової задачі / 8 / існує при довільних

$$f(t) \in C([a,b] \setminus \{\tau_i\}_I), \; a_i \in R^n, \; \alpha \in R^m$$

єдиний розв'язок у вигляді збіжного при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ ряду

$$z(t,\varepsilon) = \sum_{i=-1}^{\infty} \varepsilon^i z_i(t).$$

Якщо умови / 10 / не виконуються, то для отримання достатніх умов існування розв'язків крайової задачі / 8 / при довільних $f(t) \in C([a,b] \setminus \{\tau_i\}_I)$, $a_i \in R^n$, $\alpha \in R^m$ необхідно залучати $(d \times r)$ - вимірну матрицю

$$B_1 = P_{Q^*_d} \left\{ l_1 G_1(\cdot) - l \int_a^b K(\cdot,\tau) A_1(\tau) G_1(\tau) d\tau - l \sum_{i=1}^{p} \bar{K}(\cdot,\tau_i) A_{1i} G_1(\tau_i - 0) \right\}, \quad (11)$$

де

$$G_1(t) = \left(G \begin{bmatrix} A_1(\tau) G_{00}(\tau) \\ A_{1i} G_{00}(\tau_i - 0) \end{bmatrix} \right)(t) + X(t) Q^+ l_1 G_{00}(\cdot),$$

$$G_{00}(t) = X_r(t).$$

Для цього випадку доведене наступне твердження.

ТЕОРЕМА 1.7 Нехай відносно крайової задачі / 8 / виконані умови, зазначені вище. Тоді справедливі такі еквівалентні твердження:

а / при довільних $f(t) \in C([a,b]\setminus\{\tau_i\}_I)$, $a_i \in R^n$, $\alpha \in R^m$ крайова задача / 8 / має єдиний розв'язок $z(t,\varepsilon)$ у вигляді збіжного при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ ряду

$$z(t,\varepsilon) = \sum_{i=-2}^{+\infty} \varepsilon^i z_i(t) ;$$

б / при довільному r - вимірному постійному векторі $\varphi_0 \in R^r$ $(1 \le r \le n)$ r -вимірна алгебраїчна система

$$(B_0 + \varepsilon B_1 + \dots) u_\varepsilon = \varphi_0$$

має єдиний розв'язок у вигляді збіжного при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ ряду

$$u_\varepsilon = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i u_i ;$$

в / виконані умови

$$P_{B_0} \ne 0, \; P_{B_0} P_{B_1} = 0, \; P_{B_0^*} P_{B_1^*} P_{Q_d^*} = 0.$$

При цьому умови $P_{B_0} \ne 0$, $P_{B_0} P_{B_1} = 0$ забезпечують єдиність, а умова $P_{B_0^*} P_{B_1^*} P_{Q_d^*} = 0$ - існування розв'язків.

У випадку відсутності імпульсів теореми 1.5 і 1.7 переходять у доведені раніше теореми / Бойчук А.А. Конструктивные методы анализа краевых задач. -К.: Наук. думка, 1990. -96с.//

Як приклад отриманих в першому розділі дисертації результатів розглянуто задачу про регуляризацію крайової задачі за допомогою імпульсної дії / § 1.5 /.

В другому розділі розроблені методи аналізу лінійних неоднорідних крайових задач з імпульсною дією / 1 /, / 2 / використовуються для аналізу слабонелінійних крайових задач для диференціальних рівнянь з імпульсною дією виду

$$\begin{cases} \dot{z} = A(t)z + f(t) + \varepsilon Z(z,t,\varepsilon), \quad t \neq \tau_i \in [a,b] \\ \Delta z\big|_{t=\tau_i} - S_i z(\tau_i - 0) = a_i + \varepsilon J_i(z(\tau_i - 0,\varepsilon),\varepsilon), \; i = 1,\dots,k \\ lz = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \end{cases} \quad (12)$$

де $Z(z,t,\varepsilon)$ - нелінійна по z, n - вимірна вектор-функція, неперервно - диференційована по z в околі розв'язків породжуючої крайової задачі з імпульсною дією /1/, /2/, неперервна або кусково - неперервна по t з розривами першого роду при $t=\tau_i$, неперервна по $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$; $J_i(z(\tau_i - 0,\varepsilon),\varepsilon)$, $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ -нелінійні вектор-функціонали, неперервно--диференційовані /по Фреше/ по z в околі розв'язків породжуючої крайової задачі з імпульсною дією /1/, /2/, неперервні по $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$.

Знайдені умови існування і алгоритми побудови розв'язку $z(t,\varepsilon): z(\cdot,\varepsilon) \in C^1([a,b]\setminus\{\tau_i\}_I),\ z(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$ крайової задачі з імпульсною дією /12/, який обертається при $\varepsilon=0$ в розв'язок породжуючої крайової задачі з імпульсною дією /1/, /2/ в некритичному випадку, коли однорідна породжуюча крайова задача /1/, /2/ не має розв'язків, крім тривіального.

Досліджені і класифіковані найбільш цікаві і маловивчені критичні випадки, коли породжуюча для /12/ крайова задача з імпульсною дією /1/, /2/ має r - параметричне $(r = n - \operatorname{rank} Q)$ сімейство розв'язків /4/. Ставиться задача про визначення умов існування і алгоритмів побудови розв'язку $z(t,\varepsilon): z(\cdot,\varepsilon) \in C^1([a,b]\setminus\{\tau_i\}_I)$, $z(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$ крайової задачі /12/, який обертається при $\varepsilon=0$ в один із розв'язків $z_0(t,c)$ породжуючої крайової задачі з імпульсною дією / 1 /, / 2 /.

Необхідні умови існування таких розв'язків дає наступна теорема / § 2.2 /.

ТЕОРЕМА 2.2 Нехай слабконелінійна крайова задача з імпульсною дією / 12 / задовольняє вказані вище умови і має розв'язок

$$z(t,\varepsilon): z(\cdot,\varepsilon)\in C^1([a,b]\setminus\{\tau_i\}_I),\ z(t,\cdot)\in C[0,\varepsilon_0],$$

який при $\varepsilon=0$ обертається в породжуючий розв'язок $z_0(t,c^*)$ з константою $c_r=c^*\in R^r$. Тоді вектор c^* задовольняє рівняння

$$F(c^*)=P_{Q_d^*}\Big\{\mathcal{J}(z_0(\cdot,c^*),0)-\ell\int_a^b K(\cdot,\tau)Z(z_0(\tau,c^*),\tau,0)d\tau-$$

$$-\ell\sum_{i=1}^{p}\bar{K}(\cdot,\tau_i)\mathcal{J}_i(z_0(\tau_i-0,c^*),0)\Big\}=0. \qquad (13)$$

Рівняння / 13 / будемо називати рівнянням для породжуючих амплітуд крайової задачі з імпульсною дією / 12 /.

Виконуючи в / 12 / заміну змінної $z(t,\varepsilon)=z_0(t,c^*)+x(t,\varepsilon)$, в якій вектор констант $c^*\in R^r$ задовольняє рівняння / 13 /, приходимо до крайової задачі з імпульсною дією / § 2.3 /:

$$\begin{cases}\dot{x}=A(t)x+\varepsilon Z(z_0(t,c^*)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon),\ t\neq\tau_i\\ \Delta x\big|_{t=\tau_i}=S_i x(\tau_i-0)+\varepsilon\mathcal{J}_i(z_0(\tau_i-0,c^*)+x(\tau_i-0,\varepsilon),\varepsilon),\\ \ell x=\varepsilon\mathcal{J}(z_0(\cdot,c^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon).\end{cases} \qquad (14)$$

Враховуючи умови на нелінійності, маємо такий розклад в околі $x=0$, $\varepsilon=0$:

$$Z(z_0+x,t,\varepsilon)=Z(z_0(t,c^*),t,0)+A_1(t)x+R(x,t,\varepsilon),$$

$$A_1(t)=\left.\frac{\partial Z(z,t,0)}{\partial z}\right|_{z=z_0(t,c^*)},\ R(0,t,0)=0,\ \frac{\partial R(0,t,0)}{\partial x}=0;$$

$$\mathcal{J}_i(z_0+x,\varepsilon)=\mathcal{J}_i(z_0(\tau_i-0,c^*),0)+A_{1i}\,x(\tau_i-0,\varepsilon)+R_i(x(\tau_i-0,\varepsilon),\varepsilon),$$

$$A_{1i}=\left.\frac{\partial \mathcal{J}_i(z,0)}{\partial z}\right|_{z=z_0(\tau_i-0,c^*)},\ R_i(0,0)=0,\ \frac{\partial R_i(0,0)}{\partial x}=0;$$

$$\mathcal{J}(z_0+x,\varepsilon)=\mathcal{J}(z_0(\cdot,c^*),0)+\ell_1 x(\cdot,\varepsilon)+R_0(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon),$$

$\ell_1 x(\cdot,\varepsilon)$ - лінійна по x частина векторного функціоналу

$\mathcal{J}(z_0(\cdot,c^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$,

$R_0(0,0)=0$, $\partial R_0(0,0)/\partial x=0$.

На основі теореми 1.2 для розв'язку $x(t,\varepsilon)$ крайової задачі з імпульсною дією /14/ маємо зображення $x(t,\varepsilon)=X_r(t)c+x^{(1)}(t,\varepsilon)$. Тут невідомий вектор $c\in R^r$ визначається із умови розв'язності задачі /14/

$$P_{Q_d^*}\Big[\mathcal{J}(z_0(\cdot,c^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-\ell\int_a^b K(\cdot,\tau)Z(z_0(\tau,c^*)+x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)d\tau-$$
$$-\ell\sum_{i=1}^{p}\bar{K}(\cdot,\tau_i)\,\mathcal{J}_i(z_0(\tau_i-0,c^*)+x(\tau_i-0,\varepsilon),\varepsilon)\Big]=0,$$

а невідома вектор-функція $x^{(1)}(t,\varepsilon)$ визначається за формулою для знаходження частинного розв'язку

$$x^{(1)}(t,\varepsilon)=\varepsilon X(t)Q^+\mathcal{J}(z_0(\cdot,c^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)+\varepsilon\left(G\begin{bmatrix}Z(z_0(\tau,c^*)+x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\\ \mathcal{J}_i(z_0(\tau_i-0,c^*)+x(\tau_i-0,\varepsilon),\varepsilon)\end{bmatrix}\right)(t).$$

ТЕОРЕМА 2.3 / Достатня умова / Нехай крайова задача з імпульсною дією /12/ задовольняє вказані вище умови так, що має місце критичний випадок ($\operatorname{rank} Q = n_1 < n$) і відповідна породжуюча крайова задача з імпульсною дією / 1 /, / 2 / при умові / 3 / ($d = m - n_1$) і тільки при ній має r -параметричне сімейство ($r = n - n_1$) породжуючих розв'язків / 4 /. Тоді для кожного значення вектора $c_r = c_r^* \in R^r$, який задовольняє рівняння / 13 / для породжуючих амплітуд, при

$$P_{B_0} = 0 , \quad P_{B_0^*} P_{Q_d^*} = 0$$

крайова задача з імпульсною дією / 12 / має розв'язок

$$z(t,\varepsilon) : z(\cdot,\varepsilon) \in C^1([a,b] \setminus \{\tau_i\}_I), \; z(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0],$$

який при $\varepsilon = 0$ обертається в породжуючий $z_0(t, c_r^*)$.

Цей розв'язок можна визначити за допомогою збіжного на $[0,\varepsilon_*]$ ітераційного процесу / §2.4 /:

$$c_k = -B_0^+ P_{Q_d^*} \Big\{ l_1 x_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R_0(x_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - l \int_a^b K(\cdot,\tau)[A_1(\tau) \times x_k^{(1)}(\tau,\varepsilon) + R(x_k(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)]d\tau - l \sum_{i=1}^{p} \bar{K}(\cdot,\tau_i)[A_{1i} x_k^{(1)}(\tau_i - 0,\varepsilon) + R_i(x_k(\tau_i - 0,\varepsilon),\varepsilon)\Big\},$$

$$x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon \left(G \begin{bmatrix} Z(z_0(\tau,c_r^*),\tau,0) + A_1(\tau)[X_r(\tau)c_k + x_k^{(1)}(\tau,\varepsilon)] + R(x_k(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon) \\ \mathcal{I}_i(z_0(\tau_i - 0,c_r^*),0) + A_{1i}[X_r(\tau_i - 0)c_k + x_k^{(1)}(\tau_i - 0,\varepsilon)] + R_i(x_k(\tau_i - 0,\varepsilon),\varepsilon) \end{bmatrix} \right)(t) + \varepsilon X(t) Q^+ \Big[\mathcal{J}(z_0(\cdot,c_r^*),0) + l_1[X_r(\cdot)c_k + x_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon)] + R_0(x_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) \Big],$$

$$x_{k+1}(t,\varepsilon) = X_r(t)c_k + x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon), \quad z_{k+1}(t,\varepsilon) = z_0(t,c_r^*) + x_{k+1}(t,\varepsilon),$$
$$x_0(t,\varepsilon) = x_0^{(1)}(t,\varepsilon) = 0, \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

де B_0 – ($d \times r$) – вимірна матриця, яка визначається формулою / 9 /; P_{B_0} і $P_{B_0^*}$ – ($r \times r$) і ($d \times d$) – вимірні матриці / ортопроектори які проектують R^r і R^d на нуль - простори $N(B_0)$ і $N(B_0^*)$ матриць B_0 і B_0^*, відповідно.

Розглянутий випадок $P_{B_0^*}=0\ (\mathrm{rank}\, B_0 = r)$ є критичним випадком першого порядку, так як відповідь на питання про існування розв'язку слабонелінійної крайової задачі з імпульсною дією /12/ дається після аналізу крайової задачі, яка служить для знаходження першого наближення до шуканого розв'язку.

Випадок $P_{B_0^*}\neq 0\ (\mathrm{rank}\, B_0 < r)$ називається критичним випадком другого порядку. Для нього також отримані достатні умови розв'язності і запропоновані збіжні алгоритми побудови розв'язків /§ 2.5 /. Одержані теореми добре узгоджуються з раніш відомими результатами по теорії крайових задач для звичайних диференціальних систем та узагальнюють їх на випадок наявності в системі імпульсної дії.

Як підсумок роботи наводиться / § 2.6 / загальна схема дослідження крайових задач з імпульсною дією виду /12/, яка дозволяє повністю провести ефективний аналіз таких задач, знайти умови розв'язності та побудувати сімейство їх розв'язків.

В останньому параграфі другого розділу наводиться приклад, який ілюструє основні теоретичні твердження дисертаційної роботи.

Основні положення дисертації опубліковані в наступних роботах:

1. Бойчук А.А., Хращевская Р.Ф. Слабонелинейные краевые задачи с импульсным воздействием // Школа-семинар "Разрывные динамические системы", Ужгород, 17 - 20 сент. 1991г. : Тез.докл. - Киев: О-во "Знание", 1991. - С.6.
2. Бойчук А.А., Хращевская Р.Ф. Слабонелинейные краевые задачи

НБ ім. В. Стефаника
АН України
U64665

Ав 28.942

для дифференциальных систем

// Укр. мат. журн. - 1993. - 45, №2. - С. 221-225.

3. Хращевская Р.Ф. Условия разрешимости краевых задач для дифференциальных систем с импульсным воздействием // Конф. "Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики - Вторые Боголюбовские чтения". Душанбе, 14-18 сент. 1992 г.: Тез. докл. - К., 1992. - С.167.

4. Хращевская Р.Ф. Краевые задачи для систем с импульсным воздействием // Аналитические методы исследования нелинейных дифференциальных систем. - К.: Ин-т математики АН Украины, 1992. - С.127-133.

5. Хращевская Р.Ф. Условия возникновения слабовозмущенных линейных краевых задач для систем с импульсным воздействием // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. - К.: Ин-т математики АН Украины, 1993. - С.138.

Підп. до друку 5.11.93. Формат 60х84/16. Папір друк. Офс. друк. Ум. друк. арк. 0,7. Ум. фарбо-відб. 0,7 Обл.-вид. арк. 0,93
Тираж 100 пр. Зам. 392 Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики АН України
252601 Київ 4, ГСП, вул. Терещенківська, 3