

Державний університет  
"Львівська політехніка"

На правах рукопису  
УДК 621.3.01

ЛАБЯК  
НАТАЛІЯ АНАТОЛІЇВНА

РОЗРОБКА АЛГОРИТМІВ ОБЧИСЛЕННЯ ПАРАМЕТРИЧНОЇ  
ЧУТЛИВОСТІ В ТЕОРІЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ

Спеціальність 05.09.05 - Теоретична електротехніка

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата технічних наук

Львів - 1993

46 28955

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Державному університеті "Львівська політехніка".

Науковий керівник

академік АІН України,  
дійсний член Нью-Йоркської  
Академії наук,  
доктор технічних наук,  
професор В.Й. Чабан.

Офіційні опоненти

дійсний член Нью-Йоркської  
Академії наук,  
доктор технічних наук,  
професор В.Г. Данько,  
кандидат технічних наук,  
доцент Л.А. Білий.

Провідна організація

кафедра "Електрорадіотехніки"  
Львівського державного університету.

Захист відбудеться "22 грудня" 1993р. о год.

на засіданні спеціалізованої Ради К 068.36.07 при Державному університеті "Львівська політехніка".

Відгуки на автореферат, завірені печаткою, просимо надіслати за адресою: 290646, м. Львів-13, вул. С.Бандери, 12, ауд. 114 голосного корпусу.

З дисертацією можна ознайомитися в науково-технічній бібліотеці Державного університету "Львівська політехніка" (вул. Професорська, 1).

Автореферат розіслано "22 лист" 1993р.

Вчений секретар спеціалізованої  
Ради К 068.36.07 к.т.н., доц.

В.В. Попічко

ЛННБ України ім.В.Стефаніка



00814097 (T)

Актуальність роботи. Дисертаційна робота присвячена математичному та комп'ютерному моделюванню параметричної чутливості в теорії електромагнітного поля. В теорії кіл функція чутливості разом з імпедансом та передатною функцією входить до основних характеристик кола. Що стосується теорії електромагнітного поля, то це важливе питання практично ще не розв'язане.

Функція параметричної чутливості показує вплив зміни постійних параметрів – геометричних розмірів, констант середовища, збуджуючих сигналів та ін. на вектори електромагнітного поля. В загальному випадку функцію параметричної чутливості можна розглядати як матрицю, кожен рядок якої є градієнтом компоненти вектора електромагнітного поля з фіксованою просторовою координатою у полі постійних параметрів. Розрахунок функції параметричної чутливості становить не лише глибокий теоретичний інтерес, але й має велике практичне значення, оскільки дана інформація конче потрібна в задачах оптимального проектування електротехнічних пристроїв із заданою інтенсивністю електромагнітних полів в елементах їх конструкції.

Метою роботи є побудова алгоритмів розрахунку параметричної чутливості квазістационарного електромагнітного поля для одновимірних та двовимірних просторових задач у провідному та діелектричному феромагнітних середовищах.

У відповідності до поставленої мети вирішуються такі основні завдання:

- вибір методів розрахунку;
- побудова алгоритмів розрахунку перехідної та усталеної параметричних чутливостей;
- програмна реалізація алгоритмів розрахунку;
- дослідження чутливості електромагнітного процесу до зміни постійних параметрів;
- представлення одержаних результатів у формі зручній для їх аналізу та обробка одержаних масивів даних з метою побудови графічних залежностей.

Наукова новизна. Розроблено алгоритми розрахунку усталеної параметричної чутливості квазістационарного електромагнітного поля у провідному середовищі для тороїдного шихтованого та суцільного осердь, що є прикладами одновимірної та двовимірної просторових задач. Побудована модель параметричної чутливості квазістационарного електромагнітного поля у діелектричному середовищі (феритовому тороїдному осерді). Здійснено програму

реалізацію розроблених алгоритмів. Проведено розрахунок функції параметричної чутливості, що дало змогу одержати її просторово-часовий розподіл та аналізувати чутливість електромагнітного процесу до зміни постійних параметрів.

Методи досліджень. У теоретичних дослідженнях використано основні рівняння квазістационарного електромагнітного поля, методи чисельного диференціювання та інтегрування, методи розв'язання нелінійних алгебраїчних рівнянь та систем лінійних алгебраїчних рівнянь, методи інтерполяції функцій та матричної алгебри.

Автор захищає:

1. Основні теоретичні положення та методи побудови моделей перехідної та усталеної параметричних чутливостей у провідному та діелектричному феромагнітних середовищах.

2. Алгоритми розрахунку перехідної та усталеної параметричних чутливостей для шихтованого та суцільного провідного і діелектричного феромагнітних середовищ.

3. Комп'ютерні програми розрахунку та обробки результатів.

Практична цінність роботи. Результати роботи можуть бути використані в задачах оптимального проектування електротехнічних пристроїв з заданими характеристиками електромагнітного поля, в задачах управління, а також в теорії адаптивних систем.

Реалізація результатів роботи. Робота виконана згідно програми держбюджетної теми ДБ/47-Ч Державного університету "Львівська політехніка" кафедри "Теоретична та загальна електротехніка".

Апробація роботи. Результати дисертаційної роботи доповідалися на ряді наукових конференцій та семінарів, зокрема на Всесоюзній конференції з теоретичної електротехніки (м.Вінниця, 1991р.), X Всесоюзній науково-технічній конференції "Інтелектуальні електродвигуни та економія електричної енергії" (м.Суздаль, 1991р.), науково-технічних конференціях "Моделювання та дослідження стійкості процесів" (м.Київ, 1992р., 1993р.), VII семінарі молодих вчених і спеціалістів "Перетворення та стабілізація параметрів електричної енергії" (м.Алушта, 1992р.), науково-технічній конференції професорсько-викладацького складу ЛПІ (вересень, 1992р.), Міжнародній конференції AMS'93 (м.Львів, 1993р.).

Публікації. За матеріалами дисертації опубліковано 6 робіт, 3 роботи відправлено до друку.

Структура та об'єм роботи. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, заключення, списку літератури та додатків. Матеріал викладений на 132с. машинописного тексту, містить 34

малюнки, 2 таблиці, 3 додатки, список літератури у кількості 91 найменування.

### Зміст роботи.

У вступі обґрунтована актуальність та наукова новизна роботи, сформульована мета дослідження, основні положення, що виносяться на захист, зроблено короткий аналіз можливих шляхів вирішення даної проблеми.

Перший розділ містить основні теоретичні засади дисертаційної роботи. Основні розрахункові рівняння виводяться безпосередньо з рівнянь Максвелла. Електромагнітне поле вважається квазістаціонарним. Розрахункові рівняння поля формуються відносно векторів електромагнітного поля.

Розрахункове рівняння квазістаціонарного електромагнітного поля має вигляд:

$$\partial \vec{B} / \partial t = - \nabla \times ( \gamma^{-1} \nabla \times \vec{H} ), \quad (1)$$

де  $\vec{H}$  – вектор напруженості магнітного поля;  $\vec{B}$  – вектор магнітної індукції;  $\gamma$  – матриця електропровідностей.

Значення  $\vec{B}$  та  $\vec{H}$  пов'язані залежністю:

$$\vec{H} = \nu \vec{B}, \quad (2)$$

де  $\nu$  – обернена статична магнітна проникність.

Згідно з другим рівнянням Максвелла та умовою квазістаціонарності, запишемо рівняння, що дає змогу визначити значення  $\vec{B}$  в момент часу  $t$  за відомим значенням  $\vec{H}$  в цей же момент часу.

$$\vec{B} = \gamma^{-1} (\nabla \times \vec{H}), \quad (3)$$

де  $\vec{B}$  – вектор напруженості електричного поля.

Користуючись рівняннями (1), (2), (3) можна розрахувати електромагнітне поле в замкнутому просторі, заповненому кусково-однорідним середовищем. При цьому необхідно знати початкові та крайові умови на поверхні замкнутого простору, що виділяється з навколишнього середовища, впродовж усього часу  $t$ .

Розв'язання диференціальних рівнянь електромагнітного поля у часткових похідних, одержаних після роторних перетворень правих сторін рівнянь (1), (3), проводиться чисельними методами. Просторова дискретизація нелінійних диференціальних рівнянь в часткових похідних здійснюється за методом скінченних різниць або скінченних елементів. В даній роботі розраховується параметрична чутливість

квазістаціонарного електромагнітного поля в тілі феромагнітного тороїдного осердя. Оскільки осердя має правильну геометричну форму, то перевагу надаємо методу скінчених різниць. Після просторової дискретизації перетвореного рівняння (1) одержимо (Чабан В.Й. Методи нелінійної електротехніки. - Львів:Світ, 1992):

$$\frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = \mathbf{C}_1 \mathbf{H}_0 + \mathbf{C}_2 \mathbf{H}_{Г0}, \quad (4)$$

де  $\mathbf{v}_0$ ,  $\mathbf{H}_0$  - колонки проєкцій векторів електромагнітного поля відповідно до числа вузлів просторової сітки;  $\mathbf{H}_{Г0}$  - колонка крайових умов;  $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$  - матриці просторової дискретизації.

Часову дискретизацію в залежності від жорсткості диференціальних рівнянь здійснюємо за явним чи неявним принципом.

В результаті просторової дискретизації рівняння електромагнітного поля вироджуються в систему звичайних диференціальних рівнянь, кількість яких визначається добутком числа вузлів просторової сітки на число компонентів просторового вектора електромагнітного поля в даній системі координат.

Будемо розглядати три матриці коефіцієнтів параметричної чутливості:

$$\chi = \partial \mathbf{v}_0 / \partial \lambda, \quad (5)$$

$$\xi = \partial \mathbf{H}_0 / \partial \lambda, \quad (6)$$

$$\eta = \partial \mathbf{E}_0 / \partial \lambda, \quad (7)$$

де  $\mathbf{E}_0$  - колонка проєкцій вектора напруженості електричного поля відповідно до числа вузлів просторової сітки;  $\lambda$  - колонка потійних параметрів. Значення  $\xi$  та  $\eta$  знаходимо через  $\chi$  ( $\xi = \xi(\chi)$ ,  $\eta = \eta(\chi)$ ), що впливає безпосередньо з (2), (3). Тому диференціальне рівняння параметричної чутливості формуємо відносно  $\chi$ . Його одержимо диференціюючи (4) по  $\lambda$ .

$$d\chi/dt = \mathbf{C}_1 \mathbf{N}_0 \chi + \partial \mathbf{C}_1 / \partial \lambda \mathbf{H}_0 + \partial (\mathbf{C}_2 \mathbf{H}_{Г0}) / \partial \lambda, \quad (8)$$

де  $\mathbf{N}_0$  - матриця обернених диференціальних магнітних проникностей.

Усталений процес можна одержати інтегруючи рівняння параметричної чутливості (8) аж до затухання перехідного процесу. Проте такий шлях потребує великого обсягу обчислень, в процесі розрахунку накопичуються похибки чисельного інтегрування, що може спотворити усталений процес. Тому доцільно скористатися одним із методів прискореного пошуку вимушених періодичних режимів, зокрема методом, що ґрунтується на побудові моделей чутливості до початкових умов, оскільки побудова моделі параметричної чутливості

по суті збігається з побудовою моделі чутливості до початкових умов.

Початкові умови  $x(0)$ , що безпосередньо приводять до стаціонарного процесу повинні задовольняти рівняння періодичності:

$$F(x(0)) = x(0) - x(x(0), T) = 0, \quad (9)$$

де  $x$  - деяка функція (тут  $x = \chi$ ),  $T$  - період. Це рівняння ще називають рівнянням цілі або цільовою функцією.

Рівняння цілі слід розв'язувати ітераційним методом Ньютона:

$$-F'(x(0)^k) (x(0)^{k+1} - x(0)^k) = F(x(0)^k). \quad (10)$$

Якоб'іан  $F'(x(0))$  має вигляд:

$$-F'(x(0)) = \sum (\tau) - 1, \quad (11)$$

де  $\Sigma(\tau)$  - матриця монодромії.

$$\Sigma(\tau) = \partial x(x(0), \tau) / \partial x(0). \quad (12)$$

Алгоритм розрахунку усталеної параметричної чутливості, розроблений за формулами (8)-(12), дозволяє аналізувати також перехідний процес, для цього достатньо забезпечити умову  $T \rightarrow \infty$ .

У другому розділі описана модель параметричної чутливості для одновимірної просторової задачі.

Розрахунок параметричної чутливості здійснюється для шихтованого феромагнітного осердя тороїдного трансформатора, зображеного на мал.1. Електромагнітний процес збуджується сумарною гармонічною магніторушійною силою обмоток:

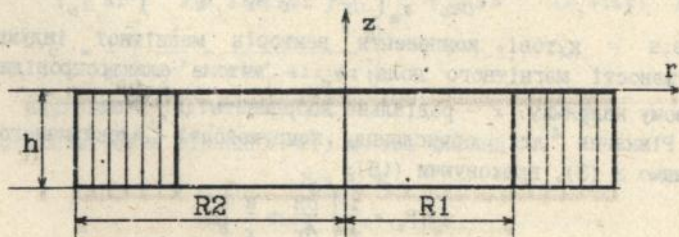
$$w i = w I_m \sin(\omega t + \varphi), \quad (13)$$

де  $w$  - число витків обмотки,  $I_m$  - амплітуда струму,  $\omega$  - кутова частота,  $\varphi$  - початкова фаза.

Крайові умови за законом повного струму матимуть вигляд:

$$H(R_1) = w i / 2\pi R_1; \quad H(R_2) = w i / 2\pi R_2, \quad (14)$$

де  $R_1, R_2$  - внутрішній та зовнішній радіуси тороїда.



Мал. 1.

В даному випадку доцільно скористатися циліндричною системою координат, оскільки це забезпечує найменшу кількість невідомих. Вектори  $\vec{H}, \vec{B}, \vec{E}$  зорієнтуємо так:

$$\vec{H} = \bar{\alpha}_0 \vec{H}_\alpha; \quad \vec{B} = \bar{\alpha}_0 \vec{B}_\alpha; \quad \vec{E} = \bar{z}_0 \vec{E}_z, \quad (15)$$

де  $\bar{\alpha}_0, \bar{z}_0$  - кутовий та аксіальний просторові орти;  $H_\alpha, B_\alpha, E_z$  - функції радіуса  $r$ .

Шихтований магнітопровід складається з шарів феро- та діаманетиків, що чергуються. Розрахунок електромагнітного поля в такому середовищі, враховуючи крайові умови на межах однорідних середовищ становить певні труднощі із-за великого обсягу обчислень. Тому плоскосмугове середовище доцільно замінити суцільним анізотропним середовищем, еквівалентним в електромагнітному відношенні першому. В результаті цього задача зведеться до одновимірної просторової.

Питомий електричний опір  $\rho$  в кутовому напрямку та обернена статична магнітна проникність еквівалентованого шихтованого осердя визначаються виходячи з крайових умов на межі розділу двох однорідних середовищ:

$$\rho = (\Delta + \Delta_0) / \Delta \rho_{fe}, \quad (16)$$

$$\nu' = (\Delta + \Delta_0) / (\Delta + \Delta_0 \nu_{fe} / \nu_0) \nu_{fe}, \quad (17)$$

де  $\Delta$  - товщина сталюого листа;  $\Delta_0$  - товщина ізоляції, причому  $\rho_{fe} = \text{const}$ ;  $\nu_{fe} = \nu_{fe}(B)$ .

Розпишемо  $\nabla \times \vec{H}$  у циліндричних координатах:

$$\nabla \times \vec{H} = \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial z} - \frac{\partial H_\alpha}{\partial z} \right] \bar{\rho}_0 + \left[ \frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right] \bar{x}_0 + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial (\rho H_\alpha)}{\partial \beta} - \frac{\partial H_\rho}{\partial \alpha} \right] \bar{z}_0. \quad (18)$$

Тоді рівняння (1) матиме вигляд:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{1}{\gamma_\alpha} \left[ \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \mathbf{H} \right], \quad (19)$$

де  $\mathbf{v}, \mathbf{H}$  - кутові компоненти векторів магнітної індукції та напруженості магнітного поля;  $\gamma_\alpha$  - питома електропровідність в кутовому напрямку;  $r$  - радіальна координата;  $t$  - час.

Рівняння <sup>⑥</sup> для обчислення напруженості електричного поля одержимо з (3), враховуючи (18):

$$\mathbf{E}_z = \frac{1}{\gamma_z} \left[ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial r} + \frac{\mathbf{H}}{r} \right], \quad (20)$$

де  $\gamma_z$  - питома електропровідність в аксіальному напрямку.

Значення  $n$  і в пов'язані виразом (2):

$$H = \nu'_\alpha B, \quad (21)$$

де  $\nu'_\alpha$  - обернена статична магнітна проникність в кутовому напрямку.

Просторову дискретизацію рівняння (19) здійснимо за методом скінченних різниць. Часткові просторові похідні замінимо скінченними виразами, одержимо:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{\gamma_\alpha} \left[ \frac{H(r-\Delta r, t) - 2H(r, t) + H(r+\Delta r, t)}{\Delta r^2} + \frac{1}{r} \frac{H(r+\Delta r, t) - H(r-\Delta r, t)}{2\Delta r} - \frac{1}{r^2} H(r, t) \right], \quad (22)$$

де  $\Delta r$  - просторовий крок,  $\Delta r = (R_2 - R_1)/(n+1)$ ,  $n$  - число вузлів просторової сітки.

Рівняння (22) в матричній формі матиме вигляд (4), де  $B'_0$ ,  $H_0$  - матриці-колонки значень проєкцій векторів  $\vec{B}$  і  $\vec{H}$  у множині  $n$  вузлів просторової сітки, причому

$$H_0 = (H_1, \dots, H_n)_t; \quad B_0 = (B_1, \dots, B_n)_t; \quad (23)$$

$H_{r0}$  -  $n+2$  -мірна колонка крайових умов:

$$H_{r0} = (H_0, 0, \dots, 0, H_{n+1}); \quad (24)$$

$C_1, C_2$  - матриці просторової дискретизації розмірністю  $n \times n$  та  $(n+2) \times n$ , причому

$$C_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline b_1 & c_1 & & \\ \hline a_2 & b_2 & c_2 & \\ \hline & \dots & \dots & \dots \\ \hline \end{array}; \quad C_2 = \text{diag}(a_1, 0, \dots, 0, c_n), \quad (25)$$

де

$$a_1 = \frac{1}{\gamma_\alpha} \left[ \frac{1}{\Delta r^2} - \frac{1}{2(R_1 + i\Delta r)\Delta r} \right]; \quad b_1 = \frac{1}{\gamma_\alpha} \left[ \frac{2}{\Delta r^2} + \frac{1}{(R_1 + i\Delta r)^2} \right];$$

$$c_1 = \frac{1}{\gamma_\alpha} \left[ \frac{1}{\Delta r^2} + \frac{1}{2(R_1 + i\Delta r)\Delta r} \right], \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (26)$$

де  $R_1$  - внутрішній радіус тороїда.

Дискретизоване рівняння (21) матиме вигляд:

$$H_0 = N'_0 B_0, \quad (27)$$

$$N'_0 = \text{diag}(\nu'_1, \dots, \nu'_n), \quad (28)$$

де значення  $\nu'_i$  знаходимо, користуючись основною кривою

намагнічування феромагнетика. Криву намагнічування апроксимуємо кубічним сплайном.

Замінюючи часткові просторові похідні скінченними виразами у (20), одержимо:

$$E = \frac{1}{\gamma_z} \left[ \frac{H(x+\Delta x, t) - H(x-\Delta x, t)}{2\Delta x} + \frac{H(x, t)}{r} \right], \quad (29)$$

Запишемо (29) в матричній формі:

$$E_0 = C_3 N_0 + C_4 N_{r0}, \quad (30)$$

де  $E_0$  - матриця-колонка значень проєкцій вектора  $\bar{E}$  у множині  $n$  вузлів просторової сітки виду (23);  $C_3, C_4$  - матриці просторової дискретизації розмірністю  $n \times n$  та  $(n+2) \times n$ , вигляд яких аналогічний вигляду матриць  $C_1, C_2$ , причому

$$\begin{aligned} a_1 &= -1/(2 \gamma_z \Delta x); & b_1 &= 1/\gamma_z (R_1 + i\Delta x); \\ c_1 &= 1/(2 \gamma_z \Delta x), \end{aligned} \quad (31)$$

Таким чином, одержуємо систему звичайних диференціальних рівнянь, яку доцільно інтегрувати за явною схемою.

Для того, щоб знайти початкові умови, що приводять до усталеного процесу, необхідно паралельно з інтегруванням рівнянь електромагнітного поля інтегрувати систему варіаційних рівнянь на інтервалі часу  $[0, T]$ .

Для знаходження матриці монодромії  $\Sigma(T)$ , продиференціюємо (4) по  $v_0(0)$ , одержимо:

$$\frac{d}{dt} \frac{d v_0(T)}{d v_0(0)} = C_1 \frac{d N_0}{d E_0} \frac{d v_0(T)}{d v_0(0)}, \quad (32)$$

тобто

$$d\Sigma / dt = C_1 N_0'' \Sigma, \quad (33)$$

де

$$N_0'' = \text{diag} (v_1'', \dots, v_n''), \quad (34)$$

$$v_i'' = \partial N_i / \partial v_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (35)$$

де  $N_0''$  - матриця, елементами якої фігурують обернені диференціальні магнітні проникності. При  $t=0$  згідно (9)  $\Sigma(0)=1$ , тобто початкові умови для  $\Sigma(t)$  ← одинична матриця розмірністю  $n \times n$ .

Якобіан (11), де  $x = v_0$ , та значення колонки  $F(v_0(0))$ , обчислені згідно (9) після інтегрування (4) на інтервалі  $[0, T]$ , підставляємо в ітераційну формулу Ньютона (10). Одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яку розв'язуємо методом Гаусса.

Користуючись ітераційним методом Ньютона, маємо змогу знайти початкові умови, що виключають перехідну реакцію, з наперед заданою точністю.

Таким чином, знайшовши початкові умови стаціонарного процесу  $v_0(0)$  та значення матриці монодромії  $\Sigma(T)$  в кінці стаціонарного процесу, можна приступити до розрахунку усталеної параметричної чутливості. Продиференціювавши (4), (27), (30) по  $\lambda$  та враховуючи (5), (6), (7), одержимо:

$$\xi = N_0'' x, \quad (36)$$

$$\eta = C_3 \xi + \partial C_3 / \partial \lambda N_0 + \partial (C_4 N_{r0}) / \partial \lambda, \quad (37)$$

$$dx/dt = C_1 N_0'' x + \partial C_1 / \partial \lambda N_0 + \partial (C_2 N_{r0}) / \partial \lambda. \quad (38)$$

Структурний вигляд матриць  $\partial C_1 / \partial \lambda$  та  $\partial C_3 / \partial \lambda$  аналогічний структурному вигляду матриць  $C_1$  та  $C_3$ , якщо їх елементи замінити відповідними значеннями зі штрихами, одержаними в результаті диференціювання (26) та (31) по  $\lambda$ .

Рівняння параметричної чутливості (38) інтегруємо за явною схемою. Паралельно з (38) інтегруємо рівняння електромагнітного поля (4), щоб знайти елементи матриці обернених диференціальних магнітних проникностей, яка використовується при обчисленні параметричної чутливості  $x$ .

Безітераційна формула Ньютона, за допомогою якої розв'язуємо рівняння періодичності, є окремим випадком (10) ( $x = x$ ):

$$-F'(\chi(0)^k) \chi(0)^{k+1} = F(\chi(0)^k), \quad (39)$$

оскільки рівняння (38) лінійне.

Зіставляючи рівняння (33) та (38), приходимо до висновку, що (33) є окремим випадком (38). А точніше, (33) є однорідним рівнянням (38), тому матриці монодромії обох рівнянь збігаються. Тому при розрахунку усталеної параметричної чутливості матрицю монодромії обчислювати не треба, оскільки вона відома з розрахунку усталеного електромагнітного процесу. Таким чином, відпадає потреба в розв'язанні системи додаткових варіаційних рівнянь.

У третьому розділі описана модель параметричної чутливості для двовимірної просторової задачі.

Розрахунок параметричної чутливості здійснений для тороїдного суцільного осердя, зображеного на тому ж мал.1. Ця задача не має практичної цінності, вона лише ілюструє розрахунок параметричної чутливості у випадку двовимірної просторової задачі.

Згідно з законом повного струму крайові умови мають вигляд:

$$H(R_1, z) = wi/2\pi R_1; \quad H(R_2, z) = wi/2\pi R_2; \quad (40)$$

$$H(0, r) = H(r, h) = wi/2\pi r,$$

де  $h$  - аксіальний розмір перерізу тороїда;  $r, z$  - радіальна та аксіальна координати.

Вектори електромагнітного поля у циліндричних координатах зорієнтовано так:

$$\vec{B} = \vec{\alpha}_0 B_\alpha, \quad \vec{H} = \vec{\alpha}_0 H_\alpha, \quad \vec{E} = \vec{i}_0 E_r + \vec{z}_0 E_z. \quad (41)$$

Рівняння квазістационарного електромагнітного поля (1), враховуючи (18) та (41), набуває вигляду:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\gamma_r} \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} + \frac{1}{\gamma_z} \left[ \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} - \frac{H}{r^2} \right], \quad (42)$$

де  $\gamma_z$  і  $\gamma_r$  - значення питомих електропровідностей в аксіальному та радіальному напрямках.

Значення  $n$  і  $v$ , пов'язані виразом (21).

Рівняння для проекцій вектора напруженості електричного поля (3), враховуючи (18) та (41), мають вигляд:

$$E_r = -\frac{1}{\gamma_r} \frac{\partial H}{\partial z}, \quad E_z = \frac{1}{\gamma_z} \left[ \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{H}{r} \right]. \quad (43)$$

Зважаючи на просторову симетрію, область інтегрування обмежуємо півпростором поперечного перерізу. Крайову умову  $n(h/2, r)$  знайдемо з умови симетрії  $\partial n / \partial z = 0$ .

Просторову дискретизацію (42) здійснюємо за методом скінчених різниць.

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_0}{\partial t} = & \frac{1}{\gamma_z} \left[ \left( \frac{1}{\Delta r^2} - \frac{1}{2r\Delta r} \right) H(r-\Delta r, z, t) - \left( \frac{2}{\Delta r^2} + \frac{1}{r^2} \right) H(r, z, t) + \right. \\ & \left. + \left( \frac{1}{\Delta r^2} + \frac{1}{2r\Delta r} \right) H(r+\Delta r, z, t) \right] + \frac{1}{\gamma_r} \left[ \frac{1}{\Delta z^2} H(r, z-\Delta z, t) - \right. \\ & \left. - \frac{2}{\Delta z^2} H(r, z, t) + \frac{1}{\Delta z^2} H(r, z+\Delta z, t) \right]. \quad (44) \end{aligned}$$

Дискретизоване рівняння (44) в матричній формі матиме вигляд (4). Матриці  $V_0$  та  $H_0$  розгортаємо в колонки виду (23), тоді колонка

$$H_{r0} = (H(R_1, z), H(0, r_1), \dots, H(0, r_1), H(R_2, z)), \quad (45)$$

де  $r_1$  - біжучий радіус. Матриці просторової дискретизації  $C_1$  та  $C_2$  відповідно ускладнюються.

Дискретизоване рівняння (21) матиме вигляд (27).

Дискретизуючи (43) за методом скінчених різниць, одержимо:

$$E_{Oz} = \frac{1}{r} \left[ -\frac{1}{2\Delta r} H(r-\Delta r, z, t) + \frac{1}{r} H(r, z, t) + \frac{1}{2\Delta r} H(r+\Delta r, z, t) \right]; \quad (46)$$

$$E_{Or} = \frac{1}{r} \left[ -\frac{1}{2\Delta z} H(r, z-\Delta z, t) + \frac{1}{2\Delta z} H(r, z+\Delta z, t) \right]. \quad (47)$$

Дискретизовані рівняння (46), (47) у матричній формі матимуть вигляд:

$$E_{Oz} = C_{3z} H_0 + C_{4z} H_{10}; \quad (48)$$

$$E_{Or} = C_{3r} H_0 + C_{4r} H_{10}; \quad (49)$$

де  $E_{Oz}$ ,  $E_{Or}$  - колонки вигляду (23);  $C_{3z}$ ,  $C_{3r}$ ,  $C_{4z}$ ,  $C_{4r}$  - матриці просторової дискретизації.

Систему звичайних диференціальних рівнянь (38) інтегруємо за явною та неявною схемами Ейлера. Нелінійні рівняння на кожному кроці інтегрування в останньому випадку розв'язуються за допомогою ітераційної формули Ньютона.

У четвертому розділі описана модель параметричної чутливості квазістационарного електромагнітного поля феритового осердя (мал.1). Крайові умови мають вигляд (14).

Вектори електромагнітного поля у циліндричній системі координат зорієнтовані згідно з (41).

Оскільки ферит ізолятор ( $\gamma=0$ ), то перше рівняння Максвелла для нього матиме вигляд:

$$\nabla \times \vec{H} = 0. \quad (50)$$

Враховуючи (18) та (41), запишемо рівняння (50):

$$\frac{\partial H_\alpha}{\partial z} \frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r H_\alpha)}{\partial r} \frac{z_0}{z_0} = 0. \quad (51)$$

Рівняння (51) розпадається на два рівняння:

$$\partial H / \partial z = 0; \quad H/r + \partial H / \partial r = 0, \quad (52)$$

перше з яких свідчить, що  $H = f(z)$ , а друге має аналітичний розв'язок:

$$H(r, t) = w I_0 \sin(\omega t + \varphi) / (2\pi r). \quad (53)$$

Значення магнітної індукції знаходимо за основною кривою намагнічування:

$$B(r, t) = \mu'(r, t) H(r, t). \quad (54)$$

де  $\mu'(r, t)$  - статична магнітна проникність ферита.

Оскільки ферит - ізолятор, то обчислення параметричних чутливостей  $\partial B / \partial \lambda$  не становить практичного інтересу.

Диференціюючи (53) і (54) по  $\lambda$  одержимо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(r,t)}{\partial \lambda} &= \frac{\partial(I_w)}{\partial \lambda} \sin(\omega t + \varphi) / (2\pi r) + \\ &\frac{\partial(1/r)}{\partial \lambda} I_w \sin(\omega t + \varphi) / (2\pi) + \\ &\frac{\partial(\omega t + \varphi)}{\partial \lambda} I_w \cos(\omega t + \varphi) / (2\pi r); \end{aligned} \quad (55)$$

$$\frac{\partial B(r,t)}{\partial \lambda} = \mu''(r,t) \frac{\partial H(r,t)}{\partial \lambda} + \frac{\partial \mu''}{\partial \lambda} H(r,t), \quad (56)$$

де  $\mu''(r,t)$  - диференціальна магнітна проникність

$$\mu''(r,t) = \frac{\partial B(r,t)}{\partial H(r,t)}. \quad (57)$$

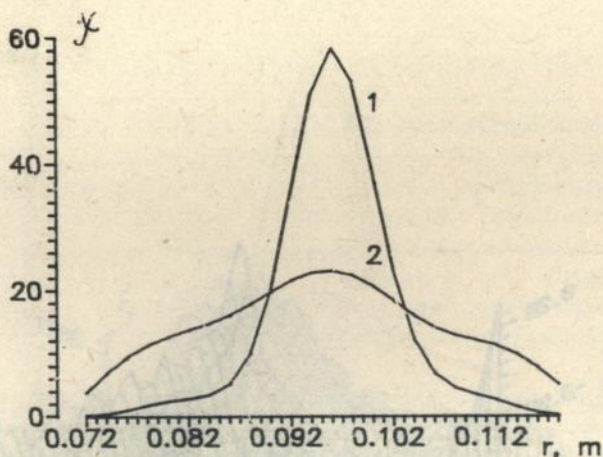
Для оцінки розподілу функцій параметричних чутливостей в просторі у всіх задачах користуємося середньоквадратичними значеннями функцій за часовий період.

Програми розрахунку параметричних чутливостей для всіх просторових задач написані на алгоритмічній мові Паскаль.

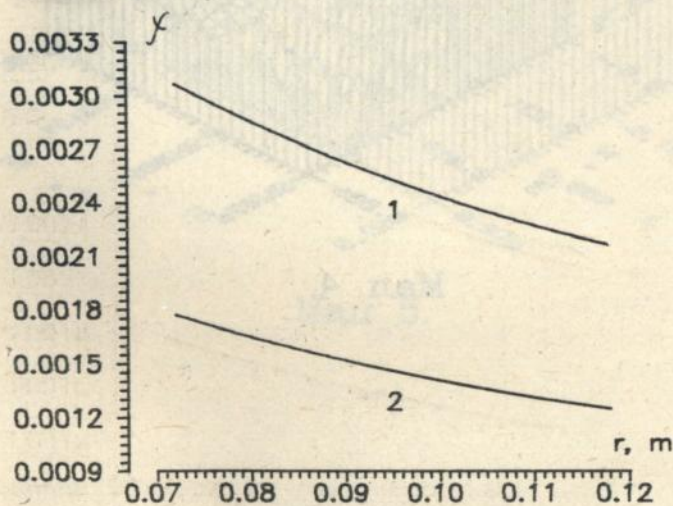
Розрахунок параметричної чутливості електромагнітного процесу здійснювався за такими постійними параметрами: внутрішнім радіусом тороїда  $R_1$ , зовнішнім радіусом тороїда  $R_2$ , аксіальним розміром тороїда  $h$ , числом витків обмотки  $w$ , маркою сталі (ферита), питомою електропровідністю, амплітудою, частотою та початковою фазою струму.

Розрахунок здійснювався на комп'ютері ІВМ РС 386 в системі програмування turbo PASCAL 6.0. Текстові файли опрацьовані за допомогою системи відображення інформації "Grapher".

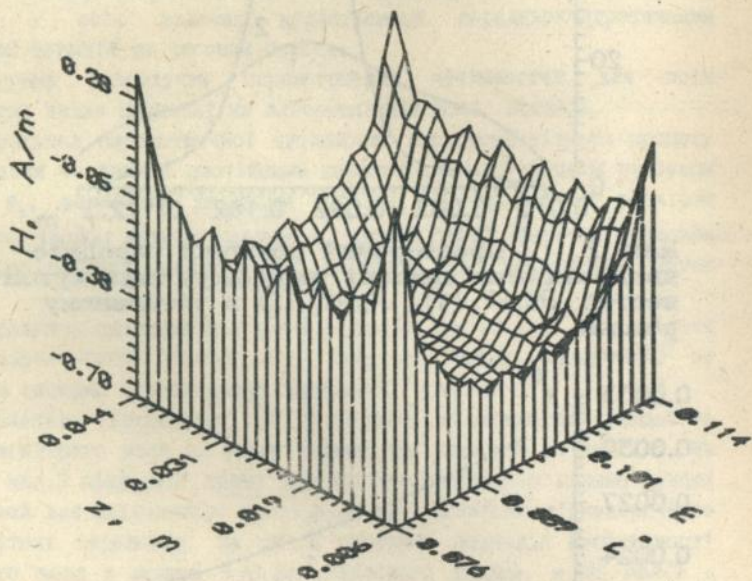
Результати розрахунку, що дозволяють аналізувати чутливість електромагнітного поля до зміни параметрів показано на мал.2-5. На мал.2 та мал.3 приведено криві просторового розподілу параметричних чутливостей для шихтованого провідного та суцільного діелектричного феромагнітних середовищ. На мал.4 показано розподіл напруженості магнітного поля в момент  $t=0.2c$  усталеного режиму, а на мал.5 - просторовий розподіл середньоквадратичних значень параметричної чутливості  $\partial H/\partial \lambda$  в усталеному режимі.



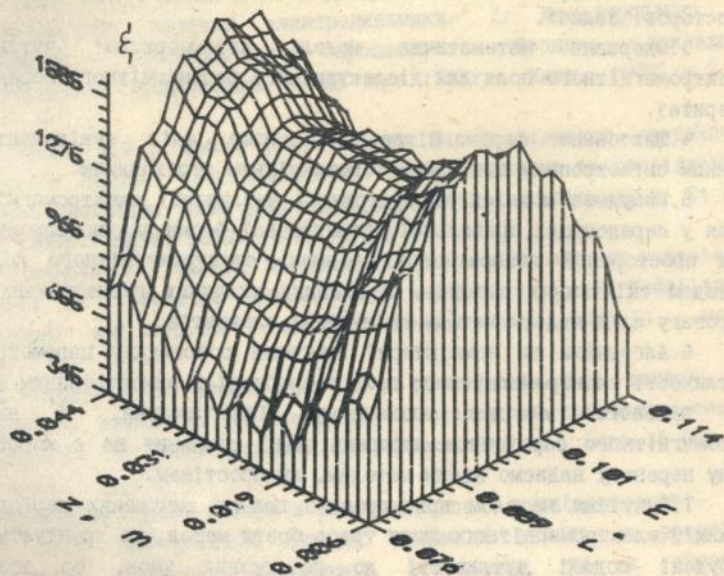
Мал. 2. Просторовий розподіл середньоквадратичних значень параметричних чутливостей  $\partial V/\partial R_1$  (1),  $\partial V/\partial R_2$  (2) в усталеному режимі.



Мал. 3. Просторовий розподіл параметричних чутливостей  $\partial V/\partial \omega$  (1)  $\partial V/\partial \omega$  (2) в усталеному режимі при  $t=0.2$  с.



Мал 4.



Мал 5.

ОСНОВНІ ВИСНОВКИ.

1. Для успішного використання методів оптимального проектування у просторових задачах електродинаміки необхідно знати параметричні чутливості електромагнітного поля (в полі постійних параметрів).

2. В результаті проведених досліджень одержані математичні моделі перехідної та усталеної параметричних чутливостей електромагнітного поля для шихтованого та суцільного феромагнітних провідних середовищ, що ілюструють одновимірну та двовимірну просторові задачі.

3. Одержана математична модель параметричної чутливості електромагнітного поля для діелектричного феромагнітного середовища (ферита).

4. Шихтоване феромагнітне середовище слід еквівалентувати деяким анізотропним суцільним феромагнітним середовищем.

5. Побудова моделей параметричної чутливості електромагнітного поля у середовищах правильної геометричної форми значно спрощується при просторовій дискретизації рівнянь електромагнітного поля за методом скінченних різниць. У випадку складних геометричних форм перевагу слід надати методу скінченних елементів.

6. Алгоритми та комп'ютерні програми розрахунку параметричної чутливості електромагнітного поля розроблені з використанням явного та неявного методів чисельного інтегрування. У випадку феромагнітного середовища диференціальні рівняння не є жорсткими, тому перевагу надаємо явним методам, як простішим.

7. Супутним методом прискореного пошуку вимушених періодичних режимів електромагнітного поля треба брати метод, що ґрунтується на побудові моделі чутливості до початкових умов, що дозволяє використати його матрицю монодромії при розрахунку усталеної параметричної чутливості.

8. Для зручності в користуванні параметричними чутливостями електромагнітного поля за тим чи іншим постійним параметром доцільно використовувати їх середньоквадратичне значення за часовий період.

9. Розрахунок параметричної чутливості електромагнітного поля у феритових середовищах значно спрощується і в багатьох практичних задачах дозволяє користуватись аналітичними розв'язками.

10. Розроблені програми розрахунку параметричної чутливості електромагнітного поля мають сервісне забезпечення для виводу на дисплей та на друк просторово-часового розподілу результатів, що

значно спрощує їх наступний аналіз.

За матеріалами дисертації опубліковано наступні роботи:

1. Чабан В.И., Лабяк Н.А. Модель чувствительности электромагнитного поля в проводящей среде. // Изв. высших учебных заведений. электромеханика. - 1991. - №8. - с.39-40.

2. Чабан В.И., Лабяк Н.А. Расчет установившейся параметрической чувствительности квазистационарного электромагнитного поля. // электромеханические и полупроводниковые преобразователи электрической энергии. Сборник научных трудов. - К., 1992. - с.26-30.

3. Чабан В.И., Лабяк Н.А. Моделирование физических процессов в пространственных задачах электродинамики. // Моделирование и исследование устойчивости процессов. Тезисы докладов республиканской конференции 26-28 мая 1992г. - Киев, 1992. - ч.2. - с.61.

4. Чабан В.И., Лабяк Н.А., Мунем З. Дослідження статичної стійкості в задачах електромеханіки. // Моделювання та дослідження стійкості процесів. Тези доповідей української конференції, 24-28 травня 1993р. - Київ, 1993. - ч.2. - с.56-57.

5. Tchaban V., Labiak N. Mathematical modelling of transient processes of induction motors with massive rotor. // Modelling Measurement and Control. - A, AMSE Press, 1993. - Vol.51 - N4. - p.37-41.

6. Tchaban V., Kharchenko G., Kovivtchak Y., Labiak N. Mathematical modelling of rotary oscillations of turbogenerators. // Summaries of International Conference AMS'93. Sept.30-Oct.2, 1993, Lviv. - p.97.

Особистий внесок автора в роботи написані у співавторстві:

В усіх перелічених працях приймала участь у розробці математичних моделей, алгоритмів розрахунку та є автором комп'ютерних програм.

*Л. Чабан*

Підп. до друку 19.11.93. Формат 60x84<sup>I</sup>/16  
Папір друк. № 2. Обс. друк. Умовн. друк. арк. 122  
Умовн. фарб.-відб. 125 Умовн. видав. арк. 118  
Тираж 100 прим. Зам. 237. Безплатно

ДУЛП 290646 Львів-13, Ст.Бандери, 12

Дільниця оперативного друку ДУЛП  
Львів, вул. Городецька, 286

464670

AB 28.955