Український державний педагогічний університет
ім. М.П.Драгоманова

На правах рукопису

Листопад Володимир Васильович

Оцінки монотонних і комонотонних наближень диференційовних функцій

01.01.01 - математичний аналіз

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ-1993

Роботу виконано на кафедрі математичного аналізу Українського державного педагогічного університету ім.М.П.Драгоманова

Науковий керівник - доктор фізико-математичних наук
Шевчук І.О.

Офіційні опоненти - доктор фізико-математичних наук
Коляда В.І.
кандидат фізико-математичних наук
Назаренко М.О.

Провідна установа - Дніпропетровський державний університет

Захист дисертації відбудеться "8" лютого 1994 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої ради Д 016.50.01 при Інституті математики АН України за адресою:

252601 Київ 4, ГСП, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці інституту.

Автореферат розіслано "31" грудня 1993 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради ГУСАК Д.В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ.

Актуальність теми. Задача наближення функції многочленом, який зберігає певні властивості функції (наприклад обоє зростають) бере свій початок від П.Л.Чебишова. Він побудував монотонний на $I:=[-1,1]$ алгебраїчний многочлен вигляду

$$p_n(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

з найменшою рівномірною нормою.

Останні 25 років закордонними та вітчизняними математиками інтенсивно досліджувалися питання наближення монотонних функцій монотонними многочленами, опуклих - опуклими, додатніх - додатніми, кусково-монотонних - комонотонними з ними многочленами і ін., тобто питання так званої constrained-апроксимації, та їх зв'язок з класичним наближенням без обмежень, тобто так званою unconstrained-апроксимацією.

Робота пов'язана з наближенням монотонних і кусково-монотонних (тобто змінюючих знак монотонності по наперед заданій послідовності точок) функцій комонотонними з ними многочленами, зокрема доведення прямих поточкових оцінок для кусково-монотонної аппроксимації двічі диференційовних функцій і прямих оцінок Джексонівського типу для монотонної апроксимації диференційовних функцій, гладкість яких погіршується на кінцях відрізка I; встановлення конструктивної характеристики цих класів функцій.

На сьогодні ця тематика актуальна і інтенсивно розвивається у ряді монографій та статей вітчизняних і закордонних математиків, див. монографії Ditzian Z., Totik V., Шевчука І.О., роботи G.G.Lorentz, K.L.Zeller, R.A.DeVore, D.J.Newman, E.Passow, L.Raymon, J.A.Roulier, A.C.Шведова, R.K.Beatson, G.L.Iliev, X.M.Yu, D.Leviatan, І.О.Шевчука і ін.

Мета роботи. Встановлення прямих поточкових оцінок апроксимації кусково-монотонних двічі диференційовних на I функцій комонотонними з ними многочленами і конструктивної характеристики класів цих функцій; доведення прямих оцінок Джексонівського типу для монотонних диференційовних функцій з гладкістю, що погіршується на кінцях відрізка, а також встановлення конструктивної характеристики класів таких функцій.

Методика дослідження. В роботі використані методи теорії інтерполювання функцій та методи теорії наближення, зокрема поліноміальні ядра типу Джексона, Дзядика, нерівності Уітні, Маршу, зображення Поповічіу, класичні прямі та обернені теореми, теореми спільного наближення функції та її похідних і ін.

Новизна результатів та їх наукова цінність. Основні результати дисертації є новими. Іх зміст полягає в наступному:

- отримана пряма рівномірна оцінка наближення неспадними многочленами диференційовної неспадної на відрізку функції для гладкості більше 2;
- для гладкості два така ж оцінка доведена при додатковій умові;
- зокрема, встановлена конструктивна характеристика монотонного рівномірного наближення диференційовних функцій;
- доведено, що класичні прямі поточкові оцінки апроксимації без обмежень зберігаються, якщо кусково-монотонну диференційовну функцію наближати комонотонним з нею многочленом;
- зокрема, встановлена контруктивна характеристика кусково-монотонного поточкового наближення диференційовних функцій.

Результати дисертації мають теоретичний і практичний характер і можуть бути використані як в задачах теорії функцій, так і в обчислювальній математиці.

Апробація роботи. Результати дисертації доповідались на республіканській науковій конференції "Екстремальні задачі теорії наближень і їх застосування" (м. Київ 1990 р.), на наукових конференціях викладачів КДПІ ім. М.П.Драгоманова (1992, 1993 рр.), на школі "Теорія функцій. Диференціальні рівняння в математичному моделюванні." (м. Воронеж, 1993 р.), на наукових семінарах відділу теорії функцій Інституту математики АН України.

Публікації. По темі дисертації опубліковано 6 робіт, список яких наведено в кінці автореферату.

Структура і об'єм роботи. Дисертація обсягом 75 сторінок машинопису. Складається із вступу, двох розділів та списку літератури, що містить 50 найменувань.

ЗМІСТ РОБОТИ.

Нехай $I:=[-1,1]$,

$C(I)$ - простір неперервних на I дійсних функцій з рівномірною нормою $\|f\|:=\max\limits_{x\in I}|f(x)|$; $C^r(I):=\{f:f^{(r)}\in C(I)\}$, $r\in N$; $C^0(I):=C(I)$;
P_n - простір алгебраїчних многочленів степені $\leq n$, $n\in N$.

Задачу найкращого наближення функції многочленами з умовою монотонності вперше розглядав П.Л.Чебишов. Він побудував монотонний на I многочлен $p_n(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ з найменшою нормою.

Позначимо Δ^1 - множину монотонних неперервних на I функцій. Для визначеності будемо вважати, що Δ^1 множина неспадних неперервних на I функцій.

Позначимо

$E_n(f):=\inf\limits_{p\in P_n}\|f-p\|$ - величину найкращого рівномірного наближення функції $f\in C(I)$ алгебраїчними многочленами $p\in P_n$;
$E_n^{(1)}(f):=\inf\limits_{p\in P_n\cap\Delta^1}\|f-p\|$ - величину найкращого рівномірного наближення функції $f\in\Delta^1$ алгебраїчними многочленами $p\in P_n\cap\Delta^1$.

Очевидно, що завжди $E_n(f)\leq E_n^{(1)}(f)$. Виникає питання, чи вірна протилежна нерівність. Виявляється, що ні. А саме, Г.Г.Лоренц і К.Л.Целлер в 1968 році зокрема довели, що існує неспадна на I функція f така, що

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{E_n^{(1)}(f)}{E_n(f)} = \infty .$$

Таким чином з результату Г.Г.Лоренца і К.Л.Целлера випливає, що нерівність $E_n^{(1)}(f)\leqslant cE_n(f)$, взагалі кажучи, неправильна. Тим не менш має місце

Теорема А. Нехай $\alpha>0$, $\alpha\neq2$, $f\in\Delta^1$. Якщо $E_n(f)\leqslant n^{-\alpha}$, для всіх $n\geqslant\alpha$, то

$$E_n^{(1)}(f)\leqslant c(\alpha)\,\frac{1}{n^\alpha}\,, \text{ для всіх } n\geqslant\alpha.$$

Тобто все таки $E_n^{(1)}(f)$ і $E_n(f)$ в такій формі пов'язані між собою.

Доведення теореми А для $\alpha>2$ і є основним результатом першого розділу.

Для випадку $0<\alpha<2$ ця теорема випливає з відомих результатів Д.Левіатана, К.М.Ю та ін. Для випадку $\alpha=2$ твердженя теореми А не вірне. Відповідний контрприклад побудований К.А.Копотуном.

Раніше аналогічний результат був отриманий для наближення з вагою $\rho_n^{-\alpha}(x)$, де $\rho_n:=\rho_n(x):=\frac{1}{n^2}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}$, $n\in N$, $x\in I$.

А саме, позначимо

$$G_{n,\alpha}(f):= \inf_{p\in P_n}\left\|\frac{f-p}{\rho_n^\alpha}\right\|$$

$$\left(G_{n,\alpha}^{(1)}(f):= \inf_{p\in P_n\cap\Delta^1}\left\|\frac{f-p}{\rho_n^\alpha}\right\|\right) -$$

величину найкращого рівномірного наближення функції $f\in C(I)$ $(f\in\Delta^1)$ многочленами $p\in P_n$ $(p\in P_n\cap\Delta^1)$ з вагою ρ_n^α.

Із результатів Р.К.Бітсона $(0<\alpha<1)$, Р.А.ДеВора і К.М.Ю

($1\leq\alpha<2$), І.А.Шевчука ($\alpha\geq2$), випливає таке твердження. Нехай $\alpha>0$, $f\in\Delta^1$. Якщо $G_{n,\alpha}(f)\leq1$ для всіх $n\geq\alpha$, то $G^{(1)}_{n,\alpha}(f)\leq c(\alpha)$, для всіх $n\geq\alpha$.

Виникає питання про отримання аналогу цього твердження для кусково-монотонного наближення.

Нехай $M_s=\{-1=y_s<y_{s-1}<\ldots<y_1<y_0=1\}$ – множина всіх можливих впорядкованих наборів із $s+1$ різних точок y_i відрізка I. Для кожного фіксованого набору $Y\in M_s$ позначимо $\Delta(Y)$ – множину дійсних функцій $f\in C(I)$ таких, що f не спадає на $[y_{i+1},y_i]$, якщо i – парне і f не зростає на $[y_{i+1},y_i]$, якщо i – непарне (тобто $\Delta(Y)$ – множина кусково-монотонних функцій).
Зокрема, для диференційовних на I функцій f

$$\Delta(Y)=\left\{f: f'(x)\prod_{i=1}^{s-1}(x-y_i)\geq0,\ x\in I\right\}.$$

Дві функції із $\Delta(Y)$ називають комонотонними між собою.

Оскільки випадок $s=1$ вже досліджений, то далі вважатимемо $s>1$.

Позначимо

$G^{(*)}_{n,\alpha}(f):=\inf\limits_{p\in\Delta(Y)\cap P_n}\left\|\dfrac{f-p}{\rho_n^{\alpha}}\right\|$ – величину найкращого рівномірного наближення функції $f\in\Delta(Y)$ многочленами $p\in P_n\cap\Delta(Y)$ з вагою ρ_n^{α}.

Справедлива

Теорема Б. Нехай $\alpha>0$, $\alpha\neq2$, $f\in\Delta(Y)$. Якщо $G_{n,\alpha}(f)\leq1$ для всіх $n\geq\alpha$, то $G^{(*)}_{n,\alpha}(f)\leq c(\alpha,Y)$, для всіх $n\geq\alpha$.

Доведення теореми Б для випадку $\alpha>2$ є основним результатом другого розділу.

Для $0<\alpha<2$, ця теорема також правильна, що доведено, але ще не опубліковано Г.А.Дзюбенко. Для $\alpha=2$ питання про істинність теореми Б поки не з'ясоване.

Теорема А (для $\alpha>2$) доведена автором без співавторів, теорема Б (для $\alpha>2$) доведена автором спільно з Г.А.Дзюбенко та І.О.Шевчуком.

Розглянемо детальніше результати кожного розділу.

Будемо писати $\varphi\in\Phi^k$, якщо $k\in N$, $\varphi(0+)=0$, $\varphi(t)$-неспадна, а $t^{-k}\varphi(t)$- незростаюча на $(0,\infty)$.

Позначимо

$$\sigma_h^k(f,x)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}f(x+ih), \qquad x,\ (x+kh)\in I, \ -$$

к-у різницю функції f в точці x з кроком $h>0$;

$d:=d(h,x):=h\sqrt{1-x^2}+h^2$, $x\in I$, $h>0$.

Означення 1.1. Позначимо через B^r, $r\in N$, клас функцій f у яких $(r-1)$ похідна локально-абсолютно неперервна на $(-1,1)$, а $f^{(r)}(x)$ задовольняє нерівність

$$|f^{(r)}(x)(1-x^2)^{r\backslash 2}|\leq 1$$

майже скрізь на I.

Означення 1.2. Позначимо через $B^rH_k^{\varphi}$, $k\in N$, $(r+1)\in N$, $\varphi\in\Phi^k$- клас r разів диференційовних на $(-1,1)$ функцій $f\in C(I)$ таких, що

$$|(1+x)^{r\backslash 2}(1-x-kd)^{r\backslash 2}\,\sigma_d^k(f^{(r)},x)|\leq\varphi(h), \qquad (1.1)$$

для всіх $x\in I$, $h>0$ і $[x,x+kd]\subseteq(-1,1)$.

В апроксимації без обмежень (unconstrained) відомі такі прямі і обернені оцінки наближення функцій $f\in B^rH_k^{\varphi}$ (див. Ditzian Z., Totik V. або монографію І.О.Шевчука):

якщо $f\in B^rH_k^{\varphi}$, то

$$E_n(f)\leq\frac{c}{n^r}\varphi\left(\frac{1}{n}\right),\ n\geq k+r-1,\ c=c(k,r); \qquad (1.2)$$

якщо

$$E_n(f)\leq\frac{1}{n^r}\varphi\left(\frac{1}{n}\right),\ n\geq k+r-1, \qquad (1.3)$$

і виконується умова Барі-Стечкіна

$$\int_0^t r\,\frac{1}{u}\varphi(u)du + t^k\int_t^1 \frac{1}{u^{k+1}}\varphi(u)du \leqslant a\varphi(t),\ a=\mathrm{const},\ 0<t<1\backslash 2,$$

то $f\in B^rH_k^{c\varphi}$, $c=c(k,r)=\mathrm{const}$. (1.4)

В першому розділі досліджується істинність наступного

Судження 1.1. Якщо функція $f=f(x)$ не спадає на I і $f\in B^rH_k^{\varphi}$, то

$$E_n^{(1)}(f)\leqslant \frac{c}{n^r}\varphi\left(\frac{1}{n}\right),\ n\geqslant k+r-1,\ c=c(k,r),\ n\in N.$$

Для $r=0$, $k=1$, 2 правильність судження 1.1 доведена Д.Левіатаном, для $r=0$, $k=3,4,\ldots$ судження 1.1 взагалі кажучи, невірне, що доведено О.С.Шведовим. Із результата Д.Левіатана випливає правильність судження 1.1 для $r=1$, $k=1$. Випадок $r=1$, $k>1$ залишається недослідженим.

У розділі I доведені наступні теореми 1.2 і 1.3.

Теорема 1.2 Для $r\geqslant 3$ і $k\in N$ судження 1.1 істинне.

Теорема 1.3 Якщо $k\in N$ і $f\in B^2H_k^{\varphi}$ то

$$E_n^{(1)}(f)\leqslant \frac{c}{n^2}\int_0^{1\backslash n}\frac{\varphi(u)}{u}du,\ n\geqslant k+1,\ c=c(k).$$

Наслідком теорем 1.2 і 1.3, результатів Д.Левіатана ($0<\alpha<2$) і оберненої теореми (1.3)-(1.4) є

Теорема 1.4. Нехай $\alpha>0$, $\alpha\neq 2$, $\beta\in(0,1]$, $(r+1)\in N$, $r+\beta=\alpha$.

Умова

$$|(1+x)^{r\backslash 2}(1-x-kd)^{r\backslash 2}\sigma_d^k(f^{(r)},x)|=O(h^{\beta}),\ h\to 0$$

необхідна і достатня для того, щоб

$$E_n^{(1)}(f) = O(n^{-\alpha}),\ n\to\infty.$$

Теорема А є також наслідком теорем 1.2, 1.3 та прямих і обернених оцінок (1.2), (1.3), (1.4) апроксимації без обмежень.

Наслідком (для $r>2$) теорем 1.2 і 1.3 є також

<u>Теорема 1.5</u>. Якщо $f\in\Delta^1\cap B^r$ то $E_n^{(1)}(f)\leq \frac{c}{n^r}$, $n\geq r-1$, $c=c(r)$, $n\in N$.

Для $r=1,2$ теорема 1.5 раніше доведена К.М.Ю і Д.Левіатаном, а для $r>2$ - Г.А.Дзюбенко, І.А.Шевчуком і автором.

В другому розділі досліджується питання про збереження прямих оцінок аппроксимації без обмежень при наближенні кусково монотонних двічі і більше диференційовних на відрізку I функцій f комонотонними з f многочленами.

У вступі до розділу викладена історія питання і відомі на сьогодні оцінки для комонотонного наближення. Цими питаннями за останні 25 років займалися Д.Ж.Ньюмен, Е.Пассов, Л.Раймон, Г.А.Ілієв, А.С.Шведов, К.М.Ю, Р.К.Бітсон, Д.Левіатан, Ж.А.Роулер і ін.

Зафіксуємо набір $Y\in M_s$. Позначимо

$P_n(Y):=P_n\cap\Delta(Y)$;

$E_n^*(f) := \inf\limits_{p\,\in P_n(Y)}\|f - p\|$ -величину найкращого рівномірного наближення функції $f\in\Delta(Y)$ многочленом $p\in P_n(Y)$.

В роботах (1972-1974 рр.) Д.Ж.Ньюмена, Е.Пассова, Л.Раймона доведено нерівність

$$E_n^*(f) \leq B_Y\,\omega_1\left(f,\ \frac{1}{n}\right),\ n\in N, \tag{2.1}$$

в якій $\omega_1(f,t)$ - модуль неперервності функції f, а стала B_Y залежить тільки від Y. Г.А.Ілієв (1978 р.) довів, що постійну B_Y в (2.1) можна замінити постійною B_s - яка залежить тільки від s.

О.С.Шведов (1981 р.)(див. також роботу К.М.Ю (1988 р.)) підсилили оцінку (2.1) замінивши в ній перший модуль неперервності $\omega_1(f,t)$ другим модулем неперервності $\omega_2(f,t)$

тобто ними доведено нерівність

$$E_n^*(f) \leqslant B_Y\, \omega_2\Big(f, \frac{1}{n}\Big), \; n\in N, \tag{2.2}$$

Із (2.2) випливає оцінка

$$E_n^*(f) \leqslant \frac{B_Y}{n}\, \omega_1\Big(f', \frac{1}{n}\Big), \; n\in N, \tag{2.3}$$

якщо $f\in C^1(I)\cap\Delta(Y)$. Як і в (2.1) постійну B_Y в (2.3) можна замінити постійною B_s. Це зробилим Р.К.Бітсон, Д.Левіатан в 1983 р.

Для гладкості більше два були відомі дві оцінки Е.Пассова, Л.Раймона і Ж.А.Роулера (1974 р.):

якщо $f\in C^{(j+s)}(I)\cap\Delta(Y)$, то

$$E_n^*(f) \leqslant B_j\, 2^s\, \frac{\|f^{(j+s)}\|}{n^j}, \; n>2(s-1+j),$$

$$E_n^*(f) \leqslant B_{Y,j}\, n^2\, \frac{\|f^{(j+s)}\|}{n^{j+s}}, \; n>4(s+1+j).$$

В другому розділі доведено теорему 2.1, яка забезпечує оцінку конаближення таку ж, як і в відповідних класичних прямих теоремах С.М.Нікольского, А.Ф.Тімана, В.К.Дзядика, Г.Фройда, Ю.А.Брудного апроксимації без обмежень.

Нагадаємо, що модулем неперервності порядку $k\in N$ неперервної на I функції $f=f(x)$ називається функція

$$\omega_k(f;t) = \sup_{h\in[0,t]}\; \sup_{x\in[-1,1-kh]} |\Delta_h^k(f,x)|, \text{ де } t\in[0,2/k].$$

<u>Теорема 2.1</u>. Нехай $k\in N$. Якщо $f\in C^2(I)\cap\Delta(Y)$ то при кожному натуральному $n>N_Y$ знайдеться алгебраїчний многочлен $p_n\in P_n(Y)$ такий, що для всіх $x\in I$ має місце нерівність

$$|f(x)-p_n(x)| \leqslant B_{s,k}\,\rho_n^2(x)\,\omega_k(f'';\rho_n(x)),$$

де стала $N=N_Y$ - залежить тільки від Y, а стала $B_{s,k}$ - залежить тільки від s і k.

Наслідком теореми 2.1 є

Теорема 2.2. Нехай $k\in N$. Якщо $f\in C^2(I)\cap\Delta(Y)$ то при кожному натуральному $n=k+1,k+2,\ldots$знайдеться алгебраїчний многочлен $p_n\in P_n(Y)$ такий, що для всіх $x\in I$ має місце нерівність

$$|f(x)-p_n(x)|\leqslant B_{Y,k}\rho_n^2(x)\omega_k(f'';\rho_n(x)),$$

де стала $B_{Y,k}$ залежить тільки від Y і k.

Нехай $\alpha=r+\beta$, де $0<\beta\leqslant1$, r - ціле невід'ємне; $Lip^*\alpha$ клас функцій f, для яких $\omega_2(f^{(r)},t) = O(t^\beta)$.

Із теореми 2.1 і добре відомої оберненої теореми В.К.Дзядика випливає конструктивна характеристика функцій $f\in Lip^*\alpha\cap\Delta(Y)$, $\alpha>2$. Тобто, має місце

Теорема 2.3. Нехай $\alpha>2$.Функція $f\in Lip^*\alpha\cap\Delta(Y)$ тоді і тільки тоді коли існує послідовність многочленів $p_n\in P_n(Y)$ таких, що

$$\left|\frac{f-p_n}{\rho_n^\alpha}\right| = O(1),\ n\to\infty .$$

Для наглядності сформулюємо наслідок теорем 2.1 і 2.2 для класу W^r, $r\in N$, функцій у яких $(r-1)$-а похідна абсолютно неперервна на $[-1,1]$, а $|f^{(r)}(x)|\leqslant1$ майже скрізь на I.

Теорема 2.4. Якщо $f\in W^r\cap\Delta(Y)$, $r>2$, то для кожного натурального $n\geqslant r-1$ знайдеться алгебраїчний многочлен $p_n\in P_n(Y)$ такий, що

$$\left|\frac{f-p_n}{\rho_n^r}\right| \leqslant B_{Y,r}$$

Теорема Б (для $\alpha>2$) є також наслідком теореми 2.2 і класичних прямих та обернених оцінок конструктивної характеристики поточкового наближення без обмежень функцій класу $Lip^*\alpha$.

На закінчення висловлюю щиру вдячність науковому керівнику Ігорю Олександровичу Шевчуку за постановку задач , постійну увагу і підтримку в роботі.

Основні положення дисертації опубліковані в наступних роботах:

1. Дзюбенко Г.А., Листопад В.В., Шевчук И.А. Равномерные оценки для монотонной полиномиальной аппроксимации//Укр.мат. журн.-1993.-45,№ 1.-С.38-43.
2. Дзюбенко Г.А., Листопад В.В., Шевчук И.О. Приближение функций с ухудшающейся гладкостью на концах отрезка//Тезисы докладов республиканской научной конференции. Экстремальные задачи теории приближений и их приложения(29-31мая 1990года) Киев.-1990г.-С.50
3. Листопад В.В. Некоторые равномерные оценки для монотонной аппроксимации//Укр.мат.журнал-1993.-45,№6.-С.785-790.
4. Листопад В.В. Наближення функцій на класах Бабенко // Тези доповіді наукової конференції викладачів КДПІ ім.М.П.Драгоманова (25-27 лютого 1992 р.)-Київ.-1992.-С.48-49.
5. Листопад В.В. Комонотонне наближення диференційовних на відрізку функцій//Тези доповіді наукової конференції викладачів КДПІ ім.М.П.Драгоманова (25-28 лютого 1993 р.)-Київ.-1992.-С.75-76.
6. Дзюбенко Г.А., Листопад В.В., Шевчук И.О. О комонотонной аппроксимации дифференцируемых на отрезке функций//Теория функций. Дифференциальные уравнения в математическом моделировании:Тезисы докладов школы.-(25 января-3 февраля 1993 г.).-Воронеж:ВГУ,1993.-С.48.

Підп. до друку 16.12.93. Формат 60×84/16. Папір друк. Офс.друк.
Ум.друк.арк. 0,93. Ум. фарбо-відб. 0,93. Обл.-вид. арк. 0,6.
Тираж 100 пр. Зам. 455 Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики АН України
252601 Київ 4, ГСП, вул. Терещенківська, 3.