

ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ім. І.І.МЕЧНИКОВА

На правах рукопису

КРАПИВА Наталія Володимирівна

АСИМПТОТИКА РОЗВ'ЯЗКІВ СИНГУЛЯРНИХ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ОПЕРАТОРНИХ ТА ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ
РІВНЯНЬ

01.01.02. – Диференціальні рівняння

А в т о р е ф е р а т

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Одеса 1993



00778948 (0)

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Одеському державному університеті

ім. І.І.Мечникова.

Науковий керівник:

кандидат фізико-математичних наук, доцент ГРАБОВСЬКА Р.Г.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор СТРИЖАК Т.Г.

кандидат фізико-математичних наук, професор КЛІХ М.О.

Провідна організація:

Львівський інститут прикладних проблем механіки і математики АН України

Захист відбудеться "25" лютого 1994 р. на засіданні спеціалізованої вченої ради К 05.01.02. по фізико-математичним наукам /математика/ в Одеському державному університеті /270100, м.Одеса, вул. Петра Великого, 2/.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Одеського державного університету /270100, м.Одеса, вул. Радянської Армії, 24/.

Автореферат розісланий "21" січня 1994 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради

Третяк О.І.

ДВ-29.100

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Необхідність дослідження диференціально-операторних рівнянь /ДОР/ і зокрема інтегро-диференціальних рівнянь /ІДР/ виникає при розв'язуванні багатьох задач у різних галузях природознавчих наук і в техніці. Стислий огляд виявлення, розвитку та застосування теорії ДОР і ІДР можна знайти у статті Н.В.Азбелєва [1] та джерелах, на які він посилається. Н.В.Азбелєв відзначає, що "... поруч з диференціальними рівняннями усе частіше з'являються ІДР та різні їх "гібриди"... Виникають загальні для широких класів рівнянь фундаментальні теореми і з'являються теорії різних узагальнень диференціальних рівнянь". Зупинимось на методах асимптотичних розв'язень для ДОР.

Наприкінці ХІІІ сторіччя Ейлер поклав початок систематичному вивченню рівнянь з особливостями і поставив питання про знаходження розв'язків рівнянь за допомогою рядів. В ХІХ сторіччі Ш.Бріо та Ж.Буке використовували формальні ряди для розв'язку подібних задач. Ними було доведено, що у комплексній області деякі рівняння в околі $(0,0)$ зводяться до сингулярного рівняння вигляду

$$x^s x' = \varphi(x, x), \quad s > 0; \quad x \in \mathbb{C}; \quad \varphi \in \mathbb{C}^n, \quad (1)$$

яке є узагальненням "класичного" рівняння Бріо та Буке

$$x y' - \nu y = f(x, y).$$

Враховуючи, що права частина рівняння (1) голоморфна в точці $(0,0)$, при деяких обмеженнях були здобуті голоморфні в точці $x=0$ розв'язки даного рівняння $/s \in \mathbb{N}, n=1/$. Достатньо повне уявлення про історію та результати досліджень систем (1) за допомогою формальних рядів можна дістати, якщо вивчати монографію В.О.Добро-

1. Азбелєв Н.В. О некоторых тенденциях в обобщениях дифференциальных уравнения // Диф. уравнения. - 1985. - Т.21, №.С.1291-1304.

вольського [2] .

Якщо аналітичні методи досліджень систем (1) неможливо застосувати, застосовують якісні методи. Наприклад, метод гладких або кусково-гладких поверхонь без контакту. Чітке формулювання цього методу є в роботах А.Пуанкаре та О.М.Ляпунова, а докладніший опис можна знайти у книжці Н.І.Гаврилова [3] . Багато математиків використовують цей метод у дійсній області. Якісний метод аналітичного продовження розв'язків поблизу нерухомої особливої точки був запропонований Р.Г.Грабовською [4] . Продовжуючи розвивати цей метод, Г.Є.Самкова розглядає клас систем рівнянь першого порядку, які не розв'язані відносно похідної.

У даній роботі метод, який був запропонований Р.Г.Грабовською, застосовується для певного класа сингулярних ДОР типу Бріє та Буке з оператором, котрий має похідні вищого порядку, чим і визначається актуальність поставленої задачі.

Велика кількість різних задач, які відносяться практично до усіх важливих розділів математичної фізики і до самих різноманітних технічних питань, пов'язано з вживанням бессельових функцій. Природно, що, у зв'язку з необхідністю практичного вживання, з'явилися роботи, в яких вивчається асимптотика різноманітних рівнянь типу Бесселя, зокрема, асимптотика гіпербессельових та гіпергеометричних рівнянь. Це роблять В.С.Адамчик і О.Д.Лізарев, М.Кохао і

2. Добровольский В.А. Очерки развития аналитической теории дифференциальных уравнений.- Киев: Вища школа, 1974.
3. Гаврилов Н.И. Метод теории обыкновенных дифференциальных уравнений.- М.: Высшая школа, 1962.
4. Грабовская Р.Г. О квази-аналитических решениях одного класса нелинейных дифференциальных уравнений //Труды Одесск.ун-та, вып. 3.-1958.-С.89-108.

С.Ожонин, М.Хукухара. Побудову асимптотики для узагальнення гіпербессельова рівняння можна знайти в одній з робіт О.А.Тінгаєва.

У зв'язку з цим актуальною стає задача побудови асимптотики для певного класу сингулярних ДОР типу Бесселя з оператором, що має похідні вищого порядку.

Тема дисертаційної роботи є частиною держбюджетної теми № 240 "Асимптотична поведінка розв'язків неавтономних звичайних диференціальних рівнянь", яка виконується на кафедрі диференціальних рівнянь Одеського держуніверситету.

Об'єкт дослідження. У дійсній області досліджується клас сингулярних ДОР типу Бесселя вигляду

$$x^2 y'' + xy' + [x^2 + (U_n y)(x, y) - \lambda^2] y = 0, \quad (2)$$

де $\lambda \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$; $n \in \mathbb{N}$;

U_n - суть відображення, взагалі кажучи, нелінійне, яке кожній функції \tilde{y} з деякого класу $B_0 \subset C^n([0, \Delta_0])$ ставить у відповідність визначену однозначно функцію від x та y , тобто

$$(U_n \tilde{y})(x, y) = h(x, y).$$

До того ж, \tilde{y} асимптотично дорівнюється при $x \rightarrow +0$ регулярному розв'язку рівняння Бесселя.

У комплексній області досліджується клас сингулярних ДОР типу Біріо та Буке вигляду

$$x w' = [a + a_0(x)]w - [b + b_0(x)]x^{N+n+1} + (U_n w)(x, w), \quad (3)$$

де $\text{Im } a \neq 0$; $b \neq 0$; $n \in \mathbb{N}$;

$$N \in \mathbb{R}_+ : (N > \text{Re } a) \vee (N < \text{Re } a - (n+1));$$

функції $a_0(x), b_0(x)$ - аналітичні в $\mathcal{D} = \{0 < |x| < \Delta_0, \arg x \in (T_1, T_2)\}$; $\Delta_0, T_1, T_2 = \text{const}$; \mathcal{D} розглядається на поверхні Рімана логарифмічної функції;

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in \mathcal{D}}} a_0^{(j)}(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in \mathcal{D}}} b_0^{(j)}(x) = 0, j = \overline{0, n}; a_0, b_0 \in C^n(\overline{\mathcal{D}});$$

U_n - суть відображення, взагалі кажучи, нелінійне, яке кожній функції $\tilde{w} \in \mathcal{B}_0$ (\mathcal{B}_0 - деякий клас аналітичних в \mathcal{D} , n -разів неперервно-диференційованих в $\overline{\mathcal{D}}$ функцій) ставить у відповідність визначену однозначно функцію від x та w , тобто

$$(U_n \tilde{w})(x, w) = h(x, w).$$

До того ж, \tilde{w} асимптотично дорівнюється при $x \rightarrow 0$ деякому розв'язку "скороченого" рівняння $xw' = aw - bx^{N+n+1}$.

Мета роботи. У дійсній області: отримати достатні умови існування та асимптотичне зображення розв'язків рівняння (2) в достатньо малому правому півколі нуля. У комплексній області: отримати достатні умови існування та асимптотичне зображення аналітичних розв'язків рівняння (3) в $\overline{\mathcal{D}}$.

Методика досліджень. У дисертації використовуються: принцип нерухомої точки Шаудера [6], топологічний принцип Вейлевського [5], метод поверхонь без контакту [3], ідеї методу аналітичного продовження розв'язків поблизу особливої точки [4].

Наукова новизна та основні результати, які виносяться на захист.

1. Вказані достатні умови існування і досліджено питання про кількість розв'язків певних класів сингулярних ДОР типу Бесселя (2) у дійсній області і типу Бріо та Буке (3) у комплексній.
2. Побудовано асимптотику для розв'язків даних рівнянь не тільки для невідомої функції, але й для її похідних до n -го порядку, у випадку рівняння (2), та до $(n+1)$ -го порядку, у випадку рівняння (3).
3. Досліджені певні ІДР, які належать до класів ДОР типу Бесселя, а також типу Бріо та Буке.

5. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Мир, 1970.

6. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. - М.: Наука, 1984.

Усі результати, що були перелічені, є новими.

Теоретична та практична цінність. Дана дисертація носить теоретичний характер. Отримані в ній результати і розвинені методи розширюють клас ДОР, для яких можлива побудова асимптотичного розкладання поблизу особливої точки, що лежить на межі області. Результати дисертації можуть знайти практичне використання, коли досліджуються різні задачі механіки, електротехніки, атомної та ядерної фізики, фізхімії, математичної біології та інші.

Публікації та апробація роботи. Основні результати дисертації відображені в 9 опублікованих роботах, список яких наведено в кінці автореферату. З спільних робіт науковому керівнику належать постановки задач та ідеї методу їх розв'язку. Результати автором отримані самостійно. Основні результати дисертації доповідались на наукових семінарах кафедри диференціальних рівнянь Одеського держуніверситету /керівник доц. В.М.Бвтухов/, кафедри вищої математики № 1 Одеського державного політехнічного університету /керівник проф. В.В.Новіков/, відділу теорії диференціальних рівнянь інституту прикладних проблем механіки і математики АН України /керівник проф. В.Я.Скоробагатько/, на ХУ Всесоюзній школі по теорії операторів в функціональних просторах /Ульянівськ, 1990р./, на школі "Сучасні методи якісної теорії крайових задач" /Воронеж, 1991р./.

Структура і обсяг роботи. Дисертація складається з вступу, двох розділів та списку літератури /143 найменування/, загальним обсягом 149 сторінок.

ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ.

Вступ дає стислий огляд і аналіз сучасного стану проблем, які вивчаються в дисертації. В ньому викладаються основні результати, які були отримані автором.

В першому розділі у дійсній області досліджується клас сингулярних ДОР типу Бесселя (2). В §1.1. ставиться задача: при яких

умовах на оператор U_n в достатньо малому правому півколі нуля існують розв'язки рівняння (2), які асимптотично дорівнюються при $x \rightarrow +0$ зрізаній сумі формального степеняного ряду і відповідають регулярному розв'язку рівняння Бесселя.

В § 1.1. доведено допоміжні леми і зроблено деякі побудови. Для наочності запропонованого методу дослідження рівняння оператор

U_n позначили через

$$(U_n w)(x, y) := f(x, y, w, w', \dots, w^{(n)}) \equiv f(x, y, w_n).$$

Далі вводяться до розгляду банахів простір X функцій $x \in C^{n-1}([0, \Delta_0])$, для яких $x^{(j)}(0) = 0$, $j = \overline{0, n-1}$, і

$$\|x\| = \max_{\substack{j=\overline{0, n-1} \\ x \in [0, \Delta_0]}} |x^{(j)}(x)|.$$

Потім на даному простору вводяться клас функцій

$$B = \{x \in X; \|x\| \leq \delta\}, \quad 0 < \delta = \text{const},$$

причому B - опукла, обмежена, замкнена множина.

Тепер припустимо, що для деяких $\hat{C} \in (0, +\infty)$ і номера $N > 0$, при будь-якому $0 < |C_0| < \hat{C}$, існують постійні $C_i(C_0)$, $i = \overline{1, N+n}$, такі, що при підстановці зрізаної суми

$$x^{(L)} S_{N+n}(x, C_0) = \sum_{L=0}^{N+n} C_i x^{L+i} \quad (4)$$

в рівняння (2) одержуємо вираз $O(x^{L+N+n+1})$ при $x \rightarrow +0$.

ОЗНАЧЕННЯ. Назвемо (4) "майже розв'язком" рівняння (2), якщо при підстановці (4) в рівняння (2) виконується наступна умова

$$x S_{N+n}''(x, C_0) + (2L+1) S_{N+n}'(x, C_0) + x S_{N+n}(x, C_0) + \frac{1}{x} S_{N+n}(x, C_0) \cdot f(x, x^{(L)} S_{N+n}(x, C_0), [x^{(L)} S_{N+n}(x, C_0)]_n) = W_{N+n}(x, C_0)$$

де $W_{N+n} \in C^{n-1}([0, \Delta_0])$, причому $W_{N+n}^{(j)}(x, C_0) = O(x^{N+n-j})$ при $x \rightarrow +0$, $j = \overline{0, n-1}$.

Поглядемо у рівнянні (2)

$$y(x) = x^\alpha \cdot S_{n+n}(x, C_0) \cdot \exp\left(\int_0^x t^N x(t) dt\right), \quad (5)$$

де $\chi(x)$ - нова невідома функція з X .

Запровадимо функцію $F(x, x, V_{n-1}(x))$, яка дозволяє записати оператор f , після перетворення (5), у вигляді

$$F(x, x, V_{n-1}(x)) = f\left(x, x^\alpha S_{n+n}(x, C_0) \exp\left(\int_0^x t^N x(t) dt\right), \left[x^\alpha S_{n+n}(x, C_0) \exp\left(\int_0^x t^N x(t) dt\right)\right]_n\right),$$

причому

$$F(x, 0, V_{n-1}(0)) = f\left(x, x^\alpha S_{n+n}(x, C_0), \left[x^\alpha S_{n+n}(x, C_0)\right]_n\right),$$

і має властивості L , на класі функцій \mathcal{B} .

L . Для будь-якого елемента \tilde{x} з \mathcal{B} виконуються умови:

1/ функція $F(x, x, V_{n-1}(\tilde{x})) = \tilde{F}(x, x)$ означена в області

$$\mathcal{D}(\alpha_0, \sigma) = \{(x, x) \in [(0, \Delta_0) \times (|x| < \alpha_0 x^\sigma)]\}, \quad 0 < \sigma < n, \alpha_0 > 0, \alpha_0 - \text{фіксована};$$

2/ для всіх $(x, x) \in \mathcal{D}(\alpha_0, \sigma) \setminus \{(0, 0)\}$ і будь-якого $\chi = \sqrt[n-1]{\cdot}$ K - а похідна функції в силу рівняння є функцією вигляду^{*/}

$$F^{(k)}(x, x, V_{n-1}(\tilde{x})) = \varphi_k(x, x, V_{n-1}(\tilde{x}));$$

3/ $F \in C_{x, x}^{0,1}(\mathcal{D}(\alpha_0, \sigma) \setminus \{(0, 0)\})$ при $n=1$;

4/ існує додатна постійна δ_0 , що для всіх

$$(x, x) \in \mathcal{D}(\delta_0, n) \setminus \{(0, 0)\} \subset \mathcal{D}(\alpha_0, \sigma) \setminus \{(0, 0)\}$$

знайдуться додатні постійні $\theta_j(\delta_0, \delta)$, $j = 0, \overline{n-1}$, такі, що

$$|F^{(j)}(x, x, V_{n-1}(\tilde{x})) - F^{(j)}(x, 0, V_{n-1}(0))| \leq \theta_j(\delta_0, \delta) \cdot x^{n+N+\alpha-j};$$

5/ існують неперервні функції

$$\psi: (0, \Delta_0] \rightarrow (0, +\infty), \quad \psi(0) = 0 \quad \text{і} \quad \chi: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty), \quad \chi(0) = 0$$

^{*/} Це позначення вказує на те, що при послідовному $(n-1)$ -кратному диференціюванні функції в силу рівняння найвищий порядок похідної по \tilde{x} залишається рівним $(n-1)$, тобто не підвищується.

такі, що при будь-якому $x \in (0, x_0)$ і $\lambda \in (0, +\infty)$

$$\left| F^{(l)}(x, z_1, V_{n-1}(\tilde{z}_1)) - F^{(l)}(x, z_2, V_{n-1}(\tilde{z}_2)) \right| \leq \left[\psi(x) + \frac{\chi(\lambda)}{\chi} \right] \chi x^{n+l}$$

для всіх $(x, z_1), (x, z_2), (x, z_1 - z_2) \in \mathcal{U}(x, \nu) \setminus \{(0, 0)\}$

і $\|\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2\| < 1$, $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2 \in \mathcal{B}$,

де $l = 0$ і $\nu = \delta < n$ при $\lambda = 0$;

а $l = 0, n-2$ і $\nu = n$ при $\lambda > 0$.

Тепер після заміни (5) рівняння (2) приймає вигляд

$$\chi x' = - (2\lambda + 1 + N + 2 \frac{S_{N+n}(x, C_0)}{S_{N+n}(x, C_0)} \chi) x - \chi^{N+1} x^2 - \frac{W_{N+n}(x, C_0)}{\chi^N S_{N+n}(x, C_0)} - \frac{1}{\chi^{N+1}} [F(x, z, V_{n-1}(z)) - F(x, 0, V_{n-1}(0))] \quad (6)$$

Розв'язок поставленої задачі для рівняння (2) зводиться до розв'язування допоміжної задачі для рівняння (6): при яких умовах на функція F в достатньо малому правому півколі нуля існують розв'язки рівняння (6), які задовольняють оцінкам

$$\chi^{(\rho)}(x) = O(x^{n-\rho}) \quad \text{при } x \rightarrow +0, \quad \rho = \overline{0, n}. \quad (7)$$

Побудуємо однопараметричну сім'ю операторів $A(C_0)$ (роль параметра грає C_0) таким чином: довільному фіксованому елементу \tilde{z} поставимо у відповідність розв'язок з \mathcal{B} рівняння

$$\chi x' = - (2\lambda + 1 + N + 2 \frac{S_{N+n}(x, C_0)}{S_{N+n}(x, C_0)} \chi) x - \chi^{N+1} x^2 - \frac{W_{N+n}(x, C_0)}{\chi^N S_{N+n}(x, C_0)} - \frac{1}{\chi^{N+1}} [F(x, z, V_{n-1}(\tilde{z})) - F(x, 0, V_{n-1}(0))] ,$$

якби задовольняє на $[0, \Delta_0]$ оцінкам

$$|\chi^{(j)}(x)| \leq \delta_j \chi^{n-j}, \quad 0 < \delta_j = \text{const}, \quad j = \overline{0, n-1}.$$

В § 1.2., використовуючи метод поверхонь без контакту та топологічний принцип Важевського, доведено, що $A: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$. $A(C_0)$ односточно визначений.

В § 1.3. доводиться неперервність оператора A на \mathcal{B} .

В § 1.4. доводиться відносна компактність $A[\mathcal{B}]$ в \mathcal{B} .

В § 1.5. зроблено основний висновок з попередніх параграфів

про виконання всіх умов принципу Шаудера. Отже, існує хоча б одна нерухома точка з \mathcal{B} оператора $\mathcal{A}(C_0)$, що відповідає параметру

$$0 < |C_0| < \hat{C} \quad \text{і для якої на } [0, \Delta_0] \text{ виконується умова}$$

$$(\mathcal{A}\tilde{z})(x, C_0) \equiv z_0(x, C_0),$$

$z_0(x, C_0)$ — розв'язок рівняння (6), який задовольняє оцінкам (7), бо оператор $\mathcal{A}(C_0)$ будувався так, щоб його нерухома точка була розв'язком рівняння (6). Таким чином, була доведена

ТЕОРЕМА 1.1. Нехай функція $F(x, \chi, V_{n-1}(x))$ з рівняння (6) має властивості L на класі функцій \mathcal{B} . Тоді знайдуться такі $\hat{C} \in (0, +\infty)$ достатньо велике $\delta_0 > 0$ і настільки мале $\Delta_0(\delta_0) > 0$, що на $[0, \Delta_0]$ існує, принаймні, однопараметрична сім'я розв'язків $z_0(x, C_0)$ рівняння (6), які мають разом з похідними до n -го порядку на $[0, \Delta_0]$ оцінки

$$|z_0(x, C_0)| \leq \delta_0 x^n, \quad z_0^{(k)}(x, C_0) = O(x^{n-k}) \quad \text{при } x \rightarrow +0, \quad k = \overline{1, n}.$$

Для кожного параметра $0 < |C_0| < \hat{C}$ такий розв'язок хоча б один.

Задача, поставлена для рівняння (6), розв'язана. Повертаємося до задачі для рівняння (2). Враховуючи заміну (5), вірна

ОСНОВНА ТЕОРЕМА 1.2. Нехай для деяких $\hat{C} \in (0, +\infty)$ і номера $N > 0$, при будь-якому $0 < |C_0| < \hat{C}$, функція вигляду (4) є "майже розв'язком" рівняння (2). Крім того, функція $F(x, \chi, V_{n-1}(x))$, яка має властивості L на \mathcal{B} , така, що після заміни (5) рівняння (2) припускає зображення вигляду (6). Тоді у рівнянні (2) типу Бесселя на $[0, \Delta_0]$ існує принаймні однопараметрична сім'я розв'язків $y_0(x, C_0)$, що мають асимптотику

$$y_0(x, C_0) = [x^{\rho} S_{N+n}(x, C_0)]^{(p)} + O(x^{\rho+N+n+\rho-p}) \quad \text{при } x \rightarrow +0, \quad \rho = \overline{0, n}.$$

Для кожного параметра $0 < |C_0| < \hat{C}$ такий розв'язок хоча б один.

В § 1.6. наведено приклад ДОР /взагалі кажучи, ЦР/ типу

Бесселя:

$$x^2 y'' + x y' + [x^2 + \int_{y(x)}^{y'(x)} (y''(t))^3 dt - 16] y = 0, \quad (8)$$

тут $d=4$, $n=2$. Внаслідок наявності оператора класична теорія рівняння Бесселя не працює. Перевіряємо виконання умов теореми 1.2:

1/ знаходимо "майже розв'язок" рівняння (8)

$$\forall N \in \overline{0, 18} \quad \forall C_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad y = x^4 S_{N+2}(x, C_0);$$

2/ вводимо функції

$$F(x, V_1(x)) = \int_{x^4 S_{N+2} \exp\left(\int_0^x t^4 x dt\right)}' \left[\left(t^4 S_{N+2} \exp\left(\int_0^t \xi^4 x d\xi\right) \right)'' \right]^3 dt,$$

причому

$$F(x, V_1(0)) = \int_{x^4 S_{N+2}}' \left[\left(t^4 S_{N+2} \right)'' \right]^3 dt.$$

Для даної функції виконуються всі властивості L_* на класі B .

В силу основної теореми у рівнянні (8) на $[0, \Delta_0]$, $\Delta_0 \neq 0$ існує, принаймні, однопараметрична сім'я розв'язків, що мають асимптотику

$$y_0^{(p)}(x, C_0) = [x^4 S_{N+2}(x, C_0)]^{(p)} + O(x^{4+N-p}) \text{ при } x \rightarrow +0, \quad p = \overline{0, 2}.$$

Для кожного параметра $C_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ такий розв'язок хоча б один.

В кругому розділі у комплексній області досліджується клас сингулярних ДОР типу Бріо та Буке (3). В § 2.1. ставиться задача: при яких умовах на оператор U_n зникають разом зі своїми похідними в точці $x=0$ аналітичні в \mathcal{D} , n -разів неперервно-диференційовані в $\overline{\mathcal{D}}$ розв'язки рівняння (3) існують і задовольняють співням

$$w^{(p)}(x) = O(|x|^{N+n+1-p}) \text{ при } x \rightarrow 0, \quad p = \overline{0, n}. \quad (9)$$

В § 2.1., міркуючи аналогічно з § 1.1. першого розділу, на початку вводиться до розгляду банахів простір X аналітичних в однозв'язній області \mathcal{D} функцій $W(x)$, $W \in C^n(\overline{\mathcal{D}})$, для яких $W^{(j)}(0) = 0$, $j = \overline{0, n}$, і

$$\|W\| = \max_{\substack{j = \overline{0, n} \\ x \in \overline{\mathcal{D}}} } |W^{(j)}(x)|.$$

Потім на даному просторі вводиться клас функцій

$$B = \{W \in X : \|W\| \leq \delta\}, \quad 0 < \delta = \text{const}.$$

Далі, аналогічно з першим розділом, розв'язок поставленої задачі для рівняння (3) зводиться до розв'язування допоміжної задачі: про існування аналітичного в \mathcal{D} , n -разів неперервно-диференційованого в $\bar{\mathcal{D}}$ розв'язку рівняння

$$xW' = [a + a_0(x) - N]W - [b + b_0(x)]x^{n+1} + \frac{1}{x^k} F(x, W, V_n(W)), \quad (10)$$

який задовольняє оцінкам

$$W^{(p)}(x) = O(|x|^{n+1-p}) \quad \text{при } x \rightarrow 0, \quad p = \overline{0, n+1}.$$

Рівняння (10) одержане з (3) заміною

$$w(x) = x^k W(x), \quad W \in X. \quad (11)$$

Діючи аналогічно з першим розділом, побудуємо оператори A^\pm /коли $N \in \mathbb{R}_+$; $N > \operatorname{Re} a$ будуємо A^- , коли $N \in \mathbb{R}_+$; $N < \operatorname{Re} a - (n+1)$ будуємо A^+ /.

Відзначимо, що при побудові операторів A^\pm було запропоновано розглянути дві сім'ї гладких кривих, причому таких, що через кожну точку області $\bar{\mathcal{D}}$ повинна проходити одна і тільки одна крива кожної з цих сімей. Перша сім'я - це сім'я променів, друга сім'я - сім'я дуг кіл. І тоді поставлена задача для рівняння (10) була зведена до аналогічної задачі для дійсної системи двох рівнянь типу Брю та Буке.

В § 2.2. за допомогою цих сімей гладких кривих запропоновано два способи побудови $\forall \tilde{W} \in \mathcal{B}$ розв'язку $(A^\pm \tilde{W})(x)$ в $\bar{\mathcal{D}}$ і доведено твердження, що побудовані двома способами неперервний розв'язок єдиний, причому $(A^\pm \tilde{W}) \in C^n(\bar{\mathcal{D}})$. В цьому параграфі використувували ідеї методу аналітичного продовження розв'язків поблизу особливої точки.

В § 2.3. доводиться аналітичність розв'язку $(A^\pm \tilde{W})(x)$ в \mathcal{D} . Та сформульовані умови на $F(x, W, V_n(W))$, які забезпечують побудову оператора A^\pm , причому A^\pm однозначно визначений в \mathcal{B} (A^+ однозначний в розумінні задачі Коши) і $A^\pm: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$.

В § 2.4. доводиться неперервність оператора A^\pm на \mathcal{B} .

В § 2.5. доводиться достатня умова рівностепенної неперервності послідовності аналітичних функцій комплексної змінної та відносна компактність $A^{\pm}[B]$ в B .

В § 2.6. зроблено основний висновок про виконання всіх умов принципу Шаудера, на основі якого була сформульована

ТЕОРЕМА 2.1. Нехай функція $F(x, W, V_n(W))$ з рівняння (10) має властивості L на класі функцій B . Тоді знайдуться такі достатньо велике $\delta_0 > 0$ і настільки мале $\Delta_0(\delta_0) > 0$, що в \overline{D} існує розв'язок $W^0 \in B$ рівняння (10), який має в \overline{D} разом з похідними до $(n+1)$ -го порядку оцінки

$$|W^0(x)| \leq \delta_0 |x|^{n+1}, \quad [W^0(x)]^{(k)} = O(|x|^{n+1-k}) \text{ при } x \rightarrow 0, \quad k=1, \overline{n+1}.$$

При $N \in \mathbb{R}_+, N > \text{Re} a$ такий розв'язок хоча б один.

При $N \in \mathbb{R}_+, N < \text{Re} a - (n+1)$ - принаймні однопараметрична сім'я таких розв'язків.

Задача, поставлена для рівняння (10), розв'язана. Враховуючи заміну (11), вірна

ОСНОВНА ТЕОРЕМА 2.2. Нехай функція $F(x, W, V_n(W))$, яка має властивості L на B , така, що після заміни (11) рівняння (3) припускає зображення вигляду (10). Тоді у рівнянні (3) типу Бріо та Буке існує зникаючий разом зі своїми похідними в точці $x=0$ розв'язок $w^0(x)$, причому він аналітичний в D , n -разів неперервно-диференційований в \overline{D} і задовольняє асимптотичним оцінкам (9) при $x \rightarrow 0$.

При $N \in \mathbb{R}_+, N > \text{Re} a$ такий розв'язок хоча б один.

При $N \in \mathbb{R}_+, N < \text{Re} a - (n+1)$ - принаймні однопараметрична сім'я таких розв'язків.

В § 2.7. наведено приклад ДОР /взагалі мажучи, ДР/ типу Бріо та Буке

$$x w' = [i + x^2 (2n x)^i] w - x^2 \left[1 + \int_0^x \frac{[\sin w'(\xi)]^2}{\xi^2} d\xi \right] - w^2, \quad (12)$$

тут $a=i$; $a_0(x)=x^2(\ln x)^i$; $b=1$; $b_0(x)=0$; $n=1$; $N=2$;

$$F(x, W, V, (\overline{W})) = x^4 \int_0^1 \frac{[\sin(2\xi \overline{W} + \xi \overline{W}')]^2}{\xi^2} d\xi + x^4 W^2.$$

В силу основної теореми 2.2., через те, що $N > \operatorname{Re} a$, у рівнянні (12) існує хоча б один зникаючий разом зі своїми похідними в точці $x=0$ розв'язок, причому він аналітичний в $\mathcal{D} = \{0 < |x| < \Delta_0 < 1, 0 \leq T_1 < \varphi < T_2\}$, неперервно-диференційований в $\overline{\mathcal{D}}$ і задовольняє асимптотичним оцінкам

$$[w^0(x)]^{(p)} = O(|x|^{4-p}) \quad \text{при } x \rightarrow 0, \quad p = \overline{0, 2}.$$

Треба відзначити, що результати, які одержані у дійсній та комплексній областях, взаємозв'язані один з одним. Так, задача дослідження рівняння (2) типу Бесселя змінює зводилася до задачі дослідження рівняння (6), яке в свою чергу є рівнянням (3) типу Бріє та Буке. А тоді можна говорити, що отримані достатні умови існування та асимптотичне зображення розв'язків рівняння типу Бесселя не тільки у дійсній, але й в комплексній області. Проте клас операторів у комплексній області для даного рівняння більш вузький ніж у дійсній.

Крім того, для застосування якісного методу у дійсній області досліджувалось одне рівняння типу Бріє та Буке, а у комплексній — система двох рівнянь типу Бріє та Буке. Тому результати у дійсній і комплексній областях не перекривають один одного, хоча мають спільну методуку.

Основні результати дисертації відображені в публікаціях:

1. Крапива Н.В. Асимптотика řešení одного интегро-дифференциального уравнения второго порядка типа уравнения Бесселя //Доп. в УкрНИИТИ 26.02.90., № 352-Укр90, 21с.
2. Крапива Н.В. Об асимптотическом разложении řešení одного дифференциально-операторного уравнения //Тез. докл. XV Всесоюз. шк. по теории операторов в функц.пр-вах.-Ульяновск, 1990.-Т.1.-С.132.

3. Грабовская Р.Г., Крапива Н.В. О существовании решений ряда с нелинейным оператором // Учен. зап. Кривого Рога. Сер. Физ.-матем. науки. 1993. - № 993-Уж91, 16с.
4. Грабовская Р.Г., Крапива Н.В. Об асимптотическом поведении решений одного класса дифференциально-операторных уравнений типа уравнения Бесселя // Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения. Тез. докл. III Северо-Кавказской регион. конф. - Махачкала, 1991. - С.50.
5. Грабовская Р.Г., Крапива Н.В. О существовании и количестве аналитических решений одного класса сингулярных дифференциально-операторных уравнений типа Брио и Буке // Тез. докл. шк. "Современные методы в теории краевых задач". - Воронеж, 1992. - С.35.
6. Крапива Н.В. Асимптотическое поведение и существование аналитических решений для систем сингулярных дифференциально-операторных уравнений // Тез. докл. Республ. научно-метод. конф., посвящ. 200-летию со дня рождения Н.И. Лобачевского. - Одесса, 1992. - С.121.
7. Крапива Н.В. Асимптотика решений одного класса уравнений с оператором, содержащим производные высшего порядка // Тез. докл. Междунар. матем. конф. "Ляпуновские чтения". - Харьков, 1992. - С.92.
8. Грабовская Р.Г., Крапива Н.В. К вопросу о существовании аналитических решений дифференциально-операторного уравнения типа Брио и Буке // Тези Міжнар. конф., присвяч. пам'яті ак. М.П. Кравчука. - Київ-Львів, 1992. - С.51.
9. Грабовская Р.Г., Крапива Н.В. Об одном классе сингулярных дифференциально-операторных уравнений типа Брио и Буке // Деп. в УкрИНТЭИ 26.10.92., № 1734-Уж92, 65с.

Н.В. Крапива

074.391.304.100 01.12.93