

СУГАКОВА Олена Володимирівна

УДК 519.21

ОЦІНКИ ШВИДКОСТІ ЗВІЖНОСТІ У ТЕОРЕМІ РЕН'І

01.01.05. - теорія імовірностей
і математична статистика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
дисертації на здобуття вченого ступеню
кандидата фізико-математичних наук

AB 29.29

Робота виконана на кафедрі теорії імовірностей і математичної статистики механіко-математичного факультету Київського університету ім. Тараса Шевченка.

Науковий керівник - доктор фізико-математичних наук, професор К А Р Т А Ш О В М. В.

Офіційні опоненти : доктор фізико-математичних наук, професор А Н І С І М О В В. В.

кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник

Киричук П.О.

Провідна установа - Інститут кібернетики АН України.

Захист дисертації відбудеться "28" березня 1994 р. о годині на засіданні Спеціалізованої ради К 01.01.14 і у Київському університеті ім. Тараса Шевченка за адресою:

252127, Київ-127, проспект академіка Глушкова, 6, корпус механіко-математичного факультету, ауд. 42.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Київського університету.

Автореферат розіслано "25" лютого 1994 р.

Вчений секретар
Спеціалізованої ради

Курченко О.О.

ЛНБ України ім. В. Стефаника



00777882 (\$)

ЛНБ ім. В. Стефаника
АН України

Загальна характеристика роботи

Актуальність теми. У теперешній час методи сумування випадкових величин знаходять широке застосування у прикладній математиці і кібернетиці, техніці, при дослідженні різних складних моделей і систем. При цьому складність моделей приводить до необхідності розвитку методів асимптотичного аналізу, а також одержання відповідних оцінок.

При сучасному рівні розвитку техніки задача оцінки надійності пристроїв і систем має особливе значення. Тому є актуальним отримання оцінок швидкості збіжності сум геометричного числа випадкових величин до деякої граничної випадкової величини. Ці суми виникають у теорії надійності для характеризації часу до відмовлення системи з відновленнями, якщо інтерпретувати окремі доданки як тривалості періодів відновлення.

Мета роботи. Основною метою проведених досліджень є встановлення оцінок швидкості збіжності геометричного числа випадкових величин у різних метриках і для різних класів сумуємих доданків.

Наукова новизна. У дисертаційній роботі:

- отримана оцінка в рівномірній метриці швидкості збіжності у теоремі Рен'ї у випадку нескінченного другого моменту доданків;
- знайдені нерівності для сум геометричного числа незалежних випадкових величин у випадку різнорозподілених доданків. Розглянуто випадки, коли у доданків існує тільки момент α для деякого $1 \leq \alpha < 2$, і коли існує другий момент;
- доведені оцінки, пов'язані зі збіжністю геометричного числа випадкових величин, які задані на ланцюгу Маркова;
- встановлені нерівномірні оцінки у теоремі Рен'ї, а також для різнорозподілених і обмежених доданків. Результати подаються у термінах теорії відновлення з наступним застосуванням до різних класів сумуємих доданків;

- одержана оцінка зближення потоку, що проріджений з ймовірністю θ , з процесом Пуассона при $\theta \rightarrow 0$. Отримані результати застосовуються до процесу відновлення і до випадку, коли вхідний потік задається послідовністю неоднаково розподілених випадкових величин, які задовольняють деякій умові "старіння".

Теоретична і практична цінність. Одержані результати можна ефективно застосувати до аналізу багатьох складних систем теорії надійності. Дисертація виконана у відповідності з планом наукових робіт, які проводилися на кафедрі теорії ймовірностей і математичної статистики Київського університету по темі "Розробка методів розв'язання проблем статистики випадкових процесів і полів" / номер державної реєстрації 1860089770 /.

Апробація роботи. Основні матеріали роботи доповідалися на Республіканському семінарі з теорії ймовірностей та математичної статистики при Київському університеті (Київ, 1990).

Публікації. За результатами досліджень надруковано 7 робіт.

Структура і об'єм роботи. Дисертація складається зі вступу, двох розділів, списку цитованої літератури і викладена на 80 сторінках машинописного тексту. Список літератури включає 87 найменувань.

Зміст роботи

У вступі дана загальна характеристика роботи: обґрунтовані актуальність теми, мета, теоретичне і практичне значення виконаних досліджень, викладена структура дисертації і основні положення, які виносяться на захист.

У першому розділі одержаний ряд оцінок у рівномірній метриці для однорідних і неоднорідних сум геометричного числа незалежних випадкових величин, а також для випадку, коли доданки задані на ланцюгу Маркова.

У § 1.1 вводяться необхідні позначення і наводяться деякі допоміжні дані з теорії ймовірнісних метрик.

§ 1.2 присвячений теоремі Рен'ї у класичній постановці, але для нескінченного другого моменту доданків.

Нехай $\{ \xi_i, i \geq 0 \}$ - послідовність невід'ємних незалежних однаково розподілених випадкових величин з функцією розподілу

$$G(x) = P\{\xi_0 < x\};$$

$$P(x) = P\{\xi_0 \geq x\};$$

$$U(x) = \int_0^x P(y) dy;$$

ν - геометрична випадкова величина з функцією розподілу

$P\{\nu = k\} = \theta(1-\theta)^k$; $k \geq 0$, $0 < \theta < 1$, яка не залежить від послідовності $\{\xi_i\}$.

Покладемо $\tau = \sum_{i=0}^{\nu} \xi_i$.

ТЕОРЕМА 1.2.2. Нехай $E\xi_0^\alpha < \infty$ для деякого числа $1 < \alpha < 2$.

Тоді справедлива оцінка

$$\sup_{x \geq 0} |P\left\{\frac{q}{E\xi_0} \tau > x\right\} - \exp(-x)| \leq \theta^{\alpha-1} (1 + 2/((\alpha(1-\theta)U^2(\theta^{-1}))), \quad (1)$$

де $q = \theta/(1-\theta)$, а $U(\theta^{-1}) \rightarrow E\xi_0$ при $\theta \rightarrow 0$, причому нерівність (1)

залишається справедливою після заміни $U(\theta^{-1})$ на $\delta = E\xi_0 -$

$- E\xi_0^\alpha \theta^{\alpha-1}/(\alpha-1)$, якщо $\delta > 0$.

Зауваження 1.2.2. В умовах теореми 1.2.2 порядок оцінки (1) не можна поліпшити.

ТЕОРЕМА 1.2.3. Якщо $E\xi_0 < \infty$, то виконується оцінка

$$\sup_{x \geq 0} |P\left\{\frac{q}{E\xi_0} \tau > x\right\} - \exp(-x)| \leq (a + 2/((1-\theta)U(p)))(\theta F^{-1}(\theta^{-1}))^{1/2}, \quad (2)$$

де $q = \theta/(1-\theta)$; $p = (\theta^{-1}F^{-1}(\theta^{-1}))^{1/2}$;

$F^{-1}(x)$ - функція, обернена до $F(x)$ - неперервної, невід'ємної, опуклої вниз функції, такої, що $F(x)/x \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$ і $EF(\xi_0) < a < \infty$, причому права частина (2) прямує до 0 при $\theta \rightarrow 0$.

Оцінки, аналогічні (1), (2) і для випадку $\alpha = 2$, одержані В.В.Калашніковим і С.Ю.Всехсвятським за допомогою методу метричних відстаней, а також М.В.Карташовим для $\alpha = 2$ при застосуванні теореми про розподіл однорідного марковського моменту типу моменту першого досягнення для ланцюга Маркова. Випадок, коли $0 < \alpha < 1$, досліджувався І.М.Коваленко, Б.В.Гнеденко, Б.Фрайером.

У § 1.3 розглядається асимптотична поведінка випадкової величини τ , коли $\{\xi_i, i \geq 0\}$ є послідовністю незалежних неоднаково розподілених випадкових величин. Більш загальні відповідні граничні теореми розглядалися В.В.Анісімовим. Наші дослідження базуються на методі метричних відстаней В.М.Золотарьова. Відповідно до нього спершу отримані оцінки в ідеальній метриці ζ_2 , а далі за допомогою співвідношень між метриками доведені оцінки у метриці Колмогорова.

Нехай $E\xi_i^2 < \infty$ для усіх $i \geq 0$. Позначимо

$$M_i = E\xi_i, \quad i \geq 0;$$

$$M = \max_{i \geq 0} M_i;$$

$$m = \min_{i \geq 0} M_i;$$

$$x = \max_{i \geq 0} (E\xi_i^2 / (2M_i^2)); \quad \text{O}$$

$\{\eta_i, i \geq 0\}$ - послідовність незалежних випадкових величин, таких, що η_i розподілена експоненціально з параметром $1/M_i$ для усіх $i \geq 0$
 $i \quad \eta = \sum_{i=0}^{\nu} \eta_i.$

ТЕОРЕМА 1.3.1. Справедливе наступне співвідношення

$$\zeta_2(\theta\tau, \theta\eta) \leq \theta M^2(x+1), \quad (3)$$

причому оцінку (3) у наших припущеннях не можна поліпшити за порядком.

Наслідок 1.3.1. Функція розподілу випадкової величини $\theta\tau$ задовольняє оцінку

$$|P\{\theta\tau < x\} - (1 - (1-\theta)^{U(\theta, x)})| \leq 2(M+1) \left(\frac{x}{M}\right)^{1/2} (x+1)\theta^{1/2},$$

де

$$U(\theta, x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } 0 \leq x \leq \theta M_0 \\ k, & \text{якщо } \theta \sum_{i=0}^{k-1} M_i < x \leq \theta \sum_{i=0}^k M_i. \end{cases} \quad (4)$$

У другій частині параграфа зроблено узагальнення наслідку 1.3.1 на випадок, коли у елементів послідовності $\{\xi_i, i \geq 0\}$ не існує других моментів, а тільки моменти порядку α для деякого $1 < \alpha < 2$, причому рівномірно обмежені: $E\xi_i^\alpha \leq M_\alpha$ для усіх $i \geq 0$, M_α - деяка константа. У наших припущеннях справедливе наступне твердження.

ТЕОРЕМА 1.3.2. Функція розподілу випадкової величини θt задовольняє наступну оцінку

$$| P\{ \theta t < x \} - (1 - (1 - \theta)^{U(\theta, x)}) | \leq \frac{4}{\pi} \left(\frac{M_{\alpha}}{\alpha^2 m^{\alpha}} + \frac{6}{\pi} \right) \theta^{(\alpha-1)/(\alpha+1)} + \\ + \frac{\pi^2}{\pi m^2} \theta^{(3-\alpha)/(\alpha+1)} + \frac{1}{\pi} \left(\frac{3\pi^2}{2m^2} + \frac{24}{\pi} \right) \theta^{1/3},$$

де $U(\theta, x)$ задається (4).

У § 1.4 розв'язується задача про асимптотичну поведінку τ , коли доданки задані на ланцюгу Маркова.

Нехай $\{ U_i, i \geq 0 \}$ - однорідний ланцюг Маркова зі зліченою множиною станів з перехідною ймовірністю $p_{ij} = P\{ U_{i+1}=j / U_i=i \}$ і початковим розподілом $p_1 = P\{ U_0=1 \}$.

$\{ \xi_k(x), k \geq 0 \}$ - послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, які мають другий момент $E\xi_0^2(x) < \infty$ і залежать від параметру $x \geq 0$; ν - геометрична випадкова величина, яка не залежить в сукупності від послідовностей $\{ \xi_k(x) \}$ і $\{ U_i \}$. Позначимо

$$E(x) = E\xi_0(x); \quad \pi = \max_{x \geq 0} E(x); \\ m = \min_{x \geq 0} E(x); \quad x = \max_{x \geq 0} \frac{E\xi_0^2(x)}{2E^2(x)};$$

$$\tau = \sum_{j=0}^{\nu} \xi_j(U_j).$$

Нехай $m > 0$.

ТЕОРЕМА 1.4.1. Функція розподілу випадкової величини θt задовольняє оцінку

$$| P\{ \theta t < x \} - P\{ \theta \sum_{j=0}^{\nu} E(U_j) < x \} | \leq \frac{\theta^{1/3}}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{m^2} (x + 5/2) + \right. \\ \left. + \frac{48}{\pi} \right).$$

У другому розділі пропонуються оцінки швидкості збіжності сум геометричного числа випадкових величин у термінах теорії відновлення з наступним застосуванням до різних класів сумуємих доданків.

Розглянемо "ракующий" процес $\nu(t)$, який задається послідовністю $\{ \xi_i, i \geq 0 \}$ невід'ємних незалежних випадкових величин

$$\nu(t) = \begin{cases} \max \{ n: \sum_{i=0}^n \xi_i \leq t \} + 1, & \text{якщо } \xi_0 \leq t, \\ 0, & \text{якщо } \xi_0 > t. \end{cases}$$

Позначимо $H(t) = E\nu(t)$; $D(t) = E(\nu(t) - H(t))^2$;

Вважаємо, що $E\xi_i^2 < \infty$, $E\xi_i = 1$ для усіх $i \geq 0$.

ТЕОРЕМА 2.1.1. Для усіх $t > \theta$ справедлива наступна нерівність

$$| P\{ \theta\tau > t \} - (1-\theta)^{H(t/\theta)} | \leq \theta^2 / (2(1-\theta)^2) \exp(-\alpha t) D(t/\theta) + \\ + 2P\{ \nu(t/\theta) < \alpha t/\theta \},$$

де α - довільне число з інтервалу $(0, 1-\theta/t)$.

Надалі теорема 2.1.1 застосовується до випадків

- а) ξ_i однаково розподілені і ξ_0 задовольняє умові Крамера;
- б) ξ_i однаково розподілені і існує $E\xi_0^r < \infty$ для деякого цілого $r \geq 2$;
- в) ξ_i неоднаково розподілені і обмежені.

Наслідок 2.1.1. Нехай $\{ \xi_i, i \geq 0 \}$ - послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин і припустимо, що існує $\beta > 0$, таке, що $\gamma = E \exp(\beta \xi_0) < \infty$, тобто ξ_0 задовольняє умові Крамера. Тоді для $t > \max(\theta, -3\theta \ln \theta + \theta^2)$ виконується нерівність

$$| P\{ \theta\tau > t \} - (1-\theta)^{H(t/\theta)} | \leq A_\theta \theta [((4M_2 - 3) t + \\ + 2M_2 (M_2 - 1) \theta) c]^{1/\gamma / (1/\gamma + \theta)} \exp(-\beta t / (\theta + \ln \gamma)),$$

де $A_\theta = (1/(2(1-\theta)^2) + 2) \exp(1/(\ln \gamma + \theta))$;

$$c = (2M_2^2 + 2M_2 - 3)^{-1} \gamma^{-1} e^{-\theta}, \quad M_2 = E\xi_0^2.$$

Наслідок 2.1.2. Нехай $\{ \xi_i, i \geq 0 \}$ - послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин і існує $E\xi_0^r < \infty$ для деякого цілого $r \geq 2$. Тоді для $t > 2\theta$ справедливо

$$| P\{ \theta \tau > t \} - (1-\theta)^{H(t/\theta)} | \leq \theta t^{1-r} C_{r,\theta} .$$

$$\text{де } C_{r,\theta} = \frac{2^{r-2} r!}{(1-\theta)^3} (M_2^2 + 3M_2 - 3) + \theta^{r-2} 2^{r-1} [2^{r-1} (1+2/r)^r E|\xi_0-1|^r + \\ + ((r+2)^2 (M_2-1)e^r)^{r-1} (r-1)!] ; \quad M_2 = E\xi_0^2 .$$

Наслідок 2.1.3. Нехай послідовність $\{ \xi_i, i \geq 0 \}$ незалежних геодекнаково розподілених випадкових величин є обмеженою: $0 < \xi_1 < a < \infty$ для деякого $a > 1$ і усіх $i \geq 0$. Тоді для $t > \theta a \max(1, (a-1)^{-1})$ справедливо

$$| P\{ \theta \tau > t \} - (1-\theta)^{H(t/\theta)} | \leq \frac{\theta}{2(1-\theta)^3} \exp(-t/a) ((4a+3)t + \\ + (2a^2 + 3a - 1) \theta) .$$

Зауваження 2.1.1. В умовах наслідку 2.1.3 справедлива рівномірна оцінка

$$| P\{ \theta \tau > t \} - (1-\theta)^{H(t/\theta)} | \leq \frac{\theta}{2(1-\theta)^3} (6a^2 + 6a - 1)$$

У § 2.2 розглядається схема розрідження у класичній постановці, але для досить загального вхідного потоку.

Нехай $\{ \xi_i, i \geq 1 \}$ - послідовність невід'ємних випадкових величин, які задають 'рахувачий' процес

$$\nu(t) = \max\{ n: S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i \leq t \}$$

і мають другий момент. Потік підлягає розрідженню: кожна точка потоку залишається в ньому з ймовірністю θ і відкидається з ймовірністю $1-\theta$. Внаслідок такого розрідження відстань між сусідніми точками потоку являє собою суму геометричного числа випадкових величин. У параграфі знайдена оцінка зближення розрідженого потоку $\nu_\theta(t/\theta)$ з процесом Пуассона.

ТЕОРЕМА 2.2.1. Для довільного цілого $n \geq 0$ справедлива нерівність

$$| P\{ \nu_\theta(t/\theta) = n \} - \exp(-\theta H(t/\theta)) \frac{(\theta H(t/\theta))^n}{n!} | \leq \theta^2 H(t/\theta) + \theta^2 D(t/\theta),$$

$$\text{де } H(t) = E\nu(t), \quad D(t) = E(\nu(t) - H(t))^2.$$

Далі цей результат застосовується до випадків, коли початковий потік являє собою процес відновлення, і коли потік задається послідовністю неоднаково розподілених випадкових величин, які задовольняють деякій умові "старіння".

Нехай $\{ \xi_i, i \geq 1 \}$ є послідовністю незалежних однаково розподілених випадкових величин. Позначимо

$$M = E\xi_1, \quad \sigma^2 = E\xi_1^2 / (2M^2).$$

Наслідок 2.2.1. У даних припущеннях розріджений потік $\nu_\theta(t/\theta)$ збігається до процесу Пуассона при $\theta \rightarrow 0$ так, що справедлива оцінка

$$|P\{ \nu_\theta(t/\theta) = n \} - \exp(-t/M)(t^n / (M^n n!))| \leq \theta \left(\frac{t}{M} (8\sigma^2 - 2) + \right. \\ \left. + \max\{1, 2\sigma^2 - 1\} + (8\sigma^4 - 2\sigma^2 - 1)\theta \right)$$
 для усіх $n \geq 0$.

Наслідок 2.2.2. Нехай $\{ \xi_i, i \geq 1 \}$ є послідовністю незалежних випадкових величин, яка задовольняє умові

$$\sup_{1, x \geq 0} E(\xi_i - x / \xi_i > x) = \sup_{1, x \geq 0} \frac{1}{\bar{G}_1(x)} \int_x^\infty \bar{G}_1(y) dy \leq a < \infty,$$

де a - деяке число, $\bar{G}_1(x) = P\{ \xi_1 \geq x \}$, і $E\xi_1 = 1$ для усіх $i \geq 1$. Тоді розріджений потік $\nu_\theta(t/\theta)$ збігається до процесу Пуассона при $\theta \rightarrow 0$ так, що виконується оцінка

$$|P\{ \nu_\theta(t/\theta) = n \} - \exp(-t) \frac{t^n}{n!}| \leq \theta \left((4a + 4)t + a + \right. \\ \left. + (2a^2 + 4a - 1)\theta \right)$$

для усіх $n \geq 0$.

На завершення автор висловлює велику подяку доктору фізико-математичних наук професору Карташову М.В. за наукове керівництво, цінні поради і постійний інтерес до роботи.

Основні результати дисертації опубліковані у наступних роботах:

1. Сугакова Е.В. Асимптотическое поведение сумм геометрического числа независимых случайных величин в неоднородном случае // Деп. в Укр.НИИТИ 03.03.89, N 677-Ук89, 11 с.

2. Сугакова Е.В. Экспоненциальная асимптотика сумм геометрического числа независимых случайных величин // Теория вероятностей и мат. статистика. 1990. N 42, с.135-139.

3. Сугакова Е.В. Асимптотика редких потоков // Семинар "Статистический анализ данных". Тезисы докладов. Болгария. 1990. С. 112, 113.

4. Сугакова Е.В. Оценка скорости сходимости редкого потока к процессу Пуассона // Кибернетика. 1991. N 1. С. 128, 129, 131.

5. Сугакова О.В. Про збіжність суми геометричного числа випадкових величин, заданих на ланцюгу Маркова // Вісник Київського університету. Фізико-математичні науки. 1992. Вип. 7. С. 110-115.

6. Сугакова О.В. Оцінки з вагою для характеристики асимптотики сум незалежних випадкових величин // Теорія ймовірностей і мат. статистика. 1993. N 48. С. 185-190.

7. Sugakova E.V. Estimation of the Convergence Rate in Renyi's Theorem in Terms of Renewal Theory // First World Conference of Branching Processes. 5-12 September. 1993. Varna, Bulgaria.

АВ 29.297

Підписано до друку: 9.12.93. . Формат 84 x 108 1/16 .
Об'єм 90 тис. д. а. Зап. № 3640. Тираж 100 примірників.

Державне комунальне поліграфічне підприємство "Тираж"
м. Київ