ХАРЬКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ЯНЦЕВИЧ Артем Артемович

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГИЛЬБЕРТОВЫХ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ И НЕСТАЦИОНАРНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ

01.04.03 — радиофизика
01.01.02 — дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

ХАРЬКОВ 1993

Диссертация является рукописью.
Работа выполнена в Харьковском государственном университете.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, зав. теоретическим отделом ФТИ АН Украины, профессор **Бакай Александр Степанович**
доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник ИРЭ АН Украины, профессор **Басс Фридрих Гершонович**
доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник НИИ ядерных проблем при Белорусском государственном университете **Слепян Григорий Яковлевич.**

Ведущая организация — Симферопольский государственный университет.

Защита состоится « 1 » апреля 1994 г. в 14^{00} час. на заседании специализированного совета Д 023.01.07 Харьковского государственного университета (310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4, ауд.).

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке ХГУ.

Автореферат разослан « 28 » февраля 1994 г.

Ученый секретарь
специализированного совета В. И. Чеботарев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Исследование флуктуационных явлений при распространении волн в случайно-неоднородных средах требует статистического описания свойств волн и сред распространения. Таким исследованиям посвящено большое количество научных публикаций и сообщений, издан ряд монографий и сборников статей, отражающих многие аспекты современного состояния этой сложной и актуальной проблемы. Следует отметить, что изучение различных вероятностных задач, возникающих в радиотехнике и радиофизике, опирается, в основном, на корреляционную и спектральную теорию стационарных случайных процессов и статистически однородных случайных полей.

В отличие от традиционного подхода к исследованию случайных процессов как однопараметрического семейства случайных величин, развитого в работах N. Wiener'а, J. Doob'а, А.Я.Хинчина, P. Lévy и др. А.Н.Колмогоров предложил рассматривать случайный процесс как кривую в специальном гильбертовом пространстве. При этом, изучение случайных скалярных процессов как математических объектов достаточно сложной природы по сути дела сводится к изучению уже регулярных, хотя и векторнозначных функций. Это позволило использовать мощный аппарат функционального анализа, в частности, теорию линейных операторов, для построения корреляционной и спектральной теории стационарных случайных процессов и решения ряда задач фильтрации и прогноза таких процессов.

В дальнейшем такой подход получил развитие в работах H. Wold'а, M. Loeve, А.М.Яглома, Ю.А.Розанова, H. Cramer'а, М.И.Ядренко и др., что привело к построению завершенной корреляционной теории стационарных случайных процессов и однородных случайных полей.

Что касается нестационарных случайных процессов, то к настоящему времени изучены лишь некоторые отдельные классы: процессы со стационарными приращениями (А.М.Яглом, М.С.Пинскер); процессы, порождаемые фильтрацией нестационарного белого шума (R. Kalman); процессы, порождаемые ортогональными разложениями (В.С.Пугачев, K. Karhunen).

Достаточно полной теории нестационарных случайных процессов в настоящее время не существует, в частности, например, отсутствуют: достаточно корректное понятие такой фундаментальной величины чрезвычайно важной для приложений, как спектр нестационарного случайного процесса; мера нестационарности, классификация нестационарных случайных процессов и др. Кроме того, не изучен целый ряд специальных нестационарных случайных процессов, которые могут играть важную роль для приложений, например, при распространении волн в случайных статистически неоднородных или нестационарных средах, задачах фильтрации и прогноза случайных сигналов и др.

Цель работы. Обобщить Колмогоровский подход на достаточно широкие классы нестационарных случайных процессов (эволюционно представимых), построить корреляционную и спектральную теорию таких процессов и разработать соответствующий математический аппарат. Рассмотреть также приложения к задачам фильтрации нестационарных случайных сигналов, распространению волн в статистически неоднородных (с конечным рангом неоднородности) средах.

Методы исследования. являются спектрально-аналитическими. Теория несамосопряженных или неунитарных операторов в гильбертовом пространстве, треугольные и универсальные модели операторов. Используется также теория целых функций многих комплексных переменных и теория оператор-функций с операторным аргументом.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

I. Впервые построена теория эволюционно представимых решений линейных динамических систем в гильбертовых пространствах, ассоциированных с операторными узлами, содержащими несамосопряженные или неунитарные операторы.

I.I. Установлено соответствие между законами сохранения (изменения) энергии условиями операторных узлов.

I.2. Предложен общий пособ расширения линейных динамических систем до ассоциированных с операторными узлами.

I.3. Изучены передаточные оператор-функции операторного аргумента и установлена их связь с унитарной эквивалентностью операторных узлов.

I.4. Построены универсальные модели операторов и систем операторов, используемые, в частности, в корреляционной теории нестационарных случайных процессов и неоднородных случайных полей.

П. Впервые предложен новый метод исследования нестационарных случайных процессов и неоднородных случайных полей, основанный на треугольных и универсальных моделях операторов и на теории ассоциированных открытых систем.

2.I. Введены новые характеристики нестационарных случайных процессов и неоднородных случайных полей: инфинитезимальная корреляционная функция, корреляционная разность, ранг нестационарности или неоднородности, и на их основе предложена классификация нестационарных случайных процессов и неоднородных случайных полей.

2.2. Для широких классов так называемых эволюционно представимых случайных процессов и неоднородных случайных полей доказаны теоремы, являющиеся аналогами теоремы Бохнера-Хинчина и дающие критерии эволюционной представимости случайных процессов и полей в терминах корреляционных функций.

2.3. Для эволюционно представимых нестационарных случайных процессов и неоднородных случайных полей построена корреляционная теория, позволившая получить спектральные разложения нестационарных случайных процессов и неоднородных случайных полей в виде континуальных или дискретных суперпозиций гармонических колебаний с комплексными частотами.

2.4. Установлена связь между классами нестационарных случайных процессов и решениями нелинейных операторных уравнений, позволившая построить новые спектральные разложения нестационарных случайных процессов с помощью стандартной стохастической ортогональной меры.

Ш. Впервые построена теория фильтрации нестационарных случайных сигналов, основанная на теории операторных узлов в гильбертовых пространствах.

3.I. Используя теорию операторных узлов получено явное решение суммационного уравнения Винера-Хопфа, определяющего передаточную функцию оптимального среднеквадратичного фильтра, минуя решение матричного уравнения Риккати.

3.2. С помощью спектральной теории неунитарных операторов исследована устойчивость оптимального среднеквадратичного фильтра.

3.3. Предложена процедура нахождения оптимального среднеквадратичного фильтра в случае, когда уравнения состояния являются интегральными.

3.4. Предложен способ обращения некоторых классов интегральных операторов, основанный на операторных коммутационных соотношениях.

IУ. Впервые решена задача о восстановлении неоднородного аналитического случайного поля по значениям в узлах пространственной решетки и исследована устойчивость соответствующих интерполяционных формул (аналог теоремы отсчетов Котельникова-Шеннона-Уиттекера).

4.I. Построены интерполяционные представления для некоторых новых классов детерминированных целых аналитических полей и исследована устойчивость таких представлений.

4.2. Построены интерполяционные представления для неоднородных случайных аналитических пространственных сигналов и исследована устойчивость таких представлений.

4.3. Изучены аналитические свойства выборочных функций неоднородных случайных полей.

У. Исследование вопросов, связанных с прикладными радиофизическими задачами и демонстрирующих новые возможности построенной корреляционной теории нестационарных случайных процессов и неоднородных случайных полей.

5.I. Решение задачи дифракции монохроматической волны на статистически неоднородном экране.

5.2. Учет статистической неоднородности среды при решении задачи о деполяризации электромагнитной волны, распространяющейся в такой среде.

5.3. Решение задачи о прохождении света через турбулентный пограничный слой, когда предположение о статистической однородности полей скоростей или давления нарушаются.

5.4. Исследование структуры среднего электромагнитного поля в статистически нестационарных средах.

Результаты диссертации составляют содержание нового научного направления "Эволюционные представления гильбертовых случайных функций" и корреляционная теория нестационарных случайных процессов и статистически неоднородных случайных полей".

Научная новизна. В основные положения, выносимые на защиту, включены только новые результаты. Они представляют собой основу корреляционной теории нестационарных случайных процессов и неоднородных случайных полей, играющей важную роль при решении ряда задач статистической радиофизики и статистической радиотехники.

Введены новые характеристики случайных процессов и полей, такие, как ранг нестационарности или неоднородности, инфинитезимальная корреляционная функция, корреляционная разность, спектр нестационарного случайного процесса или неоднородного случайного поля.

Новыми являются также интерполяционные формулы для детерминированных и случайных аналитических сигналов, играющих важную роль в теории кодирования сигналов. Изложены также новые математические результаты автора по спектральной теории несамосопряженных или неунитарных операторов, по теории дифференциальных или разностных уравнений в гильбертовом пространстве. Новыми являются результаты автора по построению оптимальных среднеквадратичных фильтров, перспективных в плане применений в статистической радиотехнике.

Обоснованность и достоверность результатов и выводов обусловлена использованием строгих математических методов и качественным совпадением с результатами экспериментальных задач при решении ряда прикладных задач.

Диссертация выполнена в русле важной научно-исследовательской тематики "Теория несамосопряженных и неунитарных операторов с приложениями в теории линейных систем и случайных функций" (номер государственной регистрации 0182.4029433).

Теоретическая и практическая значимость. Работа связана с построением и обоснованием новых методов для статистической радиофизики. Часть результатов относится непосредственно к теории распространения электромагнитных волн в случайных средах, оптимальной обработке случайных сигналов. Другая часть - к теории дифференциальных и разностных уравнений в гильбертовых пространствах (теория ассоциированных открытых систем), к которым сводится математическое описание широких классов нестационарных случайных процессов и неоднородных случайных полей.

Новые характеристики случайных функций, введенные в диссертации (ранг нестационарности и неоднородности, инфинитезимальная корреляционная функция, корреляционная разность), корреляционная теория случайных функций конечного ранга, построенная в диссертационной работе, представляют существенный интерес для статистической радиофизики и статистической радиотехники, т.к. позволяют создавать новые модели случайных сред или случайных сигналов. Теория среднеквадратичной фильтрации, построенная в диссертации на основе операторных узлов, позволяет строить оптимальные фильтры с улучшенными характеристиками.

Развитие данного научного направления также нашло отражение в работах аспирантов, выполненных под руководством автора.

Апробация работы и публикации. Результаты работы докладывались: на Третьем Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной математике, на У Всесоюзном симпозиуме по дифракции и распространению волн, на УI Всесоюзной акустической конференции, на Всесоюзной конференции по теории функций комплексного переменного (Харьков, 1971 г.), на IУ и УI Всесоюзных симпозиумах "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики", на Всесоюзном симпозиуме по статистике случайных процессов (Киев, 1973 г.), на П Всесоюзном семинаре по численным методам нелинейного программирования; на научных семинарах академика Марченко В.А. (Харьков), проф. Кужеля А.В. (Симферополь), проф. Третьякова О.А. (Харьков).

Основные результаты диссертации опубликованы в 41 работах, приведенных в конце автореферата, среди них монография, переработанный вариант которой был издан в США в 1979 г.

Объем и структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, семи глав, выводов и списка цитированной литературы и занимает 380 страниц машинописного текста.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность исследований, проведенных в диссертации, сформулирована цель работы и проведено краткое изложение диссертации.

В § I первой главы рассматриваются случайные процессы второго порядка, т.е. для которых $M|\xi(t)|^2 < \infty$.

Если рассмотреть линеал $\mathcal{L}: \{\sum_{k\in N} c_k \xi(t_k)\}$, ввести в нем скалярное произведение $\langle x,y\rangle_{\mathcal{L}} = Mx\bar{y},\ x,y\in\mathcal{L}$, и пополнить по этой метрике $\mathcal{L}$, то получаем сепарабельное гильбертово пространство H_ξ, при этом случайный процесс $\xi(t)$ можно рассматривать как кривую ξ_t в H_ξ, а корреляционная функция КФ $K(t,s) = M\xi(t)\overline{\xi(s)}$ получается как скалярное произведение в $H_\xi : K(t,s) = \langle \xi_t, \xi_s\rangle_{H_\xi}$.

Определение. Случайный процесс $\xi(t)$ называется эволюционно представимым, если соответствующая кривая ξ_t в гильбертовом пространстве H_ξ является решением АЗК /абстрактной задачи Коши/

$$\mathcal{L}_t \xi_t = iA\xi_t, \text{ и соответствующие начальные условия} \qquad (1)$$

где $\mathcal{L}_t$ - скалярный линейный дифференциальный или интегро-дифференциальный оператор, а A - линейный, вообще говоря, неограниченный оператор в H_ξ.

При $\mathcal{L}_t = \frac{d}{dt}$ получаем стандартную задачу Коши, которая приводит к решению $\xi_t = e^{itA}\xi_0$, являющемуся одним из основных эволюционных представлений, исследуемых в диссертации.

Для случайных полей t заменяется мультииндексом, а A семейством операторов $\{A_k\}_{k=1}^{n}$.

Далее доказывается два важных для дальнейшего утверждения, состоящие в том, что если у двух случайных процессов или полей КФ совпадает, то они унитарно эквивалентны в соответствующих гильбертовых пространствах, и если один из процессов (полей) эволюционно представим, то эволюционно представим и другой (теоремы I.I и I.2).

В терминах корреляционной функции дается критерий эволюционной представимости:

<u>Теорема I.3.</u> Для того, чтобы комплекснозначная функция действительных переменных $K(x,y)$, $x,y \in D \subseteq R_n$ могла быть представлена в виде $K(x,y) = \langle h(x), h(y) \rangle$, где $h(x) = e^{iAx} h_0$, $h_0 \in H$, $Ax = \sum_{j=1}^{n} A_j x^j$, $x = (x^1, \dots, x^n)$ и A_j - линейные, коммутирующие, ограниченные операторы в гильбертовом пространстве , необходимо и достаточно, чтобы

I. Функция $K(x,y)$ была эрмитово неотрицательной.

2. $K(x,y)$ дважды непрерывно дифференцируема.

3. Существовала такая константа $\mu > 0$, что

$$\Big| \sum_{\ell,m} a_\ell \bar{b}_m \mathcal{L}_j(x_\ell, y_m) \Big|^2 \le \mu \sum_{\ell,m} K(x_\ell, x_m) a_\ell \bar{a}_m \sum_{p,q} K(y_p, y_q) b_p \bar{b}_q,$$

для $\forall x_k, y_p \in D$ и $\forall a_k, b_p \in C (k,p = \overline{1,n})$ где $\mathcal{L}_j(x,y) = \dfrac{\partial K(x,y)}{\partial x^j}$.

Для случайных последовательностей x_ℓ и y_m заменяются на ℓ и m, а $\mathcal{L}_j \to Ш(\ell,m) = K(\ell,m) - K(\ell+1, m+1)$, где $K(\ell,m)$ - корреляционная функция случайной последовательности $\xi(n)$.

В дальнейшем изучаются в основном, экспоненциально представимые случайные процессы и поля.

В § 2 изучается связь между операторными узлами в гильбертовых пространствах и эволюционными уравнениями.

<u>Определение</u>. Пару отображений R и S : $R\in[E,H]$, $S\in[E,E]$, где E и H два гильбертовых пространства, будем называть открытой системой.

Если R и S линейные отображения, то в пространствах H и E (пространствах состояний) эти отображения обычно задаются парой уравнений

$$\begin{cases} i\dfrac{dh}{dt}+Ah=\varphi u(t), & h|_{t=0}=h_0,\\ V(t)=u(t)+\psi h(t) \end{cases} \qquad (2)$$

$A\in[H,H]$, $\varphi\in[E,H]$, $\psi\in[H,E]$, $h(t)\in H$, $u(t), V(t)\in E$.

Введем в пространстве E наряду с обычным скалярным произведением индефинитное скалярное произведение: $[u,v]_E=\langle Ju,v\rangle_E$, где J - оператор инволюции: $J^*=J$, $J^2=I$; "сопряжение" по отношению к этой метрике будем обозначать "+".

Если для (2) выполняется закон "сохранения" энергии $\frac{d}{dt}\|h\|^2=[V,V]_E-[u,u]_E$, то как легко непосредственно проверить, что A,φ,ψ не независимы, а связаны соотношениями

$$\frac{A-A^*}{i}=\varphi\varphi^+=\varphi J\varphi^*, \quad \psi=-i\varphi^+ \qquad (3)$$

которые в теории несамосопряженных операторов называются условиями операторного узла, а совокупность (A,H,φ,E,J), удовлетворяющая (3), называется операторным узлом. Систему (2), где A,φ,ψ удовлетворяют (3) будем называть ассоциированной системой (АС).

Любой оператор можно включить в операторный узел, а любая система вида (2) может быть расширена до ассоциированной системы только за счет расширения внешних пространств (теорема I.4).

В § 3 изучаются дискретные линейные системы и выводится соответствующий закон изменения энергии.

Далее доказывается важная теорема I.5 о расширении любой линейной дискретной системы до ассоциированной с операторным узлом.

В заключении этого параграфа показывается, что непрерывные АС и дискретные АС тесно связаны между собой и дискретная АС может быть получена из непрерывной АС дискретизацией по времени, причем для "согласованной" дискретизации существенную роль играет закон сохранения энергии.

В § 4 конструируются треугольные и универсальные модели операторов и операторных узлов, необходимые для построения корреляционной теории нестационарных случайных процессов и неоднородных случайных полей. Треугольная модель оператора является аналогом треугольной матрицы в бесконечномерном случае и впервые была построена М.С.Лившицем.

Универсальные модели "конструируются" из треугольных моделей, построенных для случая $\dim 2\,\mathrm{Im}\,AH=1$ (или $\dim (I-T^*T)H=1$) (теоремы I.6–I.10). Существенным условием при построении треугольных моделей систем операторов является их коммутируемость и дважды перестановочность.

Рассмотрим теперь абстрактную задачу Коши (АЗК) в гильбертовом пространстве

$$i\frac{dh}{dt}+Ah=0,\quad h\big|_{t=0}=h_0 \tag{4}$$

В § 4 доказаны следующие теоремы

Теорема I.II. Если A – полный диссипативный ограниченный оператор, то решение АЗК (4) асимптотически устойчиво.

Теорема I.I2. Если оператор A в АЗК (4) является сцеплением полного диссипативного оператора и вольтеррова оператора, то решение задачи Коши асимптотически устойчиво.

В заключении этого параграфа вводится понятие унитарной эквивалентности узлов и доказываются теоремы I.13 и I.14 об унитарной эквивалентности, причем предложен оригинальный метод доказательства, основанный на свойствах функций $W(x,y)$ и $W(n,m)$, тесно связанных с соответствующими корреляционными функциями и играющих фундаментальную роль в корреляционной теории нестационарных случайных функций и неоднородных случайных полей.

Во второй главе исследуются эволюционно представимые решения неоднородных линейных дифференциальных и разностных уравнений в гильбертовом пространстве. Предполагается, что эти уравнения являются уравнениями эволюционной системы, ассоциированной с операторным узлом (АС).

В § I вводится понятие корреляционного оператора $\Phi(t,s) = \varphi^* T^*(s) T(t) \varphi$ операторного узла. Свойства $\Phi(t,s)$ описаны в теореме 2.I.

Существует следующая связь между $\Phi(t,s)$ и характеристической оператор-функцией $W(\lambda)$ операторного узла:

$$\Phi(t,s) = \frac{1}{4\pi^2} \oint_\gamma \oint_\gamma \frac{I - W^*(\mu) J W(\lambda)}{i(\lambda - \bar{\mu})} e^{i(s\lambda - \bar{\mu} t)} \, d\lambda \, d\bar{\mu}, \quad (5)$$

где γ - контур, охватывающий спектр оператора A.

Далее изучается эволюционная представимость внутренних состояний и выходов непрерывных АС, порождаемая эволюционно представимым входом. Соответствующие необходимые и достаточные условия содержатся в теореме 2.4.

При исследовании вопроса об эволюционной представимости естественно возникает следующая операторная функция $S_X(A)$ операторного аргумента $S_X(A) = I - i\varphi^+(T-A)^{-1}\varphi$, которая является продолжением характеристической функции на область операторных аргументов. Эта функция играет фундаментальную роль при исследовании вопроса об унитарной эквивалентности операторных узлов.

В качестве примера иллюстрирующего полученные выше результаты, рассмотрены эволюционно представимые состояния ассоциированной системы, соответствующей четырехполюснику. В этом же параграфе исследованы специальные линейные системы, связанные с операторными функциями $R_X(A)=(T-A)^{-1}\varphi$ и $S_X(A)=I-i\varphi^+(T-A)^{-1}\varphi$, и изучено поведение этих функций при сцеплении операторных узлов и соответствующих АС.

Во втором параграфе при помощи теории метрических операторных узлов исследуется проблема эволюционной представимости для линейных дискретных систем типа (4) и получен следующий критерий эволюционной представимости (теорема 2.5).

Приведены два примера АС, для которых построены матрицы $B_{\mathcal{I}}$. Для сильно неунитарных M -узлов $(\exists\Phi^{-1})$ доказано более сильное утверждение, чем теорема 2.5.

В заключении этого параграфа изучена структура оператор-функций $R_M(A)$ и $W_M(A)$ при сцеплении операторных узлов.

В § 3 подробно исследуются свойства оператор-функции $S_X(A)$ возникшей при изучении вопроса об эволюционной представимости непрерывных АС. Показано, что $S_X(A)$ является в верхней операторной полуплоскости $(\mathrm{Im}\,A>0)$ двусторонним J-растяжением, а в нижней операторной полуплоскости $(\mathrm{Im}\,A<0)$ - двусторонним J-сжатием; если же оператор A самосопряжен, то $S_X(A)$ является J-унитарным.

При дополнительных условиях доказано (теорема 2.9), что если операторные узлы унитарно эквивалентны, то $S_{X_1}(A)=S_{X_2}(A)$ А теоремы 2.10 и 2.12 содержат обратное утверждение.

В § 4 исследуется проблема унитарной эквивалентности метрических узлов в терминах операторной функции $W_M(A)$. Доказано при некоторых дополнительных предположениях, что из унитарной эквивалентности метрических узлов вытекает равенство оператор-функций $W_{M_1}(A)=W_{M_2}(A)$ (теорема 2.14). Показано, что имеет место и обратный факт.

Если же один из простых узлов сильно неунитарен, то из совпадения оператор-функций $W_{M_1}(A)=W_{M_2}(A)$ в окрестности бесконечно удаленного оператора следует, что $T_1=T_2$ и $\Phi_2=\lambda\Phi_1$, где $|\lambda|=1$.

В третьей главе вводятся характеристики случайных процессов и полей, с помощью которых можно описать степень нестационарности или неоднородности.

<u>Определение</u>. Инфинитезимальной корреляционной функцией случайного процесса (ИКФ) называется производная от корреляционной функции вида

$$W(t,s)=-\frac{\partial}{\partial\tau}K(t+\tau,s+\tau)\Big/_{\tau=0} \tag{6}$$

<u>Определение</u>. Корреляционной разностью (КР) случайной последовательности называется функция $W(m,n)$, определяемая по корреляционной функции следующим образом

$$W(m,n)=K(m,n)-K(m+1,n+1) \tag{7}$$

Очевидно, что для стационарных случайных функций $W(t,s)\equiv 0$ и $W(m,n)\equiv 0$, поэтому эти функции могут служить "мерой" отклонения от стационарности.

Для случайных полей вводятся частные инфинитезимальные корреляционные функции (ЧИКФ) или частные корреляционные разности (ЧКР), а для векторных случайных процессов – инфинитезимальная корреляционная матрица (ИКМ).

Для эволюционно представимых случайных кривых и последовательностей ИКФ и КР имеют соответственно вид:

$$W(t,s)=\langle 2\,\mathrm{Im}\,A\,\xi_t,\xi_s\rangle,\ W(m,n)=\langle (I-T^*T)\xi_m,\xi_n\rangle \quad (8)$$

где $\xi_t=e^{itA}\xi_0$, а $\xi_n=T^n\xi_0$.

Из (8) видно, что нестационарность случайной функции тесно связана с отклонением оператора от сопряженного или унитарного.

С помощью ИКФ и КР можно ввести числовую характеристику нестационарности. Для этого рассмотрим квадратичные формы вида

$$\sum_{l,m=1}^{n} W(t_l,t_m)a_l\bar{a}_m \quad (n=1,2,\dots) \quad (9)$$

(для нестационарных последовательностей t_l и t_m заменяются соответственно на l и m).

<u>Определение</u>. Рангом нестационарности назовем максимальный ранг квадратичных форм (9).

В силу (8) имеется тесная связь между рангом нестационарности и размерностью подпространства неэрмитовости $G_A=\overline{2\,\mathrm{Im}\,AH}$ оператора A или размерностью подпространства неунитарности $G_T=\overline{(I-T^*T)H}$ оператора T ; оказывается, ранг нестационарности и размерность $G_A(G_T)$ совпадают (теоремы 3.I и 3.2). Аналогичные утверждения справедливы для рангов случайных полей и векторных случайных процессов (теоремы 3.3 и 3.4).

В § 3 третьей главы вводится понятие спектра эволюционно представимой кривой или эволюционно представимого случайного процесса.

<u>Определение</u>. Спектром эволюционно представимого случайного процесса будем называть спектр оператора A или T в эволюционных представлениях $\xi_t=e^{itA}\xi_0$, $\xi_n=T^n\xi_0$.

Если спектр оператора A или T дискретный, то случайная функция имеет чисто дискретный спектр, если у A или T спектр непрерывный, то и у случайной функции непрерывный спектр.

В общем случае у операторов A и T спектр смешанный, поэтому структура спектра случайного процесса смешанная. В отличие от стационарных случайных функций, у нестационарных функций появляются принципиально новые случаи спектра, например, изолированный бесконечнократный спектр (Вольтерровы операторы). Поэтому использование эволюционно представимых процессов расширяет возможности описания реальных случайных процессов по сравнению со стационарными процессами или процессами со стационарными приращениями.

Если все квадратичные формы $\sum_{\ell,m} W(t_\ell, t_m) a_\ell \bar{a}_m$ неотрицательны, то соответствующий случайный процесс называется диссипативным.

Для диссипативных случайных процессов $K(t,t)$ невозрастающая функция t и, следовательно, существует $\lim_{t\to\infty} K(t,t) = \sigma_\infty^2$.

Если $\sigma_\infty^2 = 0$, то случайный диссипативный процесс будем называть асимптотически затухающим, в противном случае - асимптотически незатухающим.

Для диссипативного случайного процесса всегда существует $\lim_{\tau\to\infty} K(t+\tau, s+\tau) = K_\infty(t-s)$ (теорема 3.5), причем $K_\infty(t-s)$ можно рассматривать как КФ некоторого стационарного случайного процесса. Из определения ИКФ и теоремы 3.5 получаем следующую важную формулу для диссипативного случайного процесса

$$K(t,s) = K_\infty(t-s) + \int_0^\infty W(t+\tau, s+\tau)\,d\tau \qquad (10)$$

Если процесс асимптотически затухает, то $K(t,s)$ по $W(t,s)$ восстанавливается однозначно:

$$K(t,s) = \int_0^\infty W(t+\tau, s+\tau)\,d\tau \qquad (11)$$

Если процесс ξ_t эволюционно представим, то из диссипативности процесса следует диссипативность оператора A, т.е. неотрицательность мнимой части $2\,\mathrm{Im}\,A \geqslant 0$.

<u>Определение</u>. Эволюционно представимый случайный процесс бу-

дем называть полным, если соответствующий оператор A является полным диссипативным оператором (замыкание линейной оболочки всех инвариантных подпространств, отвечающих невещественным точкам спектра оператора A , совпадает с H_ξ).

Очевидно, что полный диссипативный случайный процесс всегда является асимптотически затухающим. Асимптотически незатухающие процессы могут возникнуть только в связи с неполнотой оператора .

Аналогично вводится понятие диссипативности для нестационарных последовательностей и доказывается, что для полных диссипативных последовательностей

$$K(m,n)=\sum_{\tau=0}^{\infty} W(m+\tau, n+\tau) \tag{12}$$

Сформулирован и доказан также критерий диссипативности для векторных случайных последовательностей (теорема 3.6), а также исследованы диссипативные случайные поля.

В § 4 изучаются эволюционно представимые случайные процессы, порождаемые задачей Коши в соответствующем гильбертовом пространстве с нестационарным оператором $A(t)$. Дан критерий эволюционной представимости в терминах КФ (теорема 3.7).

В прикладных задачах для КФ часто приходят к уравнениям в частных производных. В связи с этим представляют интерес классы нестационарных эволюционно представимых случайных процессов, порождаемых уравнениями для КФ, при этом для $A(t)$ получаются нелинейные эволюционные операторные уравнения. В ряде случаев решение этих уравнений найдено в явном виде, что приводит к новым спектральным представлениям некоторых классов нестационарных случайных функций.

Так, если КФ $K(t,s)=\langle \xi_t, \xi_s \rangle$ удовлетворяет уравнению $(\partial_t^2-\partial_s^2)K(t,s)=0$, то для $A(t)$ получаем нелинейное уравнение Риккати с самосопряженной правой частью $\frac{dA}{dt}+A^2=B$, а для кривой ξ_t уравнение $\xi_t''=B\xi_t$. Воспользовавшись спектральным разложением самосопряженного оператора B, для $A(t)$ получаем представление

$$A(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\lambda}\, th\sqrt{\lambda}t\, dE_\lambda, \tag{13}$$

где E_λ - разложение единицы, а для ξ_t представление

$$\xi_t=\int_{-\infty}^{\infty} ch\sqrt{\lambda}t\, d\eta(\lambda), \tag{14}$$

где $\Delta\eta(\lambda)=\Delta E_\lambda \xi_0$ - процесс с ортогональными приращениями, $K(t,s)$ при этом имеет вид

$$K(t,s)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}[ch\sqrt{\lambda}(t-s)+ch\sqrt{\lambda}(t+s)]dF(\lambda), \tag{15}$$

где $F(\lambda)$ - неубывающая функция ограниченной вариации.

Аналогично можно исследовать случаи, когда $K(t,s)$ является решением уравнений $(\partial_t^2+\partial_s^2)K(t,s)=0$, $(\partial_t^3-\partial_s^3)K(t,s)=0$, $\{[\partial_t^2-p(t)]-[\partial_s^2-p(s)]\}K(t,s)=0$.

Предложенный подход может быть распространен и на случай двух эволюционных операторов (эволюционно представимые поля). В этом случае приходим к нелинейным операторным уравнениям в частных производных, в частности, получаем уравнение Бюргерса. В этой же главе исследованы эволюционно представимые кривые, к которым приводят уравнения для КФ в частных производных со специальной правой частью, т.е. когда оператор $A(t)$ несамосопряжен.

В четвертой главе на основе треугольных и универсальных моделей несамосопряженных и унитарных операторов, а также ассоциированных систем, построена корреляционная теория случайных функций конечного ранга нестационарности (неоднородности).

В § I получен общий вид ИКФ $W(t,s)$ и КФ $K(t,s)$ для нестационарных диссипативных случайных процессов $\xi_t=e^{itA}\xi_0$, конечного ранга r с непрерывным временем (теоремы 4.I, 4.3, 4,5, 4.7)

$$W(t,s)=\sum_{\alpha=1}^{r}\varphi_\alpha(t)\overline{\varphi_\alpha(s)}, \tag{I6}$$

$$K(t,s)=\sum_{\alpha=1}^{r}\int_0^\infty \varphi_\alpha(t+\tau)\overline{\varphi_\alpha(s+\tau)}\,d\tau \tag{I7}$$

В случае чисто дискретного спектра у оператора A функции $\varphi_\alpha(t)$ в формулах (I6-I7) строятся только по спектру, оператора A и начальным условиям и имеют вид

$$\varphi_\alpha(t)=\sum_{k=1}^{\infty}c_{k,\alpha}\Lambda_k(t),\quad \sum_{k=1}^{\infty}|c_{k,\alpha}|^2<\infty \tag{I8}$$

где

$$\Lambda_k(t)=-\frac{1}{2\pi i}\sqrt{2\operatorname{Im}\lambda_k}\oint_\gamma\frac{e^{i\lambda t}}{\lambda_k-\lambda}\prod_{j=1}^{k-1}\frac{\bar\lambda_j-\lambda}{\lambda_j-\lambda}\,d\lambda. \tag{I9}$$

Если оператор A - вольтерров, т.е. имеет бесконечнократный спектр, сосредоточенный только в нуле, то $\varphi_\alpha(t)$ вычисляется по формуле

$$\varphi_\alpha(t)=\int_0^l f_{0,\alpha}(x)\,J_0(2\sqrt{tx})\,dx, \tag{20}$$

причём $\int_0^l |f_{0,\alpha}(x)|^2dx<\infty,\ (\alpha=1,2,\dots,r)$

Таким образом, КФ и ИКФ строятся только по спектру оператора A и начальным данным.

В этом же параграфе показано (теоремы 4.2, 4.4, 4,6, 4.8), как по КФ или ИКФ можно решить обратную задачу, т.е. восстановить гауссовский диссипативный случайный процесс конечного ранга, имеющий заданную ИКФ или КФ.

Отметим, что при решении прямой и обратной задач существенную роль играют треугольные и универсальные модели диссипативных операторов.

В § 2 на основе треугольных и универсальных моделей для сжимающих операторов получен вид КР и КФ для нестационарных случайных последовательностей (теоремы 4.9-4.12), причем как и в случае диссипативных случайных процессов, структура КФ и КР определяется только спектром соответствующего оператора и начальными данными.

Отметим, что использование универсальных моделей несамосопряженных и неунитарных операторов позволяет построить процедуру нахождения ИКФ, КР и КФ случайных функций конечного ранга по ИКФ, КФ и КР случайных функций только первого ранга. Это связано с тем, что все универсальные модели операторов строятся по сути дела только по спектру оператора.

В § 3 на основе треугольных моделей систем коммутирующих операторов получен общий вид ИКМ для векторных эволюционных процессов в случае чисто дискретного спектра у соответствующих операторов, непрерывного спектра и смешанного спектра (у одного оператора чисто дискретный спектр, а у другого - чисто непрерывный).

В § 4 строится корреляционная теория эволюционно представимых случайных полей $\xi(x_1,x_2)=exp(ix_1A_1+ix_2A_2)\xi_0$ конечного ранга. Дан критерий дважды перестановочности операторов A_1 и A_2 в терминах корреляционной функции (теорема 4.12).

Получен общий вид ИКФ для различных случаев спектра. Далее рассмотрен случай, когда операторы A_1 и A_2 являются неограниченными.

§ 5 посвящен построению ИКФ, КР и КФ для конкретных случаев спектра и начальных условий.

Для полных диссипативных случайных эволюционно представимых процессов введен нестационарный случайный процесс первого ранга, который назван процессом Бари-Рисса в ℓ_2, ИКФ которого имеет вид $W(t,s)=\varphi(t)\overline{\varphi(s)}$, где

$$\varphi(t)=\sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{i\lambda_k t}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|C_k|^2}{|2\operatorname{Im}\lambda_k|}<\infty, \quad \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{(2\operatorname{Im}\lambda_i)(2\operatorname{Im}\lambda_j)}{|\lambda_i-\bar{\lambda}_j|}<\infty$$

все λ_j – различные и простые, КФ процесса Бари-Рисса имеет вид

$$K(t,s)=\sum_{\ell,j=1}^{\infty} \frac{C_\ell \bar{C}_j e^{i\lambda_\ell t-i\bar{\lambda}_j s}}{i(\bar{\lambda}_j-\lambda_\ell)} \tag{21}$$

Вольтерровым случайным процессом в $L_2[0,\ell]$ в диссертационной работе назван диссипативный случайный эволюционно представимый процесс первого ранга со спектром в нуле и начальным условием, совпадающим с каналовым элементом. Для такого процесса $W(t,s)=\varphi(t)\overline{\varphi(s)}$, где $\varphi(t)=\sqrt{\frac{\ell}{t}}\,J_1(2\sqrt{t\ell})$, а КФ имеет вид

$$K(t,s)=\ell\int_0^{\infty} \frac{J_1(2\sqrt{(t+\tau)\ell})\,J_1(2\sqrt{(s+\tau)\ell})}{\sqrt{(t+\tau)(s+\tau)}}\,d\tau \tag{22}$$

В случае процесса ξ_t вида $\xi_t=e^{itA}\xi_0$ в $L^2[0,\ell]$, где $A=i\frac{\partial}{\partial x}$, т.е. отсутствия спектра в конечной части комплексной плоскости, КФ имеет вид

$$K(t,s)=\begin{cases} \int\limits_{\max(t,s)}^{\ell} \psi_0(x-t)\overline{\psi_0(x-s)}\,dx, & t,s\in[0,\ell], \\ 0 & t,s\bar{\in}[0,\ell] \end{cases}$$

где $\psi_0(x)=\xi_t|_{t=0}$ – произвольная функция из $L^2_{[0,\ell]}$

В § 5 получен также общий вид КР и КФ для нестационарных последовательностей Бари-Рисса и вольтерровых нестационарных последовательностей, приведен пример ИКФ для случайного поля в случае смешанного спектра.

Приведенные примеры можно использовать для моделирования нестационарных случайных процессов в различных физических системах.

§ 6 посвящен получению спектральных разложений нестационарных случайных функций и неоднородных случайных полей.

Введено понятие каналового процесса, т.е. процесса, значения которого принадлежат каналовому подпространству. Каналовые процессы разделяются на два класса: прямые и обратные, соответствующие "положительной" и "отрицательной" части инволюции. Установлена связь между ИКФ процесса и КФ входного и выходного каналовых процессов (теорема 4.29).

В случае полного диссипативного случайного процесса конечного ранга получено представление процесса

$$\xi_t = e^{itA}\xi_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(t)\xi_k, \text{ где } M\xi_k\bar{\xi}_j = \langle \xi_k, \xi_j \rangle_{H_\xi} = \delta_{kj} \quad (23)$$

а $\psi_k(t)$ определяются из системы рекуррентных уравнений.

Разложение (23), представляющее собой суперпозицию внутренних состояний осцилляторов с комплексными частотами и некоррелированными амплитудами можно рассматривать как спектральное представление нестационарного случайного диссипативного процесса в случае чисто дискретного спектра. При этом элементы разложения $\psi_k(t)$ оказываются связанными между собой при помощи случайных процессов, лежащих в фиксированном гильбертовом пространстве, размерность которого совпадает с рангом нестационарности.

Разложение (23) является обобщением соответствующего спектрального разложения стационарного случайного процесса. При $\tau = 0$ каналовое пространство $E = \overline{2\,\mathrm{Im}\,AH}$ и внутренние состояния осцилляторов не связаны между собой, а λ_k - являются вещественными и разложение (23) переходит в этом случае в известное представление для стационарных процессов.

Следует отметить, что представление (23) является одной из разновидностей ортогональных разложений случайного процесса в гильбертовом пространстве. Однако в отличие от известных ортогональных разложений Лоэва-Карунена-Пугачева, представление (23) имеет явный физический смысл суперпозиции внутренних состояний осцилляторов с комплексными частотами и некоррелированными амплитудами.

Если спектр оператора сосредоточен в нуле и он вполне несамосопряжен, то спектральное разложение соответствующего случайного процесса имеет более сложную структуру

$$\xi_t = \int_0^l f(x,t)\,dZ_x, \tag{24}$$

где Z_Δ - стандартная случайная спектральная мера (процесс с некоррелированными приращениями), а $f(x,t)$ строится по решению специальной системы дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа, т.е. снова ξ_t представляет собой суперпозицию, но уже континуальную, внутренних состояний осцилляторов (струн).

В этом параграфе также получены спектральные разложения некоторых классов нестационарных случайных последовательной и неоднородных случайных полей.

В пятой главе рассмотрены некоторые приложения развитой в диссертационной работе теории нестационарных случайных процессов.

В первом параграфе исследуется поведение случайных нестационарных сигналов при линейных преобразованиях. Необходимость рассмотрения такого круга вопросов связана с тем, что значительное число прикладных задач (фильтрация случайных сигналов, корреляционная обработка случайных сигналов, распознавание образов и др.) может быть сформулирована в терминах стохастических дифференциальных или интегральных уравнений, осуществляющих линейные преобразования случайных сигналов. Показано, что ранг решения линейного дифференциального уравнения с переменными детерминированными коэффициентами и с правой случайной частью конечного ранга тоже конечен. Рассмотрены также линейные преобразования кривых в гильбертовом пространстве.

Определение. Кривая η_t называется дилатацией τ -го ранга кривой ξ_t, если $\exists$ оператор $B \in [H_\xi, H_\xi]$ такой, что $\eta_t = B\xi_t$, $dim(I-B^*B)H_\xi = \tau$. В терминах КФ получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы η_t была дилатацией первого ранга стационарного случайного процесса ξ_t (теорема 5.I).

Во втором параграфе теория операторных узлов используется для решения задачи фильтрации нестационарных случайных последовательностей на конечном интервале, определяемых следующими уравнениями в пространствах состояний

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= Tx_n + \Phi u_n, \\ v_n &= Ku_n + \Psi x_n, \end{aligned} \quad x_n|_{n=0} = x_0, \tag{25}$$

где $Mx_0x_0^* = \mu I_H$, $Mu_nu_m^* = \lambda\delta_{nm}I_E$, $\lambda, \mu > 0$

Система (25) ассоциирована с метрическим узлом. Требуется оценить x_N на основании известных значений выхода v_j $(j=1,2,\dots,N-1)$ Если искать линейную оценку в виде $\hat{x}_N = \sum_{k=0}^{N-1} w_k v_k$, то для передаточной матрицы оптимального фильтра W_k получается сумматорное уравнение Винера-Хопфа, решение которого с использованием узловых соотношений найдено в явном виде. Принципиальным моментом является то, что W_k находится, минуя решение разностного уравнения Риккати, которое значительно усложняет процедуру нахождения передаточной матрицы оптимального фильтра при стандартном подходе (Винера-Калмана):

$$W_j = (\mu-\lambda) T^{N} \{\mu(I - T^{*N} T^{N}) + \lambda T^{*N} T^{N}\}^{-1} T^{*j} \psi^{*}$$

В третьем параграфе получена следующая оценка для среднеквадратичной ошибки оптимального фильтра

$$\| x_N - \hat{x}_N \|^2 \leq c(\mu+\lambda) \max\left\{\frac{\mu}{\lambda}, \frac{\lambda}{\mu}\right\} \tag{26}$$

Эта оценка не зависит от N и, следовательно, ограничена при любом N.

При получении оценки (26) существенно использовался факт ассоциированности исходной системы с операторным узлом. Отказ от этого условия может приводить к неограниченному росту среднеквадратичной ошибки при увеличении N.

При $\lambda \to 0$ получена более точная оценка для среднеквадратичной ошибки

$$\lim_{\lambda \to 0} \| x_N - \hat{x}_N \|^2 = \mu z \tag{27}$$

где z - число собственных значений матрицы T, по модулю равных единице. Эта оценка показывает, что в случае сильно неунитарной матрицы, как и следовало ожидать, среднеквадратичная ошибка стремится к нулю, когда дисперсия шума u_n стремится к нулю. Это свойство среднеквадратичной ошибки существенно связано с тем, что исходная система является ассоциированной. Если же система не является ассоциированной с операторным узлом, то, как хорошо известно, передаточная матрица оптимального фильтра неограниченно возрастает, когда дисперсия шума стремится к нулю,

В четвертом параграфе решаются задачи оценивания вектора состояний непрерывных линейных систем. Рассмотрены различные случаи, для которых можно найти в явном виде передаточную матрицу оптимального среднеквадратичного фильтра, а также изучена роль узловых соотношений при нахождении передаточной функции оптимального фильтра.

Пятый параграф посвящен построению теории оптимального оценивания решений интегральных уравнений при наличии шумов, учитывающих в частности, возможную точность измерения соответствующих величин и в качестве примеров рассмотрены задачи фильтрации волны, дифрагирующей на круговом диске или круговом отверстии в плоском экране, а также фильтрации решения интегрального уравнения для функции ослабления при возбуждении электромагнитного поля вертикальным диполем вблизи поверхности земли, когда на процесс измерения соответствующих полей налагаются шумы.

В шестом параграфе рассматривается задача обращения интегральных матричных операторов со специальными ядрами $S \in [L^2_{m \times m}[0,\omega], L^2_{m \times m}[0,\omega]]$ При этом существенную роль играет вырожденность (конечномерность) оператора $A_0 S - S A_0^*$ или $S - \hat{T} S T$, где A_0 и T соответствующим образом подобранные операторы, в частности, в качестве A_0 часто выбирается $A_0 f = i \int_0^x f(x)\,dx$. Исследована структура оператора S и S^{-1} (теоремы 5.2-5.7). Решена также обратная задача о выборе ядра интегрального оператора S, если $A_0 S - S A_0^*$ вырожден (теорема 5.8). Изучена также задача обращения S в классе обобщенных функций. В качестве примера приведено решение задачи оптимальной фильтрации в случае матричного интегрального оператора Винера-Хопфа.

Отметим, что коммутационные соотношения, используемые при обращении интегральных операторов, представляют собой, по сути дела, обобщение определения операторного узла.

В шестой главе рассматривается проблема восстановления достаточно широкого класса аналитических случайных полей по их значениям в некоторой системе интерполяционных узлов. Оценивается рост выборочных функций случайного поля и исследуется устойчивость интерполяционных формул.

Для исследования этих вопросов впервые применен математический аппарат теории целых функций многих комплексных переменных, что позволило получить новые результаты не только для случайных, но и для детерминированных полей.

Отметим, что привлечение такого математического аппарата к изучению случайных полей совершенно естественно, так как эволюционно представимые поля вида $\xi(x_1, x_2) = \exp(ix_1A_1 + ix_2A_2)\xi_0$ с ограниченными инфинитезимальными операторами A_1 и A_2 являются, в частности, одним из классов аналитических случайных функций.

Интерполяционные формулы как в детерминированном, так и в стохастическом варианте без должного обоснования широко используются в радиофизических задачах: аппроксимация профиля показателя преломления, оптическая обработка радиосигналов в реальном времени (интерполяционные представления передаточных функций), теория синтеза антенн при реализации диаграмм, составление морских сейсмических карт, цифровая обработка изображений и др.

В первом параграфе на основе теории целых функций многих комплексных переменных получена интерполяционная формула для детерминированных аналитических полей (теорема 6.I):

$$f(z_1,z_2)=\sum_{k,l=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{k\pi}{\alpha},\frac{l\pi}{\beta}\right)\frac{\sin(\alpha z_1-k\pi)}{\alpha z_1-k\pi}\,\frac{\sin(\beta z_2-l\pi)}{\beta z_2-l\pi}, \qquad (28)$$

причем, при достаточно большом n :

$$\left|f(z_1,z_2)-\sum_{k,l=-n}^{n} f\left(\frac{k\pi}{\alpha},\frac{l\pi}{\beta}\right)\frac{\sin(\alpha z_1-k\pi)}{\alpha z_1-k\pi}\,\frac{\sin(\beta z_2-l\pi)}{\beta z_2-l\pi}\right| \le$$

$$\le C(z_1,z_2)\,\frac{\ln n}{n}\left|\frac{\alpha L}{\alpha-\sigma_{10}}+\frac{\beta L}{\beta-\sigma_{20}}\right|, \qquad (29)$$

где $C(z_1,z_2)$ - функция, ограниченная на каждом ограниченном множестве и не зависящая от вида функций $f(z_1,z_2)$; $\alpha>\sigma_{10}$, $\beta>\sigma_{20}$, а σ_{10},σ_{20} - сопряженные типы, отвечающие угловой точке гиперповерхности сопряженных типов S_σ; $|f(z_1,z_2)|<L$ при $\mathcal{J}m\, z_k=0$, $k=1,2$.

Во втором параграфе исследуется устойчивость интерполяционной формулы (28) в случае, когда узлы интерполирования не являются равноотстоящими и могут выбираться произвольно из некоторой окрестности узлов решетки (теоремы 6.2-6.3).

В третьем параграфе получен аналог теоремы отсчетов Котельникова-Уиттекера-Шеннона для случайно аналитического поля (теорема 6.4):

$$\xi(x_1,x_2)=\sum_{k,l=-\infty}^{\infty}\xi\left(\frac{k\pi}{\alpha},\frac{l\pi}{\beta}\right)\frac{\sin(\alpha x_1-k\pi)}{\alpha x_1-k\pi}\,\frac{\sin(\beta x_2-l\pi)}{\beta x_2-l\pi} \qquad (30)$$

Представление (30) справедливо для почти всех выборочных функций случайных полей $\xi(x_1,x_2)$ вида

$$\xi(x_1,x_2)=\int_\Lambda f(x_1,x_2,\lambda,\mu)\,Z(d\lambda,d\mu) \qquad (31)$$

где $Z(D)$ - случайная спектральная ортогональная мера, а $f(x_1,x_2,\lambda,\mu)$ относительно x_1 и x_2 может быть доопределена в произведении комплексных плоскостей до целой функции экспоненциального типа такой, что $\sup\limits_{\lambda,\mu\in\Lambda}\sup\limits_{x_1,x_2\in R_1}|f(x_1,x_2,\lambda,\mu)|=$ $=\sup\limits_{\lambda,\mu\in\Lambda}L(\lambda,\mu)=L<\infty$. Далее показано, что если система узлов не является равноотстоящей, то реализации случайного поля также могут быть восстановлены по значениям в этих узлах.

При выполнении условий теоремы 6.4 почти все выборочные функции поля $\xi(x_1,x_2)$ являются целыми функциями, причем, если $\sigma_{10}\neq\sigma_{20}$, то

$$\overline{\lim_{|m|\to\infty}}\sqrt[|m|]{\frac{\left|\dfrac{\partial^{|m|}\xi(x_1,x_2)}{\partial x_1^{m_1}\partial x_2^{m_2}}\right|_{x_1=x_2=0}}{\sigma_{10}^{m_1}\sigma_{20}^{m_2}}} \le 1 \tag{32}$$

Из неравенства (32) следует, что для $\forall\varepsilon>0 \quad \exists A_\varepsilon>0$ такая, что при всех x_1, x_2 с вероятностью единице справедлива оценка $|\xi(x_1,x_2)| < A_\varepsilon e^{(\sigma_{10}+\varepsilon)|x_1| + (\sigma_{20}+\varepsilon)|x_2|}$ (теорема 6.5).

В четвертом параграфе исследуется устойчивость интерполяционной формулы для аналитического случайного поля, когда узлы интерполяции могут выбираться произвольно в некоторой достаточно малой области, содержащей соответствующий узел решетки (теорема 6.6).

Отметим, что если в стандартных интерполяционных формулах Котельникова-Уиттекера-Шеннона шаг интерполяции выбирается в соответствии с шириной Фурье-спектра, то в предложенной в этой главе методике шаг интерполяции определяется характеристиками роста целых функций многих комплексных переменных.

В седьмой главе рассмотрен ряд прикладных задач корреляционной теории статистики неоднородных полей.

В первом параграфе рассматриваются детерминированные линейные преобразования случайных полей вида

$$u(x) = \int_V G(x,y)\xi(y)\,dy \tag{33}$$

где $u(x)$ - искомое поле, а $\xi(y)$ - случайные источники, $G(x,y)$ - функция Грина соответствующего оператора, учитывающая граничные и другие условия. Такие преобразования включают в себя линейные задачи распространения волн, индуцированных заданной системой случайных источников. Если $G(x,y)=G(x-y)$ а $\xi(x)$ - неоднородное поле конечного ранга, то как показано в этом параграфе, ранг $u(x)$ также конечен. В качестве одного из приложений преобразований типа (33) подробно изучена задача Коши для уравнения теплопроводности со случайными начальными данными, в частности, к такой задаче сводится проблема турбулентности в стадии вырождения или задача дифракции монохроматической волны на статистически неоднородном экране в приближении параболического уравнения.

В отличие от случая, когда начальные данные однородного случайного поля и все решения убывают при неограниченном возрастании времени, в случае статистически неоднородного поля (в начальный момент времени) появляются как убывающие, так и возрастающие или осциллирующие решения, характер которых определяется свойствами спектра начальных данных. Предложенный метод решения задачи Коши, основанный на эволюционном представлении решения, позволяет проследить, в отличие от стандартных методов решения, как пространственный спектр формирует временной спектр.

Второй параграф посвящен задаче о нахождении электромагнитного поля, созданного системой флуктуирующих статистически неоднородных источников, находящихся на экране. В приближении параболического уравнения для комплексной амплитуды имеем следующую задачу Коши (волна распространяется вдоль направления оси z)

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{i}{2k}\Delta_\perp\right) A(\vec{r}, z) = 0$$
$$A\big|_{z=0} = A_0(\vec{r}), \qquad \vec{r} = (x, y) \tag{34}$$

Эта задача для статистически однородного экрана или, когда КФ $A_0(\vec{r})$ имеет вид $K_{A_0A_0}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = K_0\left(\frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}\right)\tilde{K}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ (сепарабельная корреляционная функция) хорошо изучена.

Для выяснения физических возможностей, заложенных в рассматриваемых в диссертационной работе моделях статистически неоднородных полей, в этом параграфе, в частности, рассмотрено случайное поле $A_0(\vec{r})$, образованное системой некоррелированных статистически неоднородных источников. Показано, что сепарабельность КФ соответствует не только плавности пространственного или временного изменения статистически неоднородностей на масштабе корреляции, но и системе некорреляционных источников с одинаковыми законами изменения интенсивностей вида $c_k e^{\vec{\alpha}\vec{r}}$.

Модели, которые рассматриваются в диссертационной работе не предполагают некоррелированности источников и совпадения законов изменения интенсивностей и поэтому соответствуют, по сути дела, не только системе некоррелированных источников, но и системе источников с существенно различными интенсивностями и законами их изменения в поперечной плоскости.

Если $K_{A_0A_0}(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$ имеет вид

$$K_{A_0A_0}(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=\widetilde{K}_{A_0A_0}(\vec{r}_1,\vec{r}_2)+\int_0^\infty \varphi(\vec{r}_1+\vec{\tau})\overline{\varphi(\vec{r}_2+\vec{\tau})}\,dv_{\vec{\tau}} \qquad (35)$$

где $\widetilde{K}_{A_0A_0}(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$ – сепарабельная корреляционная фунеция, то для КФ решения задачи Коши с начальными данными $A_0(\vec{r})$ вида $A_0(\vec{r})=\widetilde{A}_0(\vec{r})+\widehat{A}(\vec{r})$, где $\widetilde{A}_0(\vec{r})$ – сепарабельное случайное поле, а $\widehat{A}(\vec{r})=\exp(iA_1x_1+iA_2x_2)f_0$ – эволюционно представимое поле, некоррелирующее с $\widetilde{A}_0(\vec{r})$, получено представление

$$K(\vec{r}_1,\vec{r}_2,z)=\widetilde{K}_{\widehat{A}\widehat{A}}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,z)+ \\ +\left\langle e^{\frac{i}{2k}(A_1^2+A_2^2)z+ix_1A_1+iy_1A_2}f_0,\ e^{\frac{i}{2k}(A_1^2+A_2^2)z+ix_2A_1+iy_2A_2}f_0\right\rangle \qquad (36)$$

где $\widetilde{K}_{\widehat{A}\widehat{A}}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,z)$ – отвечает сепарабельным начальным данным.

Дальнейший анализ связан с конкретными предположениями относительно структуры операторов A_1 и A_2, входящих в выражение (36) и характеризующих типы статистических неоднородностей экрана.

Пусть, в частности, $A_2=0$. Тогда в случае чисто дискретного спектра у A_1 для несепарабельной части КФ имеем

$$K_{AA}(x_1,x_2,z)=\frac{K}{4z}\sum_{\ell=1}^{\infty}|c_\ell|^2\Phi_\ell(z,x_1)\overline{\Phi_\ell(z,x_2)}, \qquad (37)$$

где

$$\Phi_\ell(z,x)=\int_0^\infty e^{-\frac{iK}{2z}(x-\xi)^2+i\lambda_\ell\xi}d\xi,\quad \lambda_\ell=\alpha_\ell+i\frac{\beta_\ell^2}{2}.$$

В случае спектра в нуле у оператора A_1 КФ $A(\vec{r}_1,\vec{r}_2,z)$ имеет вид

$$K_{AA}(x_1,x_2,z)=\int_0^\ell\Phi(z,x,\xi)\overline{\Phi(z,y,\xi)}d\xi, \qquad (38)$$

где

$$\Phi(z,x,\xi)=\sqrt{\frac{iK}{z}}\int_0^\infty e^{-\frac{iK(x-x_1)^2}{z}}J_0\left(2\sqrt{x_1(\ell-\xi)}\right)dx_1,$$

если $f_0=g$, где g - каналовый элемент оператора A_1.

Полученные выражения для КФ $A(\vec{r}_1,\vec{r}_2,z)$ могут быть использованы для построения моделей различных статистически неоднородных экранов. В качестве примера рассмотрено влияние статистической неоднородности на степень пространственной некогерентности источника, имеющего форму кругового диска радиуса a, когда

$$\tilde{K}_{A_0A_0}(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=\begin{cases} I_0\delta(\vec{r}_2-\vec{r}_1), & R\le a,\\ 0, & R>a,\quad \vec{R}=\frac{\vec{r}_1+\vec{r}_2}{2}\end{cases} \qquad (39)$$

Тогда на расстоянии z от плоскости экрана и при $\vec{r}_1=0$ и $\vec{r}_2=(s,0)$ для $K_{AA}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,z)$ получаем выражение

$$K_{AA}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,z)=I_0\frac{Ka}{2\pi zs}e^{-\frac{iKs^2}{z}}J_1\left(\frac{Kas}{z}\right)+\psi(0,z)\overline{\psi(s,z)}, \qquad (40)$$

где $$\psi(s,z)=\sqrt{\frac{k}{z}}\,\|f_0\|^2\int_0^\infty e^{-\frac{ik}{2z}(s-\eta)^2+i\eta\lambda_0}\,d\eta,$$

$$\lambda_0=\alpha_0+i\frac{\beta_0^2}{2},\qquad A_1h=\lambda_0 h.$$

В случае, когда спектр оператора A_1 в нуле, то для $K_{AA}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,z)$ имеем

$$K_{AA}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,z)=I_0\frac{ka}{2\pi sz}e^{-\frac{iks^2}{2}}\mathcal{J}_1\left(\frac{kas}{z}\right)+\int_0^\ell \Phi(z,0,\xi)\overline{\Phi(z,s,\xi)}\,d\xi,$$

где

$$\Phi(z,s,\xi)=\sqrt{\frac{ik}{2\pi z}}\int_0^\infty e^{-\frac{ik}{2z}(s-x_1)^2}\mathcal{J}_0\left(2\sqrt{x_1(\ell-\xi)}\right)dx_1.$$

Таким образом в КФ $K_{AA}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,z)$ наряду с размерами экрана, соответствующими, например, линейному размеру звезды, появляется информация и о масштабе статистической неоднородности источников, расположенных в плоскости экрана. При этом, как видно из (40), на фоне обычной КФ появляются дополнительные осцилляции с масштабом, соответствующим масштабу неоднородностей источников, что в принципе позволяет по известной КФ определить не только линейные размеры экрана (звезды), но и масштаб и интенсивность статистически неоднородных источников, находящихся на светящемся экране.

В третьем параграфе рассматривается задача о рассеянии электромагнитной волны в статистически неоднородной среде. В рамках Борновского приближения получено выражение для средней интенсивности рассеянной волны в условиях, когда среда описывается статистически неоднородным полем первого ранга. Изучены ее свойства для различных случаев спектра случайного поля. Рассмотрена также задача о деполяризации электромагнитной волны, распространяющейся в статистически неоднородной среде. В Борновском приближении получено общее выражение для среднего потока энергии, из которого видно, что средний поток энергии нелинейным образом зависит от пройденного лучом света пути, в отличие от линейной зависимости, когда среда статистически однородна. Этот факт может быть использован для интерпретации результатов экспериментов, когда электромагнитная волна распространяется вблизи земной поверхности, так,что статистическая однородность среды нарушается.

В четвертом параграфе изучена задача о прохождении света через турбулентный поток жидкости, подобные задачи естественно возникают, например, при оптической диагностике турбулентных потоков жидкости. В этом случае флуктуации диэлектрической проницаемости линейно зависят от градиента давления или тензора скоростей деформации. В рамках приближения геометрической оптики получено выражение для среднего квадрата $M|\alpha(\delta)|^2$ смещения луча света, прошедшего слой жидкости толщины δ :

$$M|\alpha(\delta)|^2 = \frac{2}{n_0^2(\delta)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} K_0(0,0,0) \int_0^\delta \int_0^\delta n_0(z_1)\overline{n_0(z_2)}\hat{K}(z_1,z_2)dz_1dz_2 \quad (4I)$$

где $n = n_0(z)[1 + n_1(x,y,z,t)]$ – показатель преломления среды, причем $K_{n_1n_1}(\vec{z}_1,\vec{z}_2,t,s) = K_0(x_1-x_2, y_1-y_2, t-s)\hat{K}(z_1,z_2)$

Выражение (4I) может служить основой для учета статистических неоднородностей в турбулентных пограничных слоях при изучении распространения света в таких средах.

Так, если $\hat{K}(z_1,z_2)$ является КФ статистически неоднородного поля первого ранга с чисто дискретным спектром, то для $M|\alpha(\delta)|^2$ имеем

$$M|\alpha(\delta)|^2 = \frac{2i}{|n_0(\delta)|^2} \sum_{k,j=1}^{\infty} \frac{C_k\overline{C_j}}{\lambda_k-\overline{\lambda_j}} \eta_k(\delta)\overline{\eta_j(\delta)}, \quad (42)$$

где $$\eta_k(\delta) = \int_0^{\delta} n_0(z) e^{i\lambda_k z} dz, \quad \lambda_k = \alpha_k + i\frac{\beta_k^2}{2}$$

Как видно из (42), $M|\alpha(\delta)|^2$ содержит в себе информацию о спектральной энергии вихрей $(|C_j|^2)$, о пространственном масштабе вихрей (λ_j) и масштабе пространственного убывания (δ) турбулентного пограничного слоя.

В этом же параграфе рассмотрена кратко задача о рассеянии света в неоднородном турбулентном потоке жидкости в трубе. Экспериментальное изучение этого явления и попытка использования его для исследования явления перехода движения жидкости из ламинарного в турбулентное и измерения гидродинамических характеристик турбулентности были предприняты в работе В.В.Струминского и В.М.Филиппова. Параллельный пучок света пропускался через поток жидкости при различных режимах движения. Оптическая система отбирала рассеянный свет из исследуемого объема жидкости для фотоумножителя. По измерению величины анодного тока фотоумножителя можно было судить об интенсивности рассеянного света. В частности, было установлено, что интенсивность рассеянного света возрастала практически скачком при переходе ламинарного движения в турбулентное. Однако цель эксперимента (изучение структуры потока и измерение характеристик турбулентности) была достигнута далеко не полностью из-за отсутствия теоретического рассмотрения, устанавливающего связь между электродинамическими и гидродинамическими полями. При объяснении этого явления механизм рассеяния принимается обычным, т.е. рассеяние света происходит в пренебрежении поляризационными эффектами на малых флуктуациях диэлектрической проницаемости ε, вызванных флуктуациями поля давления P. Учет поляризационных эффектов приводит к тому, что необходимо рассматривать флуктуации тензора диэлектрической проницаемости, вызванные флуктуациями тензора скоростей деформации V_{ij}. Специфика эксперимента (анализ анодного тока фотоумножителя) приводит к тому, что все экспериментально измеряемые величины выражаются через четвертый четырехточечный момент флуктуационной части диэлектрической проницаемости. Вычисления, которые можно произвести с использованием гипотезы М.А.Миллионщикова о структуре четвертых моментов и которые опущены ввиду громоздкости, дают качественное соответствие с экспериментальными данными работы В.В.Струминского и В.М.Филиппова. Но для количественного сопоставления данных работы недостаточно. Можно показать, что скачкообразное возрастание интенсивности рассеянного света в области перехода объясняется "пятнистой" структурой жидкости - образование в ламинарном потоке турбулентных пятен, число которых резко возрастает при переходе ламинарного движения жидкости в турбулентное.

Увеличение интенсивности рассеянного света связано с увеличением числа турбулентных пятен, попадающих в рассеивающий объем. Формулы рассеяния, полученные стандартным способом, указывают на возможность непосредственного измерения оптическим способом частотного и пространственного спектров поля давления, что невозможно осуществить в обычном гидродинамическом эксперименте.

Пятый параграф посвящен задаче нахождения средних полей в статистически нестационарных средах, при этом используется представление поля в виде разложения по собственным функциям неэволюционной самосопряженной части оператора Максвелла. Коэффициенты разложения удовлетворяют стохастическим эволюционным дифференциальным уравнениям, причем исследование этих уравнений существенно зависит от характера случайного изменения с течением времени диэлектрической проницаемости $\mathcal{E}(t)$. Если ограничиться борновским приближением, то для среднего поля влияние флуктуационной составляющей $\mathcal{E}(t)$ приводит к перенормировке постоянных среды. В случае, когда $\mathcal{E}(t,z)=\mathcal{E}(z-\xi(t))$, где $\xi(t)$ - марковский процесс, то для среднего поля получено точное уравнение, содержащее кинетический оператор марковского процесса $\xi(t)$. .

Если $\mathcal{E}(t)=\mathcal{E}_0+\hat{\mathcal{E}}(t)$, где $\hat{\mathcal{E}}(t)$-телеграфный случайный процесс, то в этом случае также получено точное уравнение для среднего поля, минуя технику инфинитезимальных операторов марковских случайных процессов.

Анализ этого уравнения показывает, что при различных предположениях о параметрах, описывающих флуктуационную часть диэлектрической проницаемости, наряду с регулярными волновыми свойствами среды, появляются существенно новые (затухающие колебания, появление неосциллирующих решений). Возможна также полная потеря средой своих регулярных волновых свойств.

Основные публикации по теме диссертации.

I. Янцевич А.А. Об одной задаче электродинамики неоднородной анизотропной среды//Изв.Вузов. Сер. Радиофизика. - 1967. - т.X, № I. - С.137-139.

2. Янцевич А.А. Учет перекоса цилиндрической аппаратуры при оптических измерениях в потоке вязкой несжимаемой жидкости// УФЖ. - 1966. - т.XI, № II. - С.1238-1242.

3. Янцевич А.А. Исследование гидродинамической устойчивости оптическим методом//Аннотации докладов Ш Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. - М., 1968. - С.332.

4. Белозеров Д.П., Янцевич А.А. Модуляция световой волны ультразвуком в круглом волноводе//Тезисы докладов УI Всесоюзной акустической конференции. - М., 1968. - БI4. - 4 с.

5. Янцевич А.А. Поляризационные свойства электромагнитных волн, распространяющихся в ламинарных потоках вязкой несжимаемой жидкости//Радиотехника. -Харьков:Вища школа, I967. - вып.4. - С.I30-I38.

6. Лившиц М.С., Янцевич А.А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. - Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, I97I. - I80 с.

7. Livshits M.S., Yantsevith A.A., Operator colligations in Hilbert spaces. John Wiley and Sons, New-York, 1979, 208 p.

8. Клебанова Г.Б., Янцевич А.А. Об интерполяции аналитических случайных полей//Тезисы докладов Всесоюзной конференции по теории функций комплексного переменного. - Харьков, I970. - С.96-97.

9. Клебанова Г.Б., Янцевич А.А. Об одной задаче интерполяции случайных полей//Математическая физика и функциональный анализ. ФТИНТ АН УССР. - I97I. - вып.II. - С.4I-44.

I0. Янцевич А.А. О стохастических интегральных уравнениях теории распространения волн//Аннотации докладов У Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн. -Л., I970. - С.20-2I.

II. Янцевич А.А. Операторные узлы и ассоциированные открытые системы//Теория функций, функцион.анализ и их прил. - Харьков: Вища шк., I973. - вып. I7. - С.2I5-220.

I2. Янцевич А.А. Об одном классе несамосопряженных операторов// с двумерной мнимой компонентой//Теория функций, функцион. анализ и их прил. - Харьков: Вища шк., I975. - вып.28. - С.I24-I27.

I3. Янцевич А.А. Применение теории операторных узлов к исследованию нестационарных случайных процессов и последовательностей//Материалы Всесоюзного симпозиума по статистике случайных процессов. - Киев, I973. - С.229-232.

I4. Маркус А.Г., Цекановский Э.Р., Янцевич А.А. Линейно представимые решения дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах//Математические методы кибернетики. - Киев, I980,- с.28-38.

I5. Когут Е.А., Янцевич А.А. Унитарная эквивалентность линейных дискретных систем и передаточные функции операторного аргумента//Вычислительные методы кибернетики. - Киев, I982. - С.6I-69.

I6. Герман В.Л., Янцевич А.А. Оптический метод исследования потоков вязкой несжимаемой жидкости//Вестн.Харьк. ун-та. - I966. - Вып. 32: математика и механика. - С.I7-34.

I7. Янцевич А.А. Распространение электромагнитных волн в турбулентных потоках вязкой несжимаемой жидкости//Вестн.Харьк. ун-та.- I966. - Вып. 32: математика и механика. - С.35-39.

I8. Янцевич А.А. Распространение электромагнитных волн в пуазейлевском потоке вязкой несжимаемой жидкости // Вестн.Харьк. ун-та. - I967. - вып. 33: математика и механика. - С.I20-I24.

I9. Ажажа Ж.С., Янцевич А.А. Двойное лучепреломление в турбулентных потоках вязкой несжимаемой жидкости//Вестн.Харьк.ун-та.- I967. - Вып. 33: математика и механика. - С.I25-I32.

20. Соколовский В.З., Янцевич А.А. Оптимальная фильтрация случайных полей, описываемых интегральными уравнениями//Тезисы П Всесоюзного семинара по численным методам нелинейного программирования. - Харьков, I976. - С.285-287.

21. Когут Е.А., Янцевич А.А. О линейной представимости состояний дискретных открытых систем, ассоциированных с операторными узлами//Вестн.Харьк.ун-та. - 1982. - № 220: механика, теория управления и математическая физика. - С.60-66.

22. Когут Е.А., Янцевич А.А. О сцеплении операторных узлов и ассоциированных с ними открытых систем//Вестн.Харьк.ун-та. - 1982. - № 220: механика, теория управления и математическая физика. - С.66-69.

23. Александров Ю.А., Янцевич А.А. Об определении вероятности первого достижения одномерным случайным процессом фиксированных границ//Вестн.Харьк.ун-та. - 1970. - Вып. 34: математика и механика. - С.130-133.

24. Александров Ю.А., Янцевич А.А. Уравнения для одномерных плотностей распределения вероятностей в случае линейных динамических систем второго порядка//Вестн.Харьк.ун-та. - 1970. - вып.34: математика и механика. - С.134-138.

25. Александров Ю.А., Янцевич А.А. О некоторых классах случайных процессов с последействием//Вестн.Харьк.ун-та. - 1970. - вып. 34: математика и механика. - С.139-157.

26. Когут Е.А., Янцевич А.А. Применение теории операторных узлов к решению задачи фильтрации состояний линейных систем// Харьк. ун-т. - Харьков, 1984. - 29 с. Деп. в УкрНИИНТИ, № 2132 Ук-84.

27. Аббауи Л., Янцевич А.А. Некоторые классы неоднородных случайных полей//Харьк.ун-т. - Харьков, 1984. - 52 с. - Деп. в УкрНИИНТИ, № 2206 Ук-84.

28. Янцевич А.А. Нестационарные последовательности в гильбертовом пространстве. I. Корреляционная теория//Теория функций, функцион.анализ и их прил. - Харьков: Вища шк., 1986. - вып.45. - С.139-141.

29. Пишель Р., Янцевич А.А. Дилатации случайных процессов// Теория функций, функцион. анализ и их прил. - Харьков: Вища шк., 1986. - вып. 46. - С.86-90.
30. Янцевич А.А. Нестационарные последовательности в гильбертовом пространстве. П. Спектральные представления//Теория функций, функцион. анализ и их прил. - Харьков: Вища шк., 1986. - вып. 45. - С.142-144.
31. Когут Е.А., Янцевич А.А. Оптимальные оценки состояний линейных дискретных систем//Тезисы докладов Ш Всесоюзного симпозиума "Метод дискретных особенностей в задачах математической физики". - Харьков, 1987. - С.192.
32. Когут Е.А., Янцевич А.А. Об одном способе решения дискретного аналога интегрального уравнения Винера-Хопфа//Тезисы докладов IУ Всесоюзного симпозиума "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики". - Харьков, 1989. - ч. I. - С.134-136.
33. Янцевич А.А. О фильтрации решений интегральных уравнений// Тезисы докладов IУ Всесоюзного симпозиума "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики". - Харьков, 1989. - с.П. - С.302-303.
34. Когут Е.А., Янцевич А.А. Оценивание вектора состояний линейных непрерывных систем//Радиоэлектронные устройства летательных аппаратов. - Харьков, 1990. - С.66-73.
35. Стоян Ю.Г., Золотарев В.А., Янцевич А.А., Барруш Ф.С. Обращение интегральных операторов методом коммутационных соотношений. - Харьков, 1990. - 57 с. /препринт ИПМ АН УССР: препринт-2332/.
36. Янцевич А.А., Барруш Ф.С. Системы коммутирующих операторов и корреляционная теория одного класса кривых в гильбертовых пространствах//Харьк.ун-т. - Харьков, 1991. - 30 с. деп. в

ВИНИТИ № 2415-В91.
37. Золотарев В.А., Янцевич А.А. Нестационарные кривые в гильбертовых пространствах и нелинейные операторные уравнения// Теория операторов, субгармонические функции. - Киев, 1991. - С.52-60.
38. Золотарев В.А., Янцевич А.А. Об одном классе нелинейных операторных уравнений с несамосопряженной правой частью//Теория функций, функцион.анализ и их прил. - Харьков: Вища шк., 1991. - вып. 55. - С.74-78.
39. Бабий В.И., Беррабах Б., Янцевич А.А. Универсальные модели сжимающих операторов//Харьк.ун-т. - Харьков, 1993. - 15 с. - деп. в ГНТБ Украины 27.04.93 № 859 Укр.93.
40. Аршава Е.А., Янцевич А.А. Обращение интегральных операторов методом коммутационных соотношений//Тезисы докладов VI Международного симпозиума "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики". - Харьков, 1993. - П. С.117.
41. Золотарев В.А., Янцевич А.А. Интегральные уравнения со специальными ядрами//Тезисы докладов VI Международного симпозиума "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики". - Харьков, 1993. - П. С.189.

Подп. к печ. 25.11.93 Формат $60 \times 84^{1}/_{16}$. Бумага тип. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,0
Уч.-изд. л. 2,0 Тираж 100 экз. Зак. № 3525 Бесплатно.

Харьковское межвузовское арендное полиграфическое предприятие.
310093, Харьков, ул. Свердлова, 115.

460469