АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

Рязанов Владимир Ильич

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ТЕОРИИ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ И ИХ ОБОБЩЕНИЙ

01.01.01 - математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико - математических наук

Донецк - 1993

АВ 29.579

Работа выполнена в отделе уравнений в частных производных Института прикладной математики и механики АН Украины

Официальные оппоненты: доктор физ.-мат.наук, профессор Миклюков В.М.
доктор физ.-мат.наук, профессор Тамразов П.М.
доктор физ.-мат.наук, профессор Андриевский В.В.

Ведущая организация: Институт математики СО АН России

Защита состоится "23" марта 1994 г. в 15 часов на заседании специализированного Совета Д 06.01.01 по присуждению ученой степени доктора физико-математических наук в Институте прикладной математики и механики АН Украины по адресу: 340114, г.Донецк-114, ул.Розы Люксембург, 74

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИПММ АН Украины.

Автореферат разослан "31" января 1994 г.

ЛННБ України ім.В.Стефаника
00778951 (.)

Ученый секретарь
специализированного Совета
кандидат физ.-мат.наук Марковский А.И.

ЛНБ ім. В. Стефаника
АН Україн

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Основы теории квазиконформных отображений на плоскости были заложены еще в 20-30-е годы Гречем Г. и Лаврентьевым М.А. В работах Альфорса Л., Берса Л., Лехто О., Геринга Ф.У., Векуа И.Н., Боярского Б.В., Лаврентьева М.А., Белинского П.П., Шабата Б.В., Суворова Г.Д., Решетняка Ю.Г. и других авторов были изучены фундаментальные свойства квазиконформных отображений и некоторых их обобщений, а также обнаружены интересные приложения ко многим разделам современного анализа.

Настоящим прорывом в этом направлении стала новая теорема существования и единственности для уравнения Бельтрами, доказанная в 1988 году Давидом Г. Она дала мощный импульс дальнейшим исследованиям общих гомеоморфизмов плоскости. В этих исследованиях ключевую роль играет знаменитая лемма Геринга-Лехто о дифференцируемости. Вопросы компактности классов Давида начали изучаться Тукиа П. (1991).

Уникальность уравнения Бельтрами в геометрической теории дифференциальных уравнений состоит в том, что ему удовлетворяет любой сохраняющий ориентацию гомеоморфизм плоскости с обобщенными производными. Таким образом, при аналитическом подходе к изучению топологических отображений центральным является вопрос о связи коэффициента уравнения Бельтрами с его решением. Поведение этой характеристики при локально равномерной сходимости отображений имеет очень сложную природу. Это обусловлено тем, что уже в простейших случаях решение уравнения Бельтрами связано с комплексной характеристикой посредством нелинейного преобразования, в котором к тому же задействован сингулярный оператор типа Кальдерона-Зигмунда - так называемое комплексное преобразование Гильберта, именуемое также иногда преобразованием Альфорса-Берлинга. Вырождение эллиптичности, имеющее место в условиях теоремы Давида, еще более усугубляет трудности и практически исключает прямые методы исследования.

Вопросы сходимости и компактности всегда занимали одно из центральных мест в теории квазиконформных отображений. Среди наиболее известных результатов в этом направлении следует отметить теоремы сходимости Берса-Боярского (1957), Штребеля (1969) и Леншингера (1974), а также теоремы компактности Песина (1969) и Шиффера-Шобера (1978).

Одним из важных приложений теорем компактности является теория вариационного метода. Дело в том, что в компактных классах всегда гарантируется существование экстремальных отображений для любых непрерывных, в том числе, нелинейных функционалов. Иначе, как отмечалось в сравнительно недавно вышедшей монографии Крушкаля С.Л. и Кюнау Р. (1984), вопрос о существовании экстремали становится чрезвычайно трудным.

Вариационный метод исследования экстремальных задач для квазиконформных отображений был впервые применен Белинским П.П. Этот метод получил свое развитие в работах Кюнау Р., Крушкаля С.Л., Гутлянского В.Я., Ренельта Г., Мак Ливи Дж.О. и других авторов.

Другим, довольно неожиданным, приложением теорем сходимости и компактности оказались исследования локального поведения квазиконформных отображений. В связи с этим напомним, что различные вопросы дифференцируемости отображений изучались в работах Тейхмюллера О., Виттиха Г., Белинского П.П., Лехто О., Райха Э., Вольквака Г., Боярского Б.В., Шабата Б.В., Трохимчука Ю.Ю. и многих других.

Все сказанное говорит о необходимости дальнейшего изучения вопросов сходимости и компактности для квазиконформных отображений и их обобщений.

Цель работы. Создать стройную и завершенную теорию сходимости и компактности для квазиконформных отображений и их современных обобщений на плоскости и продемонстрировать возможности ее приложений к теории вариационного метода, уравнениям математической физики и исследованиям локального поведения отображений.

Общие методы исследования. Наряду с традиционным методом геометрической интерпретации широко используются методы общей топологии и абстрактных пространств со сходимостями Фреше-Урысона, выпуклого анализа и теории измеримых семейств множеств, функционального анализа и теории меры.

Научная новизна. Получен ряд новых фундаментальных теорем сходимости:

1) теорема 1 о полунепрерывности дилатации гомеоморфизмов класса $\mathcal{ACL}$;

2) теорема 2 об области значений и множестве хорошей аппроксимации предельной комплексной характеристики для $Q(z)$-квазиконформных отображений с локально суммируемой $Q(z)$;

3) теорема 3 о необходимых и достаточных условиях сходимости нормированных $Q(z)$-квазиконформных отображений с $Q(z)$, удовлетворяющей условию Давида.

В качестве следствий получены усиления и обобщения теорем сходимости Штребеля и Берса-Боярского для $Q(z) \in \mathcal{L}^1_{loc}$. Впервые, в терминах преобразования Фурье комплексных характеристик, построены метрики, генерирующие локально равномерную сходимость нормированных $Q(z)$-к.к. отображения для $Q(z)$ с условием Давида. Этот результат является новым и для Q-к.к. отображений.

Исследованы классы $Q(z)$-к.к. отображений с ограничениями на комплексные характеристики общего теоретико-множественного вида при $Q(z)$, удовлетворяющей условию Давида. Установлены:

1) теорема 4 о замыкании некомпактных классов;

2) теорема 5 о необходимых и достаточных условиях компактности;

3) вариационный принцип максимума (теорема 6).

Аналогичные результаты получены для классов с ограничениями общего интегрального вида на дилатацию (теоремы 7-9).

В качестве приложения теорем сходимости и компактности, детально изучена так называемая дифференцируемость отображения в точке по Белинскому (теоремы 10-12 и следствия из них).

Практическая ценность работы. Результаты диссертации могут быть использованы при изучении различных вопросов сходимости и компактности для квазиконформных отображений и их обобщений, в теории вариационного метода, при исследованиях локального поведения отображений, при описании асимптотически конформных кривых, а также при доказательстве теорем существования и представления решений некоторых уравнений математической физики.

Апробация работы. Результаты диссертации апробировались на Донецких коллоквиумах по теории квазиконформных отображений, ее обобщениям и приложениям (1980, 1982, 1984, 1987, Донецк), Всесоюзной школе по комплексным методам в математической физике (1984, Донецк), Международной конференции по комплексному анализу и его приложениям (1985, Варна), Всесоюзной конференции по геометрической теории функций (1988, Новосибирск), Международной конференции по комплексному анализу и VII Румынско-Финском семинаре по комплексному анализу (1993, Тимишуара), семинарах по теории функций при ИМ СО АН России (рук.акад.Решетняк Ю.Г.), ИМ им.В.А.Стеклова АН России (рук.акад. А.А.Гончар), ИПММ АН Украины (рук. д.ф.-м.н. Гутлянский В.Я.), ИМ АН Украины (рук. д.ф.-м.н. Тамразов П.М.), ИМ АН Польши (рук. акад. Боярский Б.В.), Технический университет, Берлин, 1992 (профессор Поммеренке Хр., Беккер И.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 23 работах, список которых приведен в конце автореферата. Две из этих работ опубликованы совместно с профессором Гутлянским В.Я.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 4 глав, 4 приложений и списка литературы (229 наименований). Общий объем диссертации составляет 281 страницу.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В главе 1 изучается поведение дилатации и комплексной характеристики при локально равномерной сходимости квазиконформных отображений и их обобщений.

Как известно, любой сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $f: D \to \mathbb{C}$ класса $ACL(D)$, заданный в области D комплексной плоскости $\mathbb{C}$, удовлетворяет почти всюду (п.в.) в D уравнению Бельтрами

$$f_{\bar z} = \mu(z)\, f_z\,, \qquad (1)$$

где $\mu: D \to \mathbb{C}$ - некоторая измеримая функция с

$$|\mu(z)| \le 1 \qquad (2)$$

и, как обычно, $f_{\bar z} = (f_x + i f_y)/2$, $f_z = (f_x - i f_y)/2$, $f = u + iv$, $z = x + iy$. Полагая $\mu(z) = 0$ при $f_z = f_{\bar z} = 0$, мы устраняем связанную с этим случаем неопределенность. Функцию $\mu(z)$ принято называть комплексной характеристикой, а величину

$$p(z) = (1+|\mu(z)|)/(1-|\mu(z)|) \tag{3}$$

– дилатацией отображения f.

В § I.1 доказана теорема о полунепрерывности дилатации в среднем для общих гомеоморфизмов класса ACL:

Теорема 1. Пусть f и $f_n: D \to \mathbb{C}, n=1,2,\dots,$ – сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы класса ACL и пусть $f_n \to f$ при $n \to \infty$ локально равномерно. Тогда на любом открытом множестве $\Omega \subseteq D$

$$\iint\limits_{\Omega} \Phi(p(z))\,dxdy \leq \liminf_{n\to\infty} \iint\limits_{\Omega} \Phi(p_n(z))\,dxdy \tag{4}$$

для любой неубывающей выпуклой функции $\Phi: I \to \overline{R^+}$, которая непрерывна в смысле $\overline{R^+}$ слева в точке

$$Q = \sup_{\Phi(t)<\infty} t \tag{5}$$

и

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = \infty. \tag{6}$$

Отметим, что при $Q<\infty$ условие (6) выполняется автоматически, а при $Q=\infty$ излишне условие непрерывности.

В § I.2 доказана теорема об области значений и множестве хорошей аппроксимации предельной комплексной характеристики для $Q(z)$- квазиконформных отображений с локально суммируемой $Q(z)$.

Здесь сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $f: D \to \mathbb{C}$ класса ACL называется $Q(z)$-квазиконформным ($Q(z)$ - к.к.) отображением, если

$$p(z) \leq Q(z) \quad \text{п.в.,} \tag{7}$$

где $Q(z): \mathbb{C} \to I = [1,\infty]$ - произвольная функция.

Отметим, что сам термин " $Q(z)$ -к.к. отображение", по-видимому, впервые был введен Шиффером М. и Шобером Г. (1976) для случая $Q(z)\in\mathcal{L}^{\infty}$. Однако на экстремальные проблемы в классах подобного рода впервые обратил внимание еще Тейхмюллер О. (1939), а затем и Волковыский Л.И Первый пример такой экстремальной проблемы был рассмотрен Кюнау Р. Подобные классы рассматривались также в работах Крушкаля Л.С., Андриян-Казаку К., Иоффе М.С., Ренельта Г., Мак Ливи Дж.О. , Летинена М. и других.

Прежде чем переходить к формулировке теоремы 2, приведем элементы теории инвариантно-выпуклых множеств, изложенной в приложении А.

Пусть $\Delta=\{\nu\in\mathbb{C}: |\nu|<1\}$ - единичный круг и $\mathcal{Y}$ - группа всех дробно-линейных отображений Δ на себя. Множество M из Δ назовем инвариантно-выпуклым, если все множества $g(M),\ g\in\mathcal{Y}$, являются выпуклыми. Имеется простой геометрический критерий:

Предложение А1. Замкнутое множество M из Δ инвариантно-выпукло тогда и только тогда, когда вместе с каждой парой точек $\mu_1,\mu_2\in M$ этому множеству принадлежит и вся совокупность дуг $[\mu_1,\mu_2](\eta),\ |\eta|=1.$

Здесь через $[\mu_1,\mu_2](\eta)$ обозначена дуга, соединяющая точки μ_1 и μ_2 внутри Δ, той единственной окружности, которая проходит через тройку точек $\mu_1,\mu_2\in\Delta$ и $\eta\in\partial\Delta$.

Инвариантно-выпуклой оболочкой $\operatorname{inv co} M$ множества M из $\Delta,\ \overline{M}\subseteq\Delta$, будем называть минимальное по включению замкнутое инвариантно-выпуклое множество, содержащее M. Согласно теореме А2:

$$\operatorname{inv co} M=\bigcap_{|\eta|=1} K_M(\eta), \tag{8}$$

где через $K_M(\eta)$ обозначен единственный опорный круг, касающийся $\partial\Delta$ в точке η. Здесь замкнутый круг K из $\overline{\Delta}$, касающийся $\partial\Delta$, называется опорным к множеству M, если $M\subseteq K$ и $\partial K\cap\partial M\neq\emptyset$. Теорема А3 содержит еще одно описание $\operatorname{inv co} M$ в терминах так называемого дугового замыкания.

В силу предложения А1, инвариантно-выпуклые множества M являются строго выпуклыми множествами, т.е. их границы не могут содержать отрезков прямых. Таким образом, все граничные точки таких множеств являются крайними.

Граничную точку произвольного M, $\overline{M} \subseteq \Delta$, назовем **инвариантно-крайней**, если на некоторой опорной окружности $\partial K_M(\eta)$, $|\eta| = 1$, она является ближайшей из ∂M к η по или против часовой стрелки. Множество всех инвариантно-крайних точек M в дальнейшем обозначается через $inv\,ext\,M$.

Роль множества $inv\,ext\,M$ определяется тем обстоятельством, что оно является минимальным по включению замкнутым подмножеством $\overline{M}$, по которому еще восстанавливается $inv\,co\,M$ (теорема А4). При этом имеют место аналоги классических теорем Крейна-Мильмана и Каратеодори-Минковского (теоремы А5 и А6).

Теорема 2. Пусть $f_n : D \to C$, $n = 1, 2, \ldots,$ - последовательность $Q(z)$-к.к. отображений с локально суммируемой $Q(z)$ и $f_n \to f$ л.р., где $f : D \to C$ - некоторый гомеоморфизм.

Тогда f также является $Q(z)$-к.к. отображением и $(f_n)_z \to f_z$, $(f_n)_{\bar z} \to f_{\bar z}$ при $n \to \infty$ слабо в $\mathcal{L}^1_{loc}$. Кроме того, для почти всех $z \in E'$

$$\mu(z) \in inv\,co\,M(z) \tag{9}$$

и $\mu_n(z) \to \mu(z)$ по мере на

$$E_0 = \{ z \in E' : \mu(z) \in inv\,ext\,M(z) \}, \tag{10}$$

где E' - множество всех регулярных точек отображения f и

$$M(z) = \overline{\lim_{n \to \infty}} \{ \mu_n(z) \} . \tag{11}$$

Здесь, как обычно, через $\overline{\lim} \{ \mu_n(z) \}$ обозначен верхний топологический предел одноточечных множеств $\{ \mu_n(z) \}$, т.е. множество всех точек накопления последовательности $\mu_n(z)$,

$n = 1, 2, \dots$. Условие регулярности в точке z означает, что f дифференцируемо в этой точке и якобиан $J(z) = |f_z|^2 - |f_{\bar z}|^2 \neq 0$.

Для сравнения, Штребель К. в 1969 году установил, что при локально равномерной сходимости Q-к.к. отображений, когда $Q(z) \equiv Q < \infty$,

$$|\mu(z)| \leq \limsup_{n \to \infty} |\mu_n(z)| \quad \text{п.в.} \tag{12}$$

и на множестве

$$\mathcal{E}_0 = \{z : |\mu(z)| = \limsup_{n \to \infty} |\mu_n(z)|\} \tag{13}$$

можно выбрать подпоследовательность $\mu_n(z)$, которая сходится п.в. к $\mu(z)$.

Из теоремы 2 при $Q(z) \in \mathcal{L}^1_{loc}$ мы получаем (12) и сходимость $\mu_n \to \mu$ по мере на $\mathcal{E}_0$, т.е. усиление результата Штребеля.

Аналогично, в случае одноточечных множеств $M(z)$ из теоремы 2 следует обобщение теоремы сходимости Берса-Боярского:

Следствие 1.8. Пусть в условиях теоремы 2 $\mu_n(z) \to \varkappa(z)$ при $n \to \infty$ на некотором измеримом множестве $E \subseteq E'$ по норме $\mathcal{L}^p$, $1 \leq p \leq \infty$, просто по мере или п.в. Тогда $\mu(z) = \varkappa(z)$ п.в. на E.

Наконец, в § 1.3, в терминах преобразования Фурье комплексных характеристик, найдены необходимые и достаточные условия сходимости нормированных $Q(z)$-к.к. отображений с $Q(z)$, удовлетворяющей условию Давида.

Напомним, что Давид Г. доказал существование и единственность гомеоморфных решений $f \in ACL$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(\infty) = \infty$, для уравнения Бельтрами (1) с комплексной характеристикой $\mu(z)$, удовлетворяющей условию

$$\operatorname{mes}\{z \in \mathbb{C} : |\mu(z)| > 1 - \varepsilon\} \leq C_0 e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}} \tag{14}$$

для всех $\varepsilon \le \varepsilon_0$; $\varepsilon_0 \in (0,1]$, $\alpha > 0$, $C_0 > 0$. При этом, это решение автоматически принадлежит всем классам $W^1_{s,loc}$ для любых $s < 2$. Им же были установлены локально равностепенные непрерывность и абсолютная непрерывность всех таких гомеоморфизмов вместе с их обратными при фиксированных ε_0, α и C_0.

Соотношение (14) может быть переписано в эквивалентной форме через дилатацию:

$$mes\{z \in \mathbb{C} : p(z) > t\} \le C e^{-\gamma t} \quad (15)$$

для всех $t \ge T$; $T = -1 + 2/\varepsilon_0 \ge 1$, $\gamma = \alpha/2 > 0$, $C = C_0 e^{-\gamma} > 0$.

Будем говорить, что измеримая функция $Q(z) : \mathbb{C} \to I = [1, \infty]$ экспоненциально ограничена по мере, если существуют постоянные $T \ge 1$, $\gamma > 0$ и $C > 0$ такие, что для всех $t \ge T$:

$$mes\{z \in \mathbb{C} : Q(z) > t\} \le C e^{-\gamma t}. \quad (16)$$

Отметим, что такая функция локально интегрируема, $Q(z) \in \mathcal{L}^1_{loc}$, и, кроме того, в теореме 2 $mes\, D \setminus E' = 0$.

Пусть $H(Q(z))$ - множество всех нормированных $Q(z)$-к.к. отображений $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(\infty) = \infty$.

Следствие 1.9. Пусть f и $f_n \in H(Q(z))$, $n = 1, 2, \ldots$, где $Q(z)$ экспоненциально ограничена по мере. Тогда для сходимости $f_n \to f$ л.р. достаточно выполнения любого из следующих условий:

1. $\mu_n \to \mu$ п.в.,
2. $\mu_n \to \mu$ по мере,
3. $\mu_n \to \mu$ в $\mathcal{L}^p_{loc}$, $1 \le p \le \infty$.

Как будет следовать из результатов второй главы, ни одно из этих условий не является необходимым. Более того, как будет явствовать из теоремы 4, необходимым условием не является даже слабая сходимость ни в одном из пространств $\mathcal{L}^p_{loc}$, $1\le p\le\infty$ (следствие 2.1).

Обозначим через $B^\infty(\mathbb{C})$ - открытый единичный шар в пространстве $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{C})$. Определим для любой функции $\mu\in B^\infty(\mathbb{C})\cap\mathcal{L}^2(\mathbb{C})$ нелинейное преобразование

$$F(\mu)=m\hat{\mu}+m(\hat{\mu}*(m\hat{\mu}))+\ldots, \qquad (17)$$

где $*$ обозначает свертку функций,

$$\hat{\mu}(z)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\mathbb{C}}\mu(\zeta)\,e^{-i\operatorname{Re} z\bar{\zeta}}\,d\xi\,d\eta \qquad (18)$$

- преобразование Фурье и $m(z)=z/\bar{z}\in\mathcal{L}^\infty(\mathbb{C})$ - мультипликатор.

Т е о р е м а 3. Пусть функция $Q(z):\mathbb{C}\to I=[1,\infty]$ экспоненциально ограничена по мере и пусть $E_j,\ j\in J,$ - некоторое покрытие плоскости $\mathbb{C}$ по мере ограниченными измеримыми множествами, на каждом из которых $Q(z)$ ограничена. Тогда для сходимости $f_n\to f$ л.р. в $H(Q(z))$ необходимо и достаточно, чтобы $F(\tilde{\mu}_n)\to F(\tilde{\mu})$ слабо в $\mathcal{L}^2(\mathbb{C})$ для срезок комплексных характеристик μ и μ_n, $n=1,2,\ldots$, на каждом из множеств $E_j,\ j\in J$.

В частности, для любой измеримой п.в. конечной $Q(z)$ множества

$$E_m=\{z\in\mathbb{C}: |z|\le m,\ Q(z)\le m\}, \qquad (19)$$

$m=1,2,\ldots$, образуют одно из счетных таких семейств.

Наиболее просто теорема 3 формулируется для Q-к.к. отображений с компактным носителем:

С л е д с т в и е 1.12. Пусть f и $f_n\in H(Q)$, $Q<\infty$, $n=1,2,\ldots$, имеют носители комплексных характеристик μ и μ_n, $n=1,2,\ldots$, сосредоточены в некотором компакте $K\subseteq\mathbb{C}$. Тогда для сходимости $f_n\to f$ л.р. необходимо и достаточно, чтобы $F(\mu_n)\to F(\mu)$ слабо в $\mathcal{L}^2(\mathbb{C})$.

Заметим также, что теорема 3 позволяет строить различные метрики, которые генерируют локально равномерную сходимость нормированных $Q(z)$-к.к. отображений (следствие 1.11).

В главе 2 рассматриваются классы гомеоморфизмов с ограничениями на комплексные характеристики теоретико-множественного типа.

Напомним, что $Q(z)$-к.к. отображения имеют комплексные характеристики

$$\mu(z) \in \Delta_{q(z)} \qquad \text{п.в.}, \tag{20}$$

где

$$\Delta_{q(z)} = \{ \nu \in \mathbb{C} : |\nu| \le q(z) \}, \; z \in \mathbb{C}, \tag{21}$$

и

$$q(z) = (Q(z)-1)/(Q(z)+1) \; . \tag{22}$$

Шиффером М. и Шобером Г. (1978), при $Q(z) \equiv Q < \infty$, были введены классы отображений с дополнительными ограничениями

$$\mathcal{F}(\mu(z), z) \le 0 \qquad \text{п.в.} \tag{23}$$

Последняя из постановок ведет прямо к общим теоретико-множественным ограничениям:

$$\mu(z) \in M(z) \subseteq \Delta_{q(z)} \qquad \text{п.в.} \tag{24}$$

Обозначим через H_M соответствующий подкласс $H(Q(z))$.

В § 2.1 доказана теорема замыкания классов H_M :

Т е о р е м а 4 . Пусть функция $Q(z): \mathbb{C} \to I = [1, \infty]$ экспоненциально ограничена по мере и $M(z)$, $z \in \mathbb{C}$, - произвольное семейство непустых замкнутых множеств из $\Delta_{q(z)}$, измеримое по параметру.

Тогда в топологии локально равномерной сходимости

$$\overline{H_M} = H_{inv\,co\,M} \; , \tag{25}$$

где $\operatorname{inv} co\, M(z),\ z\in C$, - семейство инвариантно-выпуклых оболочек множеств $M(z),\ z\in C$. При этом, класс $H_{\operatorname{inv} co\, M}$ является секвенциально компактным.

Здесь семейство непустых замкнутых плоских множеств $M(z),\ z\in C$, называется измеримым по параметру z, если множество точек

$$E_0 = \{z\in C:\ M(z)\subseteq M_0\} \tag{26}$$

измеримо относительно плоской меры Лебега для любого замкнутого множества M_0, т.е. это есть полный аналог измеримой функции.

Отметим, что понятие измеримого семейства множеств упоминается также в теории вероятностей и теории оптимального управления под названиями "случайное множество" и "измеримое многозначное отображение", соответственно. Здесь мы используем классический термин Бурбаки Н. "семейство множеств". Это понятие восходит к одной из работ Шоке Г. (1953). Развитие теории измеримых семейств связано с именамиВаладье М., Кастена Ч., Куратовского К., Рокафеллара Р., Джекобса М. и других.

Автору данной диссертации принадлежат лишь специальные результаты этой теории, которые к тому же носят вспомогательный характер. Среди них можно назвать установление измеримости семейств $\operatorname{inv} co\, M(z)$ и $\operatorname{inv} ext\, M(z)$ при измеримости $M(z)$. Основные моменты этой теории изложены в приложении Б. В частности, теорема Б1 содержит целый ряд эффективных критериев измеримости семейств.

Подчеркнем, что условие измеримости семейства множеств $M(z)$ по параметру z является существенным для теоремы 4. Можно привести пример, когда для неизмеримого $M(z)$ класс H_M пуст, а класс $H_{\operatorname{inv} co\, M}$ не пуст. Точнее,

$$M(z) = \{-\varphi(z),\ \varphi(z)\}, \tag{27}$$

где $\varphi(z):\ C\to[0,q],\ 0<q<1$, - произвольная неизмеримая функция.

В условиях теоремы 4, когда $M(z)\neq\varnothing$ п.в. и измеримо по z , в силу известной теоремы об измеримых сечениях и теоремы существования Давида, заведомо

$$H_M \neq \emptyset. \tag{28}$$

Теорема замыкания имеет одно очень интересное следствие для теории сходимости:

С л е д с т в и е 2.1 . Для любого $1 < Q < \infty$ существует последовательность Q-к.к. отображений $f_n: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, которая сходится л.р. к Q-к.к. отображению $f: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ такая, что μ_n не сходится к μ слабо ни в одном из пространств $\mathcal{L}^p_{loc}$, $1 \leq p \leq \infty$.

В § 2.2 сформулированы необходимые и достаточные условия компактности классов H_M :

Т е о р е м а 5 . Пусть функция $Q(z): \mathbb{C} \to I = [1, \infty]$ экспоненциально ограничена по мере и семейство непустых замкнутых множеств $M(z) \subseteq \Delta_{q(z)}$, $z \in \mathbb{C}$, измеримо по параметру z . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) класс H_M секвенциально компактен относительно локально равномерной сходимости;

2) множества $M(z)$ инвариантно-выпуклы для п.в. $z \in \mathbb{C}$.

При этом, условие 2) остается достаточным для компактности класса H_M и при отсутствии измеримости $M(z)$ по z , как это видно непосредственно из теоремы 2. Однако в этом случае данное условие перестает быть необходимым, как показывает пример, приведенный в предыдущем параграфе. В этом случае также нет гарантий непустоты класса.

В § 2.3 приведены основные следствия для теории вариационного метода на классах H_M . В частности, доказан вариационный принцип максимума (теорема 6), согласно которому комплексная характеристика μ экстремали f в задаче о $\max \Omega$ для любого дифференцируемого по Гато без вырождения функционала $\Omega: H_M \to \mathbb{R}$ на компактном классе H_M удовлетворяет включению

$$\mu(z) \in \partial M(z) \quad \text{п.в.} \tag{29}$$

В главе 3 рассмотрены гомеоморфизмы класса Соболева с ограничениями на дилатацию интегрального типа. Различные классы отображений, квазиконформных в среднем, изучались в работах Альфорса Л., Песина И.Н., Конау Р., Крушкаля С.Л., Кругликова В.И., Кудьявина В.С., Борчук С.М. и других авторов. Одним из основных достижений последнего времени в этой области стала уже упоминавшаяся нами теорема существования и единственности Давида. Незамкнутость классов Давида, по-видимому, впервые была обнаружена Тукиа П. (1989). Им же было изучено важное свойство нормальности таких классов.

Обозначим через H^{Φ} совокупность всех сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов $f: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ с обобщенными производными, с нормировками $f(0)=0,\ f(1)=1,\ f(\infty)=\infty$, и с интегральным ограничением на дилатацию $p(z)$ вида:

$$\iint\limits_{\mathbb{C}} \Phi(p(z))\,dx\,dy \le 1, \tag{30}$$

где $\Phi: I \to \overline{\mathbb{R}^+},\ I=[1,\infty]$ - произвольная функция. Как легко видеть, для непустоты класса H^{Φ} необходимо и достаточно, чтобы

$$\inf_{t\in I} \Phi(t) = 0, \tag{31}$$

если $\Phi(\infty)=\infty$. Будем говорить, что функция $\Phi \ge 0$ имеет экспоненциальный рост на бесконечности, если

$$\Phi(t) \ge \beta e^{\gamma t} \tag{32}$$

для всех $t \ge T$ при некоторых $\gamma > 0,\ \beta > 0$.

В § 3.1 доказана теорема замыкания для классов H^{Φ}:

Теорема 7. Пусть $\Phi: I \to \overline{\mathbb{R}^+}$ имеет экспоненциальный рост на ∞. Тогда в топологии локально равномерной сходимости:

$$\overline{H^{\Phi}} = H^{\Phi_0}, \tag{33}$$

где $\Phi_0: I \to \overline{\mathbb{R}^+}$ - нижняя огибающая функции Φ. При этом, класс H^{Φ_0} является секвенциально компактным.

Здесь по определению

$$\Phi_0(t) = \sup_{\varphi \in \Psi} \varphi(t), \quad t \in I, \tag{34}$$

где Ψ - семейство всех непрерывных неубывающих выпуклых функций $\varphi: I \to \overline{\mathbb{R}^+}$ таких, что $\varphi(t) \leq \Phi(t)$, $t \in I$. Как легко заметить, нижняя огибающая функции $\Phi: I \to \overline{\mathbb{R}^+}$ представляет собой наибольшую неубывающую выпуклую функцию $\Phi_0: I \to \overline{\mathbb{R}^+}$, которая непрерывна в смысле $\overline{\mathbb{R}^+}$ слева в точке

$$Q = \sup_{\Phi(t) < \infty} t \tag{35}$$

и график которой, лежит ниже графика Φ. При этом, $\Phi_0(t) \equiv \infty$ для $t > Q$ и $\Phi_0(t) < \infty$ при $t < Q$.

В § 3.2 найдены необходимые и достаточные условия компактности классов H^{Φ}:

Теорема 8. Пусть $\Phi: I \to \overline{\mathbb{R}^+}$, $I = [1, \infty]$, имеет экспоненциальный рост на ∞ и $\inf \Phi = 0$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) H^{Φ} секвенциально компактен относительно локально равномерной сходимости;

2) Φ не убывает, выпукла и непрерывна в смысле $\overline{\mathbb{R}^+}$ слева в точке Q из (35).

Если $Q < \infty$, то условие экспоненциального роста на ∞ выполнено автоматически и, таким образом, мы имеем:

Следствие 3.1. Пусть $\Phi: I \to \overline{\mathbb{R}^+}$ - произвольная функция с $\inf \Phi = 0$ и $Q < \infty$. Тогда для секвенциальной компактности класса H^{Φ} необходимо и достаточно, чтобы Φ была непрерывной, неубывающей и выпуклой функцией на отрезке $[1, Q]$.

Здесь непрерывность Φ, по-прежнему, понимается в смысле $\overline{\mathbb{R}^+}$.

Наконец, приведем наиболее интересный пример некомпактного класса. Таковым является класс всех Q-к.к. отображений с интегральным ограничением

ЛНБ ім. В. Стефаника
АН Укра

$$\iint\limits_{C} |\mu(z)|\, dxdy \le 1 . \tag{36}$$

В наших обозначениях это есть класс H^{Φ} с

$$\Phi(t) = \begin{cases} (t-1)/(t+1), & 1 \le t \le Q, \\ \infty, & t > Q . \end{cases} \tag{37}$$

Как легко видеть, функция $\varphi(t) = (t-1)/(t+1)$ не является выпуклой, поскольку $\varphi''(t) = -4/(t+1)^2 < 0$. Таким образом, не выполнено одно из условий компактности.

В § 3.3 собраны следствия для теории вариационного метода на классах H^{Φ}, которые полностью аналогичны таковым на классах H_M. В частности, в вариационном принципе максимума (теорема 9) для дилатации $\rho(z)$ экстремали $f(z)$ выполнено равенство:

$$\iint\limits_{\Omega} \Phi(\rho(z))\, dxdy = 1 . \tag{38}$$

Глава 4 посвящена исследованию поведения квазиконформных отображений в точке.

Как показывает пример Шабата

$$w = z\,(1 - \ln|z|), \tag{39}$$

при непрерывной комплексной характеристике $\mu(z)$ (доопределенной нулем при $z = 0$) отображение $w = f(z)$ может быть недифференцируемым в обычном смысле.

Однако как, по-видимому, впервые установлено Белинским П.П., если $\mu(z)$ непрерывна в точке z_0, то $w = f(z)$ дифференцируемо в следующем смысле:

$$\Delta w = A(\rho)\left[\Delta z + \mu_0 \overline{\Delta z} + o(\rho)\right], \tag{40}$$

где $\mu_0 = \mu(z_0)$, $\rho = |\Delta z + \mu_0 \overline{\Delta z}|$, $A(\rho)$ зависит только от ρ и $o(\rho)/\rho \to 0$ при $\rho \to 0$. Подчеркнем, что здесь $A(\rho)$ может не иметь определенного конечного предела при $\rho \to 0$, но, как показано мною, обладает дополнительным свойством:

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{A(t\rho)}{A(\rho)} = 1 \tag{41}$$

для любого $t > 0$.

Дифференцируемость отображения f в смысле (40) с дополнительным условием (41) в дальнейшем именуется как **дифференцируемость по Белинскому**. При этом, в случае отсутствия непрерывности $\mu(z)$, в соотношении (40) не обязательно $\mu_0 = \mu(z_0)$. Если $\mu_0 = 0$, то говорим также, что f **конформно по Белинскому** в точке z_0.

В § 4.1 найдено несколько критериев конформности по Белинскому (теорема 10). Один из критериев (необходимое и достаточное условие) заключается в асимптотической однородности квазиконформного отображения $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(0) = 0$, в нуле

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z\zeta)}{f(z)} = \zeta \tag{42}$$

для любого $\zeta \in \mathbb{C}$ при $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Другой состоит в том, что:

$$\lim_{z \to 0} \left\{ \frac{f(z')}{f(z)} - \frac{z'}{z} \right\} = 0 \tag{43}$$

при $z, z' \in \mathbb{C}, |z'| < \delta |z|$, для любого $\delta > 0$.

В частности, при $|z'| = |z|$ из (43) получаем, что

$$\lim_{r \to 0} \frac{\max\limits_{|z|=r} |f(z)|}{\min\limits_{|z|=r} |f(z)|} = 1, \tag{44}$$

т.е. характеристика Лаврентьева равна 1 в нуле. Геометрически это означает, что инфинитезимальный круг с центром в нуле переходит в инфинитезимальный круг.

Однако условие (42) гораздо сильнее условия (44). Из (42) мы также получаем асимптотическое сохранение углов между лучами, исходящими из начала в направлении соответствующих точек:

$$\lim_{z\to 0}\,[\arg f(z\zeta) - \arg f(z)] = \arg\zeta \tag{45}$$

и сохранение модулей инфинитезимальных колец:

$$\lim_{z\to 0} \frac{|f(z\zeta)|}{|f(z)|} = |\zeta| \,. \tag{46}$$

Последние два геометрические свойства являются характеристическими для конформности по Белинскому.

Как показывает пример Шабата (39) и

$$f(z) = z\, e^{i\sqrt{-\ln|z|}}\,, \tag{47}$$

при конформности по Белинскому, в отличие от обычной конформности, допускаются бесконечно большие растяжения и сжатия в точке, а также переход радиальных линий в бесконечно накручивающиеся спирали.

Приведем наиболее интересное следствие теоремы 10, исходным пунктом которого служит еще один критерий, состоящий в том, что:

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{f(\tau\zeta)}{f(\tau)} = \zeta \tag{48}$$

для любого $\zeta\in\mathbb{C}$ при $\tau > 0$.

Следствие 4.1. Пусть Q -к.к. отображение $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ имеет комплексную характеристику $\mu(z)$ аппроксимативно непрерывную в точке z_0. Тогда f дифференцируемо по Белинскому в этой точке с $\mu_0 = \mu(z_0)$.

Классическое понятие аппроксимативной непрерывности, которое можно, например, найти в "Теории интеграла" Сакса С., эквивалентно сходимости по мере $\mu_\tau(z) \to \mu_0 = \mu(z_0)$ при $\tau \to 0$, где $\mu_\tau(z) = \mu(z_0 + \tau z)$, $\tau > 0$. Поэтому здесь работает следствие 1.9.

Учитывая то обстоятельство, что для функций из $\mathcal{L}^\infty$ точки аппроксимативной непрерывности совпадают с точками Лебега, предыдущее следствие можно сформулировать и по другому:

Следствие 4.2. Пусть Q -к,к. отображение f имеет комплексную характеристику μ, удовлетворяющую условию:

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r^2} \iint\limits_{|z-z_0|\le r} |\mu(z) - \mu(z_0)|\, dx\, dy = 0 . \tag{49}$$

Тогда f дифференцируемо по Белинскому в точке z_0 с $\mu_0 = \mu(z_0)$.

Условие (49) перекликается со знаменитым достаточным условием Тейхмюллера-Виттиха-Белинского

$$\iint\limits_{|z-z_0|\le r} \frac{|\mu(z) - \mu_0|}{|z-z_0|^2}\, dx\, dy < \infty \tag{50}$$

для обычной дифференцируемости.

Однако, благодаря теореме 3, здесь также удается выписать необходимые и достаточные условия дифференцируемости и конформности по Белинскому (следствия 4.3 и 4.4).

В § 4.2 положительно разрешен аналог проблемы Райха-Вальказака относительно конформности по Белинскому.

Еще в 1965 году Райх Е. и Вальказак Г.Р. высказали гипотезу, что, каков бы ни был модуль комплексной характеристики $k(z) = |\mu(z)|$, всегда можно так подобрать ее аргумент $\arg \mu(z)$, что соответствующее квазиконформное отображение $f(z)$ будет конформным в любой наперед заданной точке плоскости $z_0 \in \mathbb{C}$.

Полное решение указанной проблемы до сих пор не найдено. Поскольку при конформности по Белинскому сохраняются многие геометрические свойства конформных отображений, перечисленные в предыдущем параграфе, следующую теорему можно рассматривать как частичное решение проблемы Райха-Волькзака:

Теорема 11. Пусть $k(z): \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ – произвольная измеримая функция такая, что $0 \le k(z) \le q < 1$, и пусть $z_0 \in \mathbb{C}$ – произвольная точка плоскости.

Тогда существует Q-к.к. отображение $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ с комплексной характеристикой $\mu: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $|\mu(z)| = k(z)$ п.в., которое является конформным по Белинскому в точке z_0.

Отметим, что этот поразительный факт устанавливается на основе теоремы 4 о замыкании классов H_M.

Наконец, в § 4.3 получена:

Теорема 12. Пусть квазиконформное отображение f конформно по Белинскому в точке $z_0 \in \mathbb{C}$, где $f(z_0) \neq \infty$. Тогда:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\ln |f(z) - f(z_0)|}{\ln |z - z_0|} = 1 . \qquad (51)$$

На ее основе, для иллюстрации возможных приложений, доказана теорема существования и представления решений с особенностями логарифмического типа для одного из основных уравнений математической физики (предложение 4.3).

Кроме того, диссертация содержит несколько приложений, функциональное назначение которых различно. Если вспомогательный материал приложений А и Б используется при доказательстве основных результатов, то приложения В и Г предназначены для распространения результатов на более общие классы отображений.

О приложениях А и Б речь уже шла перед формулировкой теоремы 2 и после теоремы 4, соответственно.

В приложении В изложена теория абстрактных пространств со сходимостями Фреше-Урысона. Основная часть этого приложения посвящена так называемому ядерному пространству, состоящему из открытых множеств произвольного топологического пространства и наделенному сходимостью к ядру. При весьма общих предположениях доказана секвенциальная компактность этого пространства. В частности, доказана секвенциальная компактность ядерных пространств произвольных топологических многообразий.

В приложении Г введено понятие голоморфного оператора , которое выполняет роль обобщенной нормировки решений уравнения Бельтрами и позволяет переносить доказанные в диссертации теоремы на отображения, внутренние по Стоилову. Главное внимание здесь уделяю анализу поведения точек ветвления, а также радиусов листности и инъективности при локально равномерной сходимости таких отображений. Отметим также, что предыдущее приложение и известная теория униформизации позволяют переносить эти теоремы на отображения с переменными областями определения, которые заданы на произвольных римановых поверхностях.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Рязанов В.И. Некоторые вопросы сходимости и компактности для квазиконформных отображений // Доклады АН УССР. - 1982.- №6. - С.24-26.

2. Рязанов В.И. Вариационный метод для общих классов квазиконформных отображений // Доклады АН УССР.- 1982. - №8. - С.25-28.

3. Рязанов В.И. Некоторые вопросы сходимости и компактности для квазиконформных отображений // Теория отображений и приближение функций.- К.: Наук.думка, 1983.- С.50-62.

4. Рязанов В.И. Оператор Гильберта и сходимость характеристик квазиконформных отображений // Доклады АН УССР. - 1985. - № 3.- С.24-26.

5. Рязанов В.И. Критерий сходимости характеристик квазиконформных отображений // Тезисы докладов 3-ей Междунар.конф. по компл.анал. и его прилож.- Варна, 1985.- С.28.

6. Рязанов В.И. О сходимости характеристик квазиконформных отображений // Укр.мат.ж.- 1986.- 38, №2. - С.200-204.

7. Рязанов В.И. (Ryazanov V.I.) Questions of Convergence and Compactness for Quasiconformal Mappings // Amer.Math.Soc. Transl.- 1986. 131, N°2.- P.7-19.

8. Гутлянский В.Я., Рязанов В.И. О квазиконформных отображениях с ограничениями на характеристику М.А.Лаврентьева интегрального типа // Доклады АН СССР.- 1987.- Т.297, №2. - С.283-286.

9. Рязанов В.И. Вариационный метод для квазиконформных отображений с ограничениями на характеристики // Теория отображений и приближение функций.- К.: Наук.думка, 1989. - С.145-153.

10. Рязанов В.И. (Ryazanov V.I.). On necessary and sufficient condition for convergence of complex dilatations // Pliska: Studia mathematica bulgarica.-1989.-10.-P.39-44.

11. Рязанов В.И. О точности некоторых теорем сходимости // Доклады АН СССР.- 1990.- 315, №2.- С.317-319.

12. Рязанов В.И. Теорема замыкания для квазиконформных отображений с интегральными ограничениями // Доклады АН СССР. - 1990.- 315, №3.- С.540-543.

13. Гутлянский В.Я., Рязанов В.И. О квазиконформных ото-

бражениях с интегральными ограничениями на характеристику М.А.Лаврентьева // Сиб.мат.ж. - 1990.- Т.31, №2.- С.21-36.

14. Рязанов В.И. О замыкании классов квазиконформных отображений с интегральными ограничениями // Укр.мат.ж. - 1991.-43, №4.- С.435-440.

15. Рязанов В.И. О компактификации классов с интегральными ограничениями на характеристики Лаврентьева // Сиб.мат. ж.- 1992.- 33, №1.- С.87-104.

16. Рязанов В.И. Об усилении теоремы сходимости Штребеля // Известия АН России. Сер.матем.- 1992.- 56, №3.- С.636-653.

17. Рязанов В.И. О необходимых и достаточных условиях дифференцируемости по Белинскому // Доклады АН России.-1992. - 323, №2.- С.241-244.

18. Рязанов В.И. Критерий дифференцируемости по Белинскому и его следствия // Укр.мат.ж.- 1992.- 44, №2.- С.295-300.

19. Рязанов В.И. Решение проблемы Райха-Вольнзака о конформности по Белинскому-Лаврентьеву // Укр.мат.ж.- 1992.-44, №10.- С.1406-1411.

20. Рязанов В.И. О сходимости характеристик, преобразовании Фурье и проблеме Райха-Вольнзака // Доклады АН России. - 1992.- 323, №2.- С.150-152.

21. Рязанов В.И. О квазиконформных отображениях с ограничениями по мере // Укр.мат.ж.- 1993.- 45, №7.- С.1009-1019.

22. Рязанов В.И. О квазиконформных отображениях с локально суммируемой границей деформаций // Доклады АН России.- 1993.- 332, №6.- С.693-695.

23. Рязанов В.И. О теоремах сходимости и компактности для соболевских гомеоморфизмов.- Донецк, 1993.- 27с.- (Препринт/АН Украины. Ин-т прикладной математики и механики ; 93.07).

Рязанов

Подписано к печати 22.12.93 БЛ
Формат 60x84/16. Бумага типографская.
Офсетная печать
Усл.п.л. 1,25 Заказ № 3 Тираж 100 экз.
Р-г ИПММ АН Украины. 340114, г. Донецк,
ул. Розы Люксембург, 74

[illegible] с [illegible] отображениями на [illegible] М.А.Лаврентьева // Сиб.мат.ж. – 1990. – Т.31, №5, – С.21-36.

14. [illegible] В.И. О [illegible] отображений [illegible] и [illegible] // Сиб.мат.ж. – 1991. – Т.32, №4. – С.[illegible]-[illegible].

15. [illegible] В.И. О [illegible] и [illegible] // Сиб.мат.ж. – 1992. – 33, №1. – С.[illegible]-[illegible].

16. [illegible] В.И. Об [illegible] // Доклады АН России. – 1992. – Т.[illegible], №2. – С.[illegible]-[illegible].

17. [illegible] В.И. О преобразованиях [illegible] условиях [illegible] по Белинскому // Доклады АН России. – 1992. – 323, №2. – С.[illegible]-244.

18. [illegible] В.И. Критерий [illegible] по Белинскому // Укр.мат.ж. – 1992. – 44, №2. – С.[illegible]-[illegible].

19. [illegible] В.И. Решение [illegible] по Белинскому-Лаврентьеву // Укр.мат.ж. – 1992. – 44, №[illegible]. – С.1409-1411.

20. [illegible] В.И. О [illegible] Бойма и проблема Бойма-Белинского // Доклады АН России. – 1992. – 323, №2. – С.150-152.

21. [illegible] В.И. О [illegible] по мере // Укр.мат.ж. – [illegible] – [illegible] – С.[illegible]

22. [illegible] В.И. О [illegible] и [illegible] с [illegible] деформаций // Доклады АН России. – 1993. – [illegible], №[illegible]. – С.[illegible]

23. Резников В.И. О непрерывности, [illegible] и [illegible] отображений. – Донецк, 1993. – 28 с. – (Препринт/АН Украины. Ин-т прикладной математики и механики; [illegible]).

46117

Aв 29.379