

КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

На правах рукопису

Мельник Сергій Євгенович

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДВУМІРНИХ ПРОЦЕСІВ
ПЕРЕНОСУ ІМПУЛЬСУ ТА ЕНЕРГІЇ НА ОСНОВІ
МЕТОДУ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

01.02.05 - механіка рідин, газу та плазми

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук



Київ - 1994

Дисертацією є рукопис

Робота виконана в Дніпропетровському державному
університеті

Наукові керівники – доктор технічних наук
О.А. Рядно,
доктор фізико-математичних наук
О.О. Кочубей

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук,
професор Д.І. Шаповал
кандидат технічних наук
В.В. Махін

Провідна установа – Інститут технічної теплофізики
АН України

Захист відбудеться " 23 " Листопада 1994р. о 15⁰⁰
на засіданні спеціалізованої Вченої Ради К 068.18.19 при
Київському державному університеті імені Тараса Шевченка
252127, м.Київ, проспект Глушкова, 6, механіко-математичний
факультет, аудиторія 45 .

З дисертацією можна ознайомитися у науковій бібліотеці
Київського університету.

Автореферат розісланий " 20 " січня 1994р.

Вчений секретар
спеціалізованої Вченої Ради
канд.фіз.-мат. наук

В. Ковальчук В.Ф. Ковальчук

ЛНБ України ім.В.Стефаніка



00801491 (N)

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність вивчення процесів конвективно-дифузійного тепло- та масопереносу у полях різних масових сил з урахуванням реальних геометрій об'єктів обумовлена багатьма факторами, пов'язаними з виробництвом та використанням енергії, ускладненням технічних пристроїв та технологій, зростаючою увагою до проблем екології та охорони навколишнього середовища. Серед процесів, що викликають великий інтерес та мають неабияке значення у природі та різних технічних пристроях, відмітимо термогравітаційну конвекцію у атмосфері та океані, електромагнітне перемішування, тепловміни у змінному гравітаційному полі, зокрема, гідромеханіку невагомості та аналіз технологічних експериментів у космосі, зберігання паливних рідин та ін. Оскільки у багатьох практично вагомих випадках проведення експериментальних досліджень реальних процесів не уявляється можливим, а їх теоретичний аналіз ускладнюється багатьма причинами, пов'язаними з наявністю різних масових сил, складним характером їх взаємодії та складною гідродинамікою потоків, виникає необхідність у вдосконаленні існуючих та створенні нових чисельних методів розв'язання таких задач. Серед усього різноманіття існуючих у сучасній обчислювальній гідродинаміці чисельних методів все більшу увагу дослідників привертає метод скінченних елементів (МСЕ). Виникший первісно як інструмент розв'язання задач теорії пружності, МСЕ здобув широке розповсюдження в галузі динаміки рідини. В той же час досвід досліджень в практиці застосування МСЕ в механіці суцільних середовищ свідчить про необхідність перегляду існуючих точок зору як на вже розроблені скінченноелементні методики у цілому, так і на окремі етапи реалізації методу. Одним з таких етапів, що у значній мірі визначає точність очікуваних результатів, є процедура побудовання апроксимації функцій на елементах. Використання в якості інтерполантів поліномів, що робиться у більшості випадків, може приводити до труднощів, пов'язаних з стійкістю розв'язків, а це має місце у випадку використання центральнорізницевої апроксимації у методі скінченних різниць (МСР). Тому поряд з використанням поліноміальних залежностей, в останні роки позначилася тенденція, спрямована на пошук якісних нових апроксимаційних структур, які дозволяють одержувати точні та стійкі розв'язки задач різної складності.

Усе вищевикладене дозволяє зробити висновок про актуальність по-перше, дослідження процесів переносу у змінних гравітаційних та електромагнітних полях та, по-друге, розвитку для більш повного та точного вивчення цих процесів методу скінченних елементів в напрямку створення математично та фізично обґрунтованих інтерполяційних залежностей. Актуальними є також проблеми розробки нових економічних алгоритмів чисельного розрахунку на базі МСЕ та поширення на їх засаді моделюємих крайових задач динаміки рідини та теплообміну.

Дисертація виконувалась у рамках держбюджетної теми 94-89 "Чисельне моделювання процесів переносу рідини та газу на основі сучасних алгоритмічних та програмних засобів", а також Програми ДКНТ СРСР, ДКНО СРСР "Математичне моделювання у наукових та технічних системах" (розд.28. Формування комплексів алгоритмічних програмних засобів та чисельних методів, які реалізують математичні моделі течій та теплообміну рідини та газу на сучасних ЕОМ).

Метою даної дисертаційної роботи є чисельне дослідження конвекції у замкнених областях у змінному гравітаційному полі, вивчення взаємодії електровихрової та термогравітаційної течії та їх сумісного впливу на теплообмін на базі якісно нового підходу побудовання апроксимації шуканих функцій у рамках методу скінченних елементів, нових алгоритмів розрахунку та комплексів програм, що їх реалізують.

Відповідно до мети роботи ставилися наступні задачі дослідження:

- побудовання інтерполяційних залежностей функцій на елементах, що базуються на частинних розв'язках модельних рівнянь переносу;
- розробка економічних алгоритмів розрахунку процесів переносу у полях сил різної фізичної природи;
- створення комплексу прикладних програм, що реалізують розроблені алгоритми;
- підтвердження працездатності та ефективності запропонованого підходу шляхом тестування алгоритмів та комплексу програм на різних задачах гідро-, електродинаміки та теплообміну;
- застосування розробленої методики до розв'язання задачі теплообміну при вільноконвективній течії у замкненій вісесиметричній області при нестационарних крайових умовах, у змінному гравітаційному полі;

- застосування розробленої методики для дослідження взаємодії електровихррової та термогравітаційної течій та їх вплив на теплообмін у циліндричній ємкості.

Наукова новизна дисертаційної роботи визначається наступними положеннями:

- побудовані апроксимаційні залежності для шуканих функцій на трикутних елементах для плоских та вісесиметричних задач переносу, що являють собою суперпозицію частинних розв'язків модельних рівнянь конвективно-дифузійного переносу та дозволяють урахувати джерелові члени цих рівнянь;
- розроблені алгоритми розв'язання спряжених задач гідродинаміки та теплообміну, що дозволяють урахувати вплив гравітаційних та електромагнітних сил на процеси переносу у областях складної геометричної форми;
- створені та всебічно протестовані комплекси прикладних програм, що реалізують запропоновані алгоритми та дозволяють проводити дослідження процесів переносу у широкому діапазоні зміни визначаючих процеси параметрів;
- здійснено дослідження спряженого теплообміну при вільноконвективній течії у замкненій вісесиметричній області в умовах змінного за часом гравітаційного поля;
- вивчені закономірності взаємодії сил Архімеда та Лоренца та їх вплив на гідродинаміку та теплообмін у замкненому циліндричному посуді.

Практичне значення наведених у роботі результатів обумовлене можливістю ефективного застосування розробленої методики при розв'язанні широкого кола задач гідромеханіки та теплопередачі, для дослідження впливу сил різної природи на режими і структуру течій та характеристики теплообміну. Створені алгоритми та комплекси програм, а також одержані на їх основі результати розв'язання прикладних задач переносу у змінних гравітаційних та електромагнітних полях можуть бути застосовані для дослідження процесів динаміки суцільних середовищ на етапах проектування та експлуатації різних приладів та обладнання у енергетиці, металургії, хімічній промисловості, авіаційно-космічній техніці. Наведені у роботі матеріали були застосовані при проведенні чисельних розрахунків та створенні експериментальних зразків у ВНДІ Промгаз, НВО "Тайфун" ДК по метеорології, ВНДІ та використовувались в учбовому процесі у Дніпропетров-

ському державному університеті.

Обґрунтованість та достовірність одержаних результатів ви- значається коректністю математичних моделей розглянутих процесів переносу, строгостю використаного математичного апарату, результа- тами ретельного тестування розробленої розрахункової методики при розв'язанні загальновідомих тестових задач, а також порівнянням результатів тестування з аналітичними, чисельними та експерименталь- ними даними інших авторів.

Автор захищає:

- методику побудування апроксимацій шуканих функцій на три- кутникових скінченних елементах та інтерполяційні залежності, розроблені стосовно рівнянь конвективно-дифузійного пе- реносу, для випадків декартової та циліндричної систем ко- ординат;
- алгоритм розв'язання спряжених дво мірних плоских та вісе- симетричних задач динаміки рідини та теплообміну, що базу- ється на сумісному застосуванні методів скінченних елемен- тів та скінченних різниць;
- комплекс програм, що дозволяє проводити розрахунки гідроди- намічних, температурних та електромагнітних полів у облас- тях складної геометричної форми та каналах змінного профелю;
- результати чисельного дослідження характеристик нестацио- нарного спряженого теплообміну при вільноконвективній те- чії у замкненому вісесиметричному об'ємі, що рухається із змінним прискоренням;
- результати чисельного дослідження взаємодії електровихрво- вої та вільноконвективної течії та їх впливу на гідродина- міку та теплообмін у циліндричному посуді.

Апробація роботи. Матеріали дисертації доповідалися на I та II Мінських Міжнародних форумах по тепломасообміну, Мінськ, 1988 і 1992рр.; на VII та VIII Всесоюзних школа.-семінарах "Сучасні проб- леми гідродинаміки і тепломасообміну та шляхи підвищення ефектив- ності енергетичних пристроїв", Канев, 1989р. і Москва, 1991р.; на VI Всесоюзній школі молодих вчених та спеціалістів "Сучасні проб- леми теплофізики", Новосибірськ, 1990р.; на конференції молодих вчених та спеціалістів ІТТФ, Київ, 1990р.; на засіданні секції "Методи розрахунку процесів теплопереносу та фізико-хімічних пере- творень у високотемпературних матеріалах" Наукової Ради за проб-

лемою " Тепло- та масоперенос у технологічних процесах" ДНТ СРСР за темою "Фізичні та математичні моделі переносу у техніці та технологіях", Москва, 1991р.; на IУ Всесоюзній школі-семінарі молодих вчених та спеціалістів "Актуальні питання теплофізики і фізичної гідродинаміки", Алуста, 1991р.; на III Всесоюзній Школі молодих вчених "Чисельні методи механіки суцільного середовища", Дпрсо, 1991р.; на наукових семінарах кафедри прикладної газової динаміки та тепломасообміну та на щорічних конференціях Дніпропетровського університету за підсумками наукової роботи, Дніпропетровськ, 1988-1993рр.

Публікації. Основні матеріали дисертації надруковані у 17 наукових роботах.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається із вступу, трьох глав, висновків та списку цитованої літератури, який нараховує 249 найменувань. Обсяг роботи складає 182 сторінки, у тому рахунку 4 таблиці та 60 малюнків.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтована актуальність теми, сформульовані мета і наукова новизна, викладено стислий зміст роботи та перелічені її основні наукові положення, що виносяться автором на захист.

В наслідок зробленого аналізу літературних джерел по дослідженню гідродинаміки та теплообміну у полях різних масових сил виявлено, що цілий ряд практично та теоретично важливих питань не набули достатнього розвитку. Зокрема, це вільноконвективні течії у випадках змінного поля сили вагомості та взаємодії термогравітаційних і електромагнітних сил.

Перша глава роботи присвячена аналізу сучасного стану проблеми адаптації МСЕ до розв'язання задач конвективно-дифузійного переносу та математичному моделюванню процесів теплообміну при вимушених, термогравітаційних і електромагнітних течіях рідини.

Аналіз літератури показав, що, незважаючи на існуюче різноманіття формувань, алгоритмів і процедур реалізації МСЕ та побудованих на їх основі програмних комплексів обчислення, в них здебільш використовується класична поліноміальна апроксимація функцій на елементах. В той же час відомо, що така апроксимація приводить на скінченно-елементній сітці до дискретних аналогів конвек-

тивних членів рівнянь переносу в цілому аналогічних центрально-різницевої апроксимації цих членів по МСР. Така аналогія у ряді випадків може приводити до проблем, пов'язаних із стійкістю розв'язків задач.

Альтернативним шляхом розв'язання цієї проблеми є пошук нових формулювань МСЕ, що забезпечують апроксимацію конвективних членів різницями "проти потоку". Важливим кроком у розвитку МСЕ стосовно задач конвективно-дифузійного переносу став також запропонований Патанкармом, Пракашом, Балігою підхід, що базується на понятті контрольного об'єму та апроксимації невідомих функцій на елементах на основі частинних розв'язків рівнянь переносу. Такий підхід дозволяє наблизити властивості скінченноелементних схем до властивостей експоненціальних різничних схем, у певній мірі подолати труднощі, що пов'язані з використанням поліноміальних апроксимацій і одержувати стійкі рішення на досить грубих сітках. В той же час застосування цього підходу у ряді випадків (течії при великих значеннях числа Грасгофу, задачі із складною геометрією розрахункових областей та ін.) може приводити до нефізичних результатів. У даній роботі цей підхід удосконалено, по-перше, шляхом обліку при будівництві апроксимації джерелових членів рівнянь переносу та, по-друге, за рахунок використання локально-одномірних частинних розв'язків конвективно-дифузійної частини початкових рівнянь. Відмітимо, що для віссиметричних задач переносу ці розробки приведені, вергідно, уперше.

У розділі 1.2 роботи формується математична модель розглянутих процесів теплопереносу, яка у загальному випадку містить рівняння Нав'є-Стокса, рівняння балансу енергії, рівняння Максвелла та закон Ома. Проаналізовані основні припущення, що приймаються при дослідженні течії та теплообміну у тепло- і електропровідних середовищах та дозволяють спростити одержану систему рівнянь (виконання узагальненого закону в'язкості Н'ютона, постійність теплофізичних та електромагнітних властивостей рідини, задовільнення наближення Бусинеска, зневажання холодовської е.д.с. та виділення тепла за рахунок в'язкої дисипації). У безіндукційному наближенні для двомірних плоского та віссиметричного випадків приведені розмірні та безрозмірні форми запису рівнянь магнітної гідродинаміки та теплообміну нестискуваної, ізотропно провідної рідини із постійними дисипативними коефіцієнтами, що знаходиться у полях гравітацій-

них та електромагнітних сил. Розглянуто крайові умови, що визначають однозначність рішень наведених систем рівнянь. На основі критеріїв гомохронності висвітлені питання завдання початкових даних до рівнянь гідро-, електродинаміки та енергії. Наведені основні типи крайових умов для гідродинамічних величин (кінематичні, динамічні і змішані умови), електромагнітних величин та температури. Описані умови спряження для напруженостей електричного поля, магнітної індукції, густини току та температури.

Друга глава роботи присвячена розробці та апробації чисельної методики розв'язання нестационарних спряжених задач теплопереносу при вимушених та термогравітаційних течіях.

Створенню методики передувало побудування апроксимації невідомих функцій на елементах. При цьому розглянуто два випадки, що відносяться до прямокутної та циліндричної систем координат. У плоскому випадку модельне рівняння конвективно-дифузійного переносу субстанції f для довільного трикутного елемента з номером (e) запишеться у вигляді:

$$U_e \frac{\partial f}{\partial x} + V_e \frac{\partial f}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) + Q_e, \quad (x, y) \in D_e \quad (1)$$

де U_e, V_e, Q_e - компоненти вектора швидкості та джереловий член, що визначені у центрі мас елемента, D_e - область елемента,

$\alpha = 1/2e(1/D_e)$
Нехай $\varphi(x, y)$ - частинні розв'язки (1) з одиничним джереловим членом. Загальне рішення (1) зобразимо у вигляді лінійної комбінації:

$$f(x, y) = A + B \xi_1 + C \xi_2 + Q_e \varphi, \quad (2)$$

де A, B, C - параметри апроксимації (функції вузлових невідомих).

$$\xi_1 = \frac{\alpha}{U_e} [\exp(U_e(x-x_0)/\alpha) - 1], \quad (3)$$

$$\xi_2 = \frac{\alpha}{V_e} [\exp(V_e(y-y_0)/\alpha) - 1]$$

є частинними розв'язками однорідного рівняння (1).

Відносно φ найбільш оптимальним виявився вибір функції

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{\alpha_0 + 1} (\varphi_1 + \alpha_0 \varphi_2), \quad (4)$$

де

$$\varphi_1 = \frac{1}{W_1} [U_e(x-x_0) + V_e(y-y_0)],$$

$$\varphi_2 = -\frac{1}{2\alpha W^2} [U_0 (Y - Y_0) - v_0 (X - X_0)]^2,$$

$$\alpha_\Delta = \alpha / (W d_\Delta), \quad W = \sqrt{U_0^2 + v_0^2},$$

d_Δ - характерний розмір трикутного елемента.

У виразі (4) ваговий множник α_Δ регулює степінь впливу конвекції та дифузії у процесі переносу збурень від джерела у межах розглянутого елемента. Легко переконатися, що при $W \rightarrow 0$ ($U_0 \rightarrow 0, v_0 \rightarrow 0$) функція φ_2 наближується до одного з розв'язків рівняння теплопровідності з одиничним джерелом, а функції ξ_1, ξ_2 стають близькими до лінійних. Підкреслимо також, що на відміну від робіт Патанкара, Балігі та Пракаша у формулі (2) застосована локально-одномірною апроксимацією розв'язку, вибір якої був зроблений внаслідок проведення експериментів та тестування підходу як з використанням функцій ξ_1, ξ_2 у вигляді (3), так і запропонованих згаданими авторами.

Невідомі A, B, C визначаються, як і в класичному формулюванні МСЕ, з умов рівності f вузловим значенням шуканої функції.

Для побудови функцій ξ_1, ξ_2 у вісесиметричному випадку припускалося, що розміри скінченноелементної сітки такі, що максимальне "відхилення" R/q_0 координат вузлів елемента від координат центру мас трикутника близько до одиниці. Тоді, використовуючи заміну змінних $Y = R \cdot \ln(R/L)$, де L - будь-який лінійний розмір елемента, модельне рівняння переносу для вісесиметричного випадку

$$U_0 \frac{\partial f}{\partial X} + v_0 \frac{\partial f}{\partial R} = \alpha \left[\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial f}{\partial R} \right) \right] + q_0.$$

може бути записано у вигляді свого наближеного "плоского" аналогу (I), справедливості якого обумовлена зробленим вище припущенням.

Вибираючи ξ_1, ξ_2 аналогічно плоскому випадку (3) та $\varphi = \varphi_2$ і вертаючись до перемінної R , будемо мати

$$\xi_1 = \frac{\alpha}{U_0} \left[\exp(U_0 (X - X_0) / \alpha) - 1 \right],$$

$$\xi_2 = \frac{\alpha}{v_0} \left[\left(R / q_0 \right)^{v_0 R_0 / \alpha} - 1 \right], \quad (5)$$

$$\varphi = -\frac{1}{2\alpha W^2} [U_0 R_0 \ln(R/q_0) - v_0 (X - X_0)]^2.$$

Загальна форма апроксимації $\{(X, Q)\}$ на елементі аналогічна (2). Легко бачити, що для наближених розв'язків (5) справедливі аналогічні плоскому випадку зауваження щодо їх граничного переходу при $U_0 \rightarrow 0$ та $V_0 \rightarrow 0$.

При створенні алгоритму розрахунків полів швидкості, тиску та температури система рівнянь конвективного теплообміну записувалася у вигляді:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial X_j} = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 U_i}{\partial X_i^2} + \frac{1}{X_i^{\nu}} \frac{\partial}{\partial X_i} (X_i^{\nu} \frac{\partial U_i}{\partial X_i}) - \nu(i-1) \frac{U_i}{X_i^2} \right] - \frac{\partial P}{\partial X_i} + F_i, \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial X_j} (U_j X_i^{\nu}) = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U_j \frac{\partial T}{\partial X_j} = \frac{1}{Pe} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial X_i^2} + \frac{1}{X_i^{\nu}} \frac{\partial}{\partial X_i} (X_i^{\nu} \frac{\partial T}{\partial X_i}) \right] + Q_i, \quad (8)$$

$$\{t > 0; (X_1, X_2) \in D\}, i=1,2; j=1,2;$$

де масова сила \bar{F} урахує взаємозалежність полів швидкості та температури, $\nu=0,1$ - відповідно до плоского та вісесиметричного випадків: $(X_1, X_2) = (X, Y)$ при $\nu=0$ та $(X_1, X_2) = (X, R)$ при $\nu=1$, D - розрахункова область.

Оскільки початкова система рівнянь нелінійна, алгоритм її розв'язання носить ітераційний характер. Він був побудований таким чином, щоб на кожній ітерації було виконано рівняння суцільності (7), а лінеаризація рівнянь виконувалась за рахунок визначення множників U_j у конвективних членах як відомих з попередньої ітерації. Запишемо систему (6) для окремого трикутного елемента, вважаючи, що U_j ($j=1,2$) та F_i ($i=1,2$) дорівнюють середнім по елементу значенням (індекс "0") та визначені у його центрі мас

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_{j0} \frac{\partial U_i}{\partial X_j} = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 U_i}{\partial X_i^2} + \frac{1}{X_i^{\nu}} \frac{\partial}{\partial X_i} (X_i^{\nu} \frac{\partial U_i}{\partial X_i}) - \nu(i-1) \frac{U_i}{X_i^2} \right] - \frac{\partial P}{\partial X_i} + F_{i0}. \quad (9)$$

Будемо вважати, що тиск P на елементі змінюється лінійно. Тоді $\partial P / \partial X_i = P_{X_i} = \text{const}$ ($i=1,2$). Визначимо їх у центрі елемента та позначимо $Q_{i0} = -P_{X_i} + F_{i0}$.

Зобразимо тепер функції U_i, P у вигляді:

$$U_i = U_i' + U_i'', \quad i=1,2; \quad P = P' + P'' \quad (I0)$$

де P' - задане з попередньої ітерації, наприклад розподілення тиску, якому відповідає розподілення швидкості U_i' ($i=1,2$), що визначається із розв'язання системи (6) з початковими крайовими умовами та використанням неявної різницевої схеми за часом.

Поправки швидкості U_i'' та тиску P'' знаходяться із системи рівнянь:

$$\frac{\partial U_i''}{\partial t} + U_j' \frac{\partial U_i''}{\partial x_j} = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 U_i''}{\partial x_i^2} + \frac{1}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} (x_i' \frac{\partial U_i''}{\partial x_i}) - \nu(i-1) \frac{U_i''}{x_i^2} \right] - \frac{\partial P''}{\partial x_i} \quad (II)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (x_i' U_j'') = - \frac{\partial}{\partial x_j} (x_i' U_j'') \quad (I2)$$

з однорідними крайовими умовами. Після інтегрування по контрольним об'ємам рівнянь (II), (I2) та додавання по елементах маємо систему рівнянь для визначення вузлових значень U_i'' , P'' .

При використанні для визначення тиску P'' рівняння Пуасона виникає необхідність обертання матриць, що пов'язано з великими витратами ресурсів ЕОМ (стрічкові матриці при обертанні стають повністю заповненими). Щоб запобігти цьому пропонується слідуєча схема знаходження поправки P'' . Зобразимо P'' як додаток $P'' = P'' + \delta P$, а U_i'' ($i=1,2$) на елементі як

$$U_i'' = \delta U_i + \psi_i(x_i, x_i, U_{ji}'', P_{xi}'') \quad i=1,2 \quad (I3)$$

де ψ_i - апроксимаційні вирази на елементі, що отримані з використанням (2) при $P_{xi}'' = \partial P'' / \partial x_i$, $j=l, m, n$ - локальні номери вузлів елемента, δU_i - частинні розв'язки лінійного аналогу системи (9) вигляду. $\delta U_i = -c_i \partial(\delta P) / \partial x_i$,

$$c_i = Re \Delta t x_{i2}^2 / [\nu Re x_{i2}^2 + \Delta t (i-1)] \quad (i=1,2);$$

U_{ji}'' - вузлові значення компонент швидкості, що відповідають тиску P'' .

Використовуючи (I3) в (I2) та підсумовуючи елементні рівності по усій розрахунковій області, будемо мати рівняння Пуасона для тиску δP , що розв'язується з урахуванням умов $\partial(\delta P) / \partial n = 0$ на межі розрахункової області, яка збігається зі стінками, та

$\delta P = 0$, де тиск заданий.

Визначивши вузлові значення δP , знаходимо нове розподілення $P_{q,i}^* = P_q^* + \delta P$ ($P^* = 0$ при $q = 0$, q - номер ітерації), і розрахунок продовжується з виконання умови $\max \|\delta P\| < \epsilon_r$, де ϵ_r - задана точність обчислення тиску (аналог відхилення рівняння щільності). Легко бачити, що при $\delta P \rightarrow 0$

$$P^* \rightarrow P^*, U_i^* \rightarrow U_i^*, \operatorname{div} \bar{U} \rightarrow 0 \quad (14)$$

Знаходячи таким чином P^*, U_i^* ($i=1,2$), шукане поле U_i, P визначається за формулами (10).

Загальний ітераційний процес для даного моменту часу продовжується до тих пір, поки не досягнеться задана точність розрахунків у обраній нормі розв'язку. Рівняння (8) повинно бути розв'язано одночасно з (6), (7), або після завершення ітерацій по полю швидкості.

З метою обґрунтування достовірності, точності та ефективності методики, викладений алгоритм із запропонованою апроксимацією функцій на елементах та комплекс програм, що його реалізує, були апробовані на різних задачах гідродинаміки та теплообміну. Як

тестові були обрані задачі, що досліджувалися чисельно та експериментально іншими авторами або ж ті, що мають точний розв'язок. Загальна точність чисельного моделювання процесів вільної конвекції перевірялась при розв'язанні задач вільноконвективної течії у квадратній порожнині, що має різні температури вертикальних стінок (горизонтальні стінки теплоізовані), а також течії тепловіділяючої рідини у циліндричному сосуді. Апробація моделювання вимушеної конвекції проводилась на задачах течії у кав'рні з кришкою, що посувається, та у каналі з локальним звуженням. Остання розв'язувалася як для плоского, так і для несиметричного випадків. Була розв'язана також задача про течію між двома нескінченними коаксіальними циліндрами, один з яких обертається із постійною кутовою швидкістю, що має аналітичний розв'язок.

Характеризуючи результати тестування, відзначимо, що схема дає добре узгодження з експериментальними даними. Порівняння одержаних результатів з чисельними даними інших авторів дозволяє твердити, що запропонована методика має другий порядок точності по просторовим координатам. Аналогічну оцінку точності дає і методика Рунге-Ромберга, що була застосована до аналізу точності результа-

тів розв'язання задачі.

Відзначимо також, що розв'язання задачі про течії у вісесиметричному каналі з локальним звуженням без урахування джерелових членів у (2) приводило до появи пилоподібного розподілення тиску та поздовжньої складової швидкості у зоні звуження каналу. Результати тестування показали, що ур хування джерелових членів у апроксимації функцій на елементах відіграє стабілізуючого фактора чисельного розв'язку.

Третя глава роботи присвячена чисельному дослідженню вільно-конвективної течії при спряженому теплообміні у замкненій вісесиметричній області, що знаходиться у змінному гравітаційному полі; поширенню викладеного у другій главі підходу на випадок течії та теплообміну провідної рідини у вісесиметричному електромагнітному полі і застосуванню цієї методики при розв'язанні задачі взаємодії електровихрвової та термогравітаційної течії і їх сумісного впливу на гідродинаміку та теплопередачу у циліндричній ємкості.

Розглядалося тіло, що складається з конічної та циліндричної частин (мал.1). Порожнина А заповнена повітрям, С - рідиною без вільної поверхні. Припускалося, що в початковий момент часу система (рідина - газ - оболонка) мала початкову температуру T_0 .

Починаючи з моменту часу $\tau = 0^+$ вона зазнавала нагріву з постійним по азимутальному куту коефіцієнтом тепловіддачі та температурою навколишнього середовища T_s , що вважалися відомими функціями часу, радіальної та вісєвої координат. Відомою функцією часу було також прийняте прискорення сили ваги, що діє на систему.

Розрахунки проводилися для трьох варіантів, що відповідали трьом різним рідинам, які заповнювали порожнину С моделі. Безрозмірні параметри, віднесені до фіз. зних властивостей цих рідин, наведені у таблиці 1. На мал.2-4 зображені також графіки зміни значень критеріїв Біо Bi і Грасгофа Gr та безрозмірної температури навколишнього серед. вища Θ_s . Обчислювання були проведені для чотирьох моментів часу з однаковим кроком Δt . При цьому одноду і тому ж значенню фізичного часу відповідали різні значення безрозмірного часу t . Цим пояснюється зсув графіків по часовій вісі на мал.3,4.

Природнім наслідком нагріву системи та дії на неї масової сили є початок вільноконвективного руху рідини у порх нечі моделі. При цьому у початкові моменти часу конвективні потоки не виника-

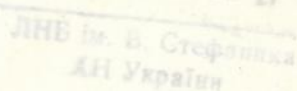
ють, оскільки процес протікає при практично повній відсутності прискорення сили ваги \bar{g} . Передача тепла від стінки моделі і її носової частини до рідини при цьому здійснюється цілком теплопровідністю. Малі ж значення критерія Gr не забезпечують моделі скільки-небудь вагомого прогріву. Температура в усіх її точках до третього моменту часу практично не відрізняється від початкової.

Починаючи з третього моменту часу з'являється масова сила, що діє на частини рідини в ємкості. В цей же період починається зріст коефіцієнту тепловіддачі на поверхні моделі, та зріст температури зовнішнього середовища. Нагрів оболонки приводить до появи градієнту температури у рідині та початку руху у полі сили ваги. На мал.5 зображені розподілення функції струму у порожнині. Видно, що у всіх випадках поблизу стінки існує чітко означений пограничний шар, де градієнт швидкості має максимальне значення: центральне ядро, у якому відбувається повернення рідини від верхньої стінки до носової частини моделі. При цьому у початковий період біля вісі ємкості та верхньої стінки утворюються рециркуляційні зони, які формуються основним потоком за рахунок сил в'язкого тертя між шарами рідини. із зростанням часу зона рециркуляції потоку у верхньої стінки ємкості витискується основним потоком до вісі та поступово руйнується. Руйнується та змінюється у розмірах також зона рециркуляції біля вісі моделі. У вузькій частині ємкості повернена течія стабілізується, оскільки рідина, що спливає на цій ділянці, не може перебороти опір маси висхідного потоку і починає обертатися, а змішувачись з ним. Геометричні розміри зон висхідного та низхідного потоків дають підставу вважати, що у даних випадках має місце інтенсивна конвекція рідини.

У наступному розділі роботи розглянутий алгоритм узагальнюється на випадок течії та теплообміну провідної рідини у вісесиметричному електромагнітному полі.

Система рівнянь, що описує конвективний теплоперенос при вісесиметричному розтіканні струму у області, заповненій провідною рідиною, при наявності зовнішнього магнітного поля $B_z = const$, орієнтованого уздовж вісєвої координати записувалась у вигляді (безіндукційне наближення):

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial x_j} = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial x_1^2} + \frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(x_1 \frac{\partial v_z}{\partial x_1} \right) \right] + Q_z, \quad (19)$$



$$\frac{\partial}{\partial x_j} (U_j X_i) = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho c} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} + \frac{1}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} (x_i \frac{\partial T}{\partial x_i}) \right] + Q_v, \quad (21)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re}_m} \left\{ \frac{\partial^2 B_z}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} (x_i B_z) \right] \right\}, \quad (22)$$

$$\{t > 0; (x_1, x_2) \in D\}, \quad i = \overline{1,3}; j = \overline{1,2};$$

де

$$\begin{aligned} Q_1 &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} - S B_z \frac{\partial B_z}{\partial x_i} + G_r T, \\ Q_2 &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} - S (B_z \frac{\partial B_z}{\partial x_i} + \frac{B_z^2}{x_i}) - \frac{U_2}{\text{Re}_m x_i}, \\ Q_3 &= N \frac{\partial B_z}{\partial x_i} - \frac{U_2}{\text{Re}_m x_i^2} - \frac{U_2 U_3}{x_i}, \\ Q_v &= \left(\frac{\partial B_z}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{1}{x_i^2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (x_i B_z) \right)^2 + \tilde{Q}_v; \end{aligned} \quad (23)$$

S та N - параметри, що визначають інтенсивність меридіонального та азимутального обертання рідини, \tilde{Q}_v - потужність відмінних від Джоулева джерела тепла. Рівняння (19) - (22) записані в циліндричній системі координат при умові зневаги полем струмів, що виникають за рахунок руху рідини.

Зразу ж відмітимо, що, оскільки розглядалося безіндукційне наближення, розв'язання рівняння, що описує розподілення B_z було внесено із загального ітераційного процесу. А оскільки час встановлення температурного та гідродинамічного полів набагато більший часу встановлення електромагнітного поля, рівняння для B_z розв'язувалося один раз до початку інтегрування розглянутої системи рівнянь по часу.

Процедура визначення характеристик процесу у меридіональній площині повністю збігається з викладеною у другій главі. При цьому вважається, що індукція B_z у межах елемента змінюється лінійно і похідні $B_{z,x_i} = \partial B_z / \partial x_i = \text{const}$ по аналогії з тиском можуть бути визначені у центрі мас елемента. Рівняння для азимутальної компоненти U_3 розв'язується на кожній ітерації після задовільнення рівнянню суцільності, тобто після обчислювання поправок U_1^*, U_2^* та P^* , що витікає з (14) при $\delta p \rightarrow 0$. Апрокс-

симація функцій $U_i(x, z)$. Т будується у вигляді (2), де ξ_1, ξ_2 та ζ визначаються виразами (5), Q_0 записується з урахуванням (23).

Працездатність модифікованого алгоритму була перевірена при розв'язанні задачі про електровихрову течію і теплообмін провідної рідини у циліндричному посуді, що знаходиться у позадвохньому магнітному полі. Результати тестування добре погоджуються з даними інших авторів.

Далі була розглянута прикладна задача електромагнітного перемішування провідної рідини у циліндричному посуді, заповненому розплавом металу. Його перемішування здійснюється завдяки перепусканню електричного струму через електроди різного діаметру, розташовані на торцях посуду. Крім того, метал охолоджується (на внутрішній поверхні посуду, окрім верхнього торця, задані нестационарні межові умови I роду, що відповідають температурі внутрішньої поверхні керамічних форм).

На мал.6 наведені ізолінії функції струму для різних значень критеріїв S та Gr . Видно, що при $Gr = 0$ (відсутність термогравітаційної конвекції) в ємкості розвивається одновихрова структура течії. У випадку дії сили Архімеда з часом реалізується двовихрова структура течії. При цьому інтенсивність та власне розташування двох торів з часом змінюються, що наочно ілюструє мал.7, на якому зображена динаміка розвитку процесу за часом. Зростання струму приводить до інтенсифікації як електромагнітного, так і вільноконвективного торів.

Розподілення тиску при різних S (якщо $Gr = 0$) практично збігаються. Дія виштовхуючої сили приводить до появи значної неоднорідності поля тиску по глибині ємкості. Виникають його позадвохні градієнти, що практично відсутні за винятком невеликого шару біля малого електроду при $Gr = 0$.

Розподілення ізотерм у розрахунковій області для різних величин S та Gr зображено на мал.8. Видно, що течія рідини, як електровихрова, так і вільноконвективна, приводить до значної зміни температурного поля зрівняно з випадком чистої температуро-провідності (мал. 8, а). Стають більш наочними і причини виникнення термогравітаційного віхору. Завдяки дії електровихрової течії найбільш прогріті об'єми рідини опиняються замкненими під менш прогрітими шарами розплаву, що приводить до виникнення виш-

товхувачої сили. Однак виникає при цьому термогравітаційна течія веде до незначного перерозподілу температур, що полягає у формуванні уздовж вісі ємкості прогрітих шарів, які незначно поширюються біля поверхні розплаву. Подальше зростання сили струму приводить, незважаючи на присутність термогравітаційного віхора, до зменшення товщини цих шарів, .. потім і до замикання більш теплих об'ємів у центральній частині сосуду.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ

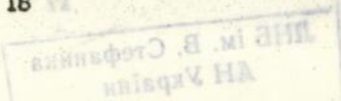
1. Запропонована чисельна методика розрахунку спряжених процесів конвективно-дифузійного переносу у полях сил різної фізичної природи, заснована на:

- оригінальних апроксимаційних залежностей, що одержані для плоского та вісесиметричного випадків та базуються на частинних розв'язках рівнянь переносу;
- алгоритмі розрахунку, заснованому на сумісному використанні методів скінчених елементів та скінчених різниць, що індіферентний до форми розрахункових областей;
- комплексі програм, що реалізує запропонований алгоритм та дозволяє проводити розрахунки гідро-, електродинамічних та температурних полів у широкому діапазоні зміни визначаючих параметрів.

2. Достовірність, точність та ефективність запропонованого підходу підтверджена при розв'язанні загальноприйнятих тестових задач та порівнянні одержаних результатів з чисельними, експериментальними і аналітичними даними інших авторів.

3. Розроблений підхід застосований з метою дослідження вільної конвекції у замкненій області, що аеродинамічно нагрівається у нестационарному гравітаційному полі. Показано, що течія у розглянутій моделі характеризується присутністю рециркуляційних зон, що формуються основним потоком, частина з яких у подальшому руйнується. Встановлено, що для кожного з досліджених теплоносіїв має місце інтенсивна вільна конвекція, що характеризується наявністю чітко вираженого пограничного шару та центрального ядра. Проведені розрахунки гідродинамічних, температурних полів та вивчена динаміка їх розвитку за часом.

4. На базі запропонованого підходу вивчена взаємодія сил Архи-



меду та Лоренца та їх сумісний вплив на гідродинаміку та теплообмін у циліндричному посуді. У результаті проведених розрахунків виявлено ряд закономірностей:

- дія виштовхувачих та електромагнітних сил приводить до утворення двовихрвової структури течії;
- зростання сили струму веде до інтенсифікації як електровихрвового так і термогравітаційної течії;
- електровихрвова течія зменшує глибину відкритої усаджуваної раковини, підвищує однорідність розплаву і в той же час збільшує об'єм закритої раковини;
- теплова конвекція знижує об'єм закритої раковини та підвищує однорідність, але збільшує глибину відкритої раковини.

5. Виконані дослідження узагальнюють знання про процеси переносу та дозволяють:

- розв'язати ряд науково-дослідних та науково-технічних проблем, пов'язаних з підвищенням якості металу;
- розвинути знання про процеси динаміки рідини та теплообміну, пов'язані з течіями у змінних гравітаційних полях;
- поширити можливості та галузі застосування обчислювальної гідродинаміки.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ ВІКЛАДЕНО У РОБОТАХ

1. Кочубей А.А., Мельник С.Е., Рядно А.А. Выборе аппроксимационных функций при решении двумерных и осесимметричных задач конвективного переноса // Математическое моделирование процессов теплопереноса.-Днепропетр.ск: ДГУ, 1988.-с.8-12.

2. Кочубей А.А., Мельник С.Е., Рядно А.А. Применение метода конечных элементов при численном моделировании процессов конвективного теплообмена в областях сложной геометрии // Теплообмен.-ММФ: Тез. докл. Минского Международного форума, 24-27 мая 1988г. Секция 9.-Минск: ИГМО АН БССР.-1988.-с.42-44.

3. Кочубей А.А., Мельник С.Е., Рядно А.А. Применение метода конечных элементов при численном моделировании процессов конвективного теплообмена в областях сложной геометрии // Теплообмен.-ММФ: Минский Международный форум, 24-27 мая 1988г. Избр. докл. Секц. 8,9.-Минск, 1989.-с.78-89.

4. Кочубей А.А., Мельник С.Е., Франко Н.В. Применение метода конечных элементов при численном моделировании процессов конвективного теплообмена в каналах сложной формы // Современные проблемы гидродинамики и тепломассообмена и пути повышения эффективности энергетических установок: Тез. докл. VII Всес. школы-семинара.- М.: МВТУ, 1989.-с.63.

5. Кочубей А.А., Мельник С.Е., Рядно А.А. Особенности применения одного варианта метода конечных элементов при решении конвективно-диффузионных задач тепломассопереноса в осесимметричных каналах // Тепломассообмен и гидродинамика тонких струй вязкой жидкости: Тез. докл. Всесоз. семинара.-Днепропетровск: ДГУ, 1989.-с.76-77.

6. Мельник С.Е. Применение метода конечных элементов для расчета процессов конвективного теплообмена в осесимметричных областях // Современные проблемы теплофизики: Тез. докл. VI Всесоз. школы молодых ученых и специалистов.-Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1990.-с.75-76.

7. Кочубей А.А., Мельник С.Е., Рядно А.А. Применение метода конечных элементов при численном моделировании процессов конвективно-диффузионного переноса в осесимметричных областях // ТВТ.-т.28, №4.-с.742-746.

8. Кочубей А.А., Мельник С.Е., Рядно А.А. Применение метода конечных элементов при численном моделировании процессов конвективного переноса в осесимметричных областях // Тепловое проектирование систем.-М., 1990.-с.202-204.

9. Мельник С.Е., Рядно А.А. Исследование процессов конвективно-диффузионного тепломассопереноса в электропроводящих средах на основе метода конечных элементов // VIII Республиканская конференция "Повышение эффективности, совершенствование процессов и аппаратов химических производств. 24-26 сентября 1991г." Тез. докл. Днепропетровск, 1991.-с.134.

10. Кочубей А.А., Мельник С.Е., Рядно А.А. Численное моделирование осесимметричных электровихревых течений на основе метода конечных элементов // Современные проблемы газодинамики и тепломассообмена и пути повышения эффективности энергетических установок: Тез. докл. VIII Всес. школы-семинара. В 2-х ч. Часть 1.-М.; МГТУ, 1991.-с.95-96

11. Кочубей А.А., Мельник С.Е., Рядно А.А., Франко Н.В. Чис-

ленное моделирование осесимметричных электровихревых течений на основе метода конечных элементов // Вестник МГТУ им. Баумана.- 1991.-№4.-с.34-39.

12. Кочубей А.А., Мельник С.Е., Рядно А.А. Численное моделирование МГД-течений на основе метода конечных элементов // Численные методы и математическое моделирование теплопереноса.- Днепропетровск: ДГУ, 1991.-с.11-15.

13. Мельник С.Е., Рядно А.А. Численное моделирование процессов конвективного теплопереноса в электромагнитном поле на основе метода конечных элементов // Численные методы механики сплошной среды. Тезисы докладов III Всесоюзной Школы молодых ученых. п. Дурсо. 27мая-1 июня 1991.-с.78-79.

14. Кочубей А.А., Мельник С.Е., Рядно А.А. Численное моделирование процессов теплообмена в электропроводящих средах // IV Всесоюзная школа-семинар молодых ученых и специалистов "Актуальные вопросы теплофизики и физической гидрогазодинамики". Тезисы докладов. Алушта. Ноябрь 1991.-с.89.

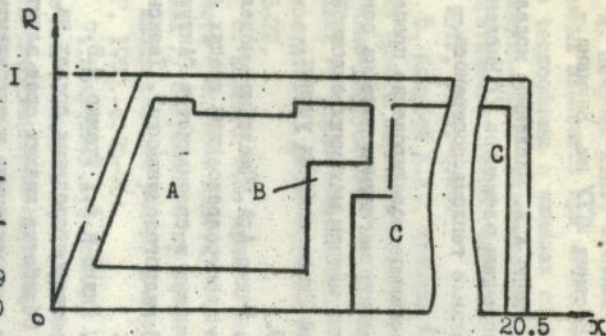
15. Кочубей А.А., Мельник С.Е., Рядно А.А., Франко Н.В. Моделирование процессов переноса в электропроводящих средах на основе метода конечных элементов // Обработка жидких сред электромагнитными полями. Теплообмен и гидродинамика в турбулентных течениях. Тезисы докладов на межгосударственных конференциях. Алушта, 1992.-с.15.

16. Кочубей А.А., Мельник С.Е., Ракита Е.М., Рядно А.А., Татарко Л.Г. Численное моделирование двумерных и трехмерных задач конвективно-диффузионного переноса в областях сложной геометрии и каналах сложного сечения // Теплообмен - ММБ-92. Вычислительный эксперимент в задачах теплообмена и теплопередачи. Т.9, ч.1.-Минск: АНХ "ИТМО им. А.В. Лыкова" АНБ, 1992.-с.111-119.

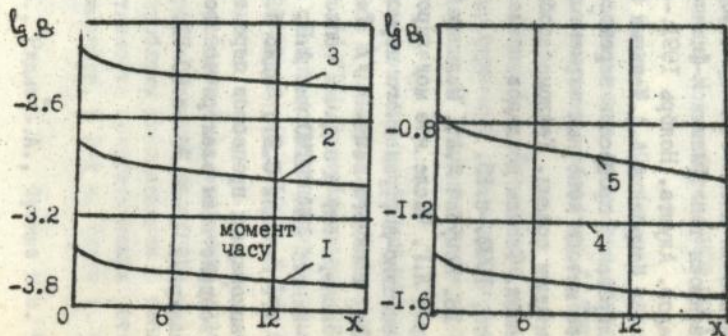
17. Мельник С.Е., Рядно А.А., Шапиро Э.И., Энтин И.А. Анализ нестационарных процессов перемешивания жидкого металла в изложнице под воздействием электрического тока // Известия вузов. Черная металлургия.-1992.№6.-с.80-82.

Таблиця I
Безрозмірні властивості рідин і
матеріалу стінок оболонки

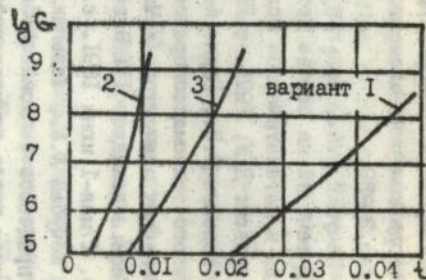
В-НТ	τ^0/τ_c	σ^0/σ_c	ρ^0/ρ_c	ν^0/ν_c	λ^0/λ_c	γ^0/γ_c
1	0.24	0.12	0.0013	8.00	0.044	25.3
2	1.00	0.5	0.0009	6.88	0.37	231.9
3	1.04	0.52	0.0008	5.5	0.207	124.0



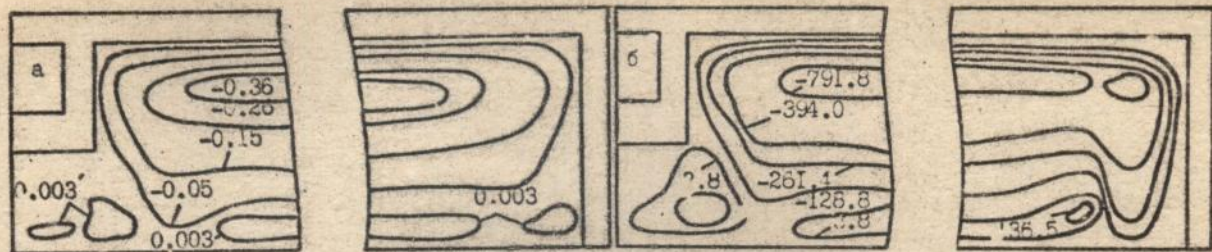
Мал. I. Розрахункова область



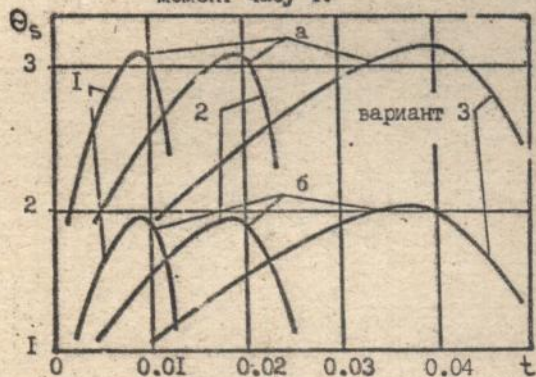
Мал. 2. Зміна критерію B_i по довжині моделі



Мал. 3. Зміна критерію G_r
за часом

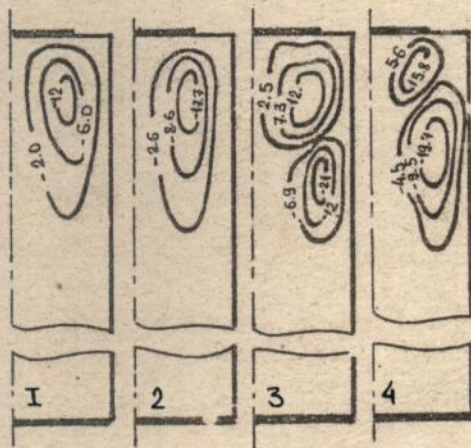


Мал.5. Ізолінії функції струму для першого (а) і другого (б) варіантів у момент часу 4.

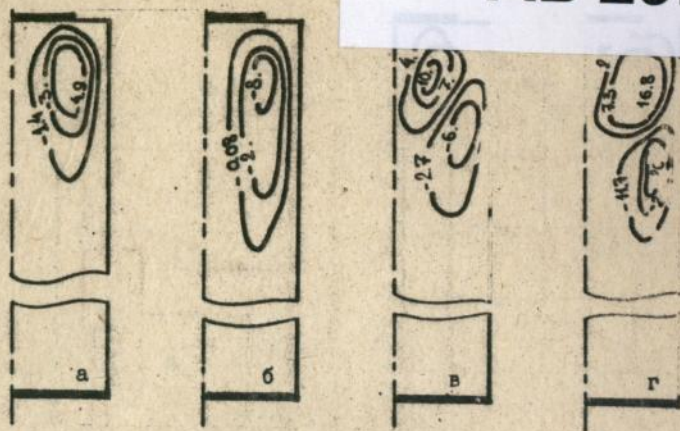


23

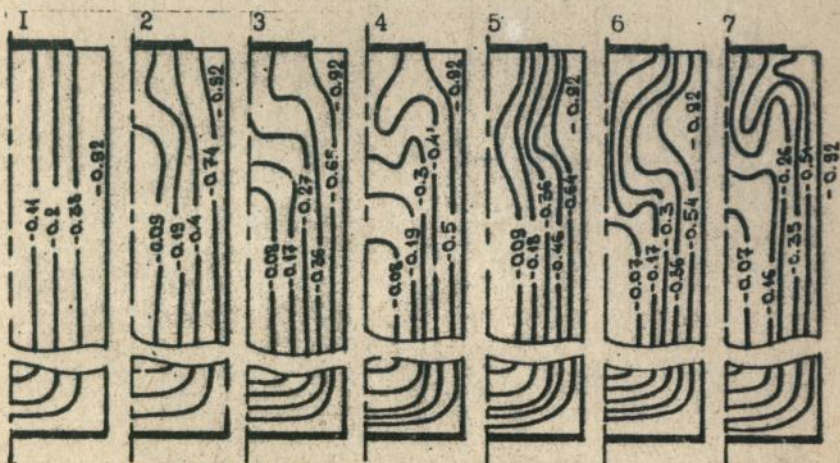
Мал.4. Зміна температури Θ_s для конічної (а) та циліндричної (б) частин моделі.



Мал.6. Ізолінії функції струму у момент часу $t = 0.024$: 1-5- $16 \cdot 10^4$, $G_r=0$; 2- $32 \cdot 10^4$, 0 ; 3- $16 \cdot 10^4$, 10^6 ; 4- $32 \cdot 10^4$, 10^6 .



Мал.7. Ізолінії функції струму у моменти часу $t = 0.006$ (а), $t = 0.012$ (б), $t = 0.18$ (в), $t = 0.024$ (г) при $Gr = 10^6$, $S = 16 \cdot 10^4$.



Мал.8. Ізолінії температури у момент часу $t = 0.024$ при S та Gr : 1-0 і 0, 2- $4 \cdot 10^4$ і 0, 3- $16 \cdot 10^4$ і 0, 4- $32 \cdot 10^4$ і 0, 5- $4 \cdot 10^5$ і 10^6 , 6- $16 \cdot 10^5$ і 10^6 , 7- $32 \cdot 10^5$ і 10^6 .