А К А Д Е М І Я Н А У К У К Р А Ї Н И

ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ ТА МЕХАНІКИ

На правах рукопису

БОРСУК МИХАЙЛО ВОЛОДИМИРОВИЧ

ПЕРША КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ В ОБЛАСТЯХ З КОНІЧНИМИ ТА КУТОВИМИ ТОЧКАМИ НА МЕЖІ.

01.01.02 - диференціальні рівняння

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

дисертації на здобуття наукового ступеня

доктора фізико-математичних наук

Д о н е ц ь к - 1994

Робота виконана в Львівському державному університеті ім. Ів. Франка.

Офіційні опоненти: член-кор. АН України, професор
Є.Я. ХРУСЛОВ;

доктор фізико-математичних наук, професор
С.Д. ЕЙДЕЛЬМАН;

доктор фізико-математичних наук, ведучий
науковий співробітник
А.Є. ШИШКОВ.

Провідна установа: Інститут математики АН України, м. Київ.

Захист відбудеться "30" 03 1994 р. о 15 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 06.01.01 при Інституті прикладної математики та механіки АН України за адресою: 340114 м. Донецьк, вул. Рози Люксембург, 74, кімн.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці ІПММ АН України за цією ж адресою.

Автореферат разосланий "25" 01 1994 р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник Марковський А.І.

МЕТА РОБОТИ:

1) побудова теорії розв'язності першої крайової задачі для еліптичних квазілінійних *недивергентних* рівнянь другого порядку в області, межа якої містить кутові або конічні точки, при мінімальних умовах гладкості та природних умовах нелінійності коефіцієнтів рівняння;
2) дослідження поведінки в околі кутової або конічної точки розв'язків еліптичних рівнянь, коефіцієнти яких мають мінімальну гладкість;
3) отримання непокращувальних оцінок розв'язків задачі Діріхле для еліптичних (лінійних та квазілінійних) рівнянь в околі кутової або конічної точки;
4) дослідження підвищення гладкості розв'язків.

АКТУАЛЬНІСТЬ ТЕМИ.

Наявність на сучасний час достатньо повної теорії для *лінійних* рівнянь з частинними похідними еліптичного типу надала можливість просунутися у вивченні нелінійних рівнянь. Значні успіхи в цьому напрямку досягнуті,- особливо для квазілінійних рівнянь другого порядку,- завдяки працям Шаудера, Лере, Каччопполі та інших. Ними розроблений метод, що дозволяє доводити теореми існування при наявності придатних апріорних оцінок. Цей метод не вимагає попередньої побудови фундаментального розв'язку та дозволяє замість теорії інтегральних рівнянь застосувати деякі теореми функціонального аналізу.

З одного боку, виявилося можливим вельми нескладно доводити розв'язність крайових задач для квазілінійних еліптичних рівнянь другого порядку при наявності оцінки коефіцієнтів Гельдера перших похідних розв'язку відповідної *лінійної* крайової задачі з константою, яка залежить лише від максимуму модулів коефіцієнтів задачі. Таким чином, виникла необхідність більш глибшого вивчення лінійних задач та встановлення для них більш тонких оцінок. На це були напрямлені зусилля багатьох математиків Л. Ніренберг отримав вище вказану оцінку для двовимірного несамоспряженого рівняння, завдяки якої встановлена теорема існування розв'язків задачі Діріхле для квазілінійного еліптичного рівняння другого порядку при мінімальних припущеннях на гладкість коефіцієнтів рівняння. У багатовимірному випадку така оцінка була отримана Х. Кордесом в припущенні, що рівняння задовольняє умові більш сильної (в залежності від вимірності евклідового простору $n>2$), ніж умова рівномірної еліптичності. З іншого боку, намагання одержати вказану апріорну оцінку для загальних еліптичних рівнянь другого порядку в багатовимірному випадку закінчилось невдало через те, що виявилось (М.В. Сафонов, 1987), що така оцінка просто неможлива.

Таким чином, для доведення класичної розв'язності крайових задач для квазілінійних рівнянь другого порядку необхідно було створити методи, які б дозволяли одержувати потрібні апріорні оцінки безпосередньо для самої нелінійної задачі. Такі методи були створені. Ідеї нового методу були закладені ще в працях С.Н. Бернштейна, потім Де Джорджі і Неша. О.О. Ладиженська та Н.М. Уральцева удосконалили та розвинули цей метод.

Всі вказані дослідження відносяться до крайових задач в *достатньо гладких* областях. Зауважимо, що для остаточної завершеності цих досліджень знадобилось більше 30 років та зусилля багатьох математиків.

Проте, багаточисельні задачі фізики та техніки призводять до необхідності вивчення крайових задач в областях з негладкою межею. До таких областей відносяться зокрема області, на межі яких є скінченне число кутових ($n=2$) або конічних точок. Сучасний стан теорії крайових задач в негладких областях викладений у відомому огляді В.О. Кондратьева та О.А. Олійник. До числа перших праць, що відносяться до дослідження поведінки в околі кутової точки межі області розв'язку задачі Діріхле для рівняння Лапласа або Пуассона, належать відомі роботи С.М. Нікольського (1956). Зокрема ним встановлені необхідні та достатні умови належності простору H_p^r (простір Нікольського) розв'язку задачі Діріхле для рівняння Лапласа. В.В. Фуфаєв (1963) розглянув рівняння Пуассона в області, коли $\partial G\setminus O$ – нескінченно гладка крива (тут O -кутова точка), а в деякому околі точки O межа ∂G складається з двох відрізків, що перетинаються під кутом ω_0. Гладкість розв'язку задачі Діріхле залежить від величини кута ω_0. Чим менший кут ω_0, тим більшу гладкість має розв'язок (при $f\in C^\infty(G)$). Існують виняткові значення ω_0, для яких нема перешкод для гладкості. Зокрема, якщо $u\big|_{\partial G} = 0$, $f=0$ в деякому околі точки O і якщо π/ω_0 – ціле число, то $u\in C^\infty(\bar{G})$. Таким чином, порушення умови гладкості межі області призводить до появи у розв'зку крайової задачі особливостей в околі нерегулярної точки межі області. Нагадаємо, що в теорії крайових задач для еліптичних рівнянь у гладкій області ситуація наступна: якщо дані задачі - достатньо гладкі, то й розв'язок – достатньо гладка функція.

Однією з перших праць, що відносяться до дослідження загальних лінійних крайових задач для областей з конічними точками, була фундаментальна праця В.О. Кондратьєва (ТММТ, 1967). В ній та узагальнюючих її наступних роботах досліджена нормальна розв'язність у вагових соболевських просторах загальних лінійних еліптичних задач в негладких областях в припущеннях *достатньої гладкості* як многовида $\partial G\setminus O$, так і коефіцієнтів задачі. Розв'язок розглядається в спеціальних просторах функцій, які мають похідні, сумовані з деякою степеневою вагою. Ці простори добре відчувають основну особливість розв'язків таких задач. Тут же з'ясувалось, що методи, які використовувались при дослідженні крайових задач у гладких областях, непридатні: в розглядуваному випадку неможливо гладким перетворенням розпрямити межу.

Якщо ж ставити своєю метою дослідження нелінійної еліптичної задачі, то з вище сказаного з необхідністю випливає, що треба з'ясувати, при яких мінімальних вимогах на гладкість коефіцієнтів та правих частин лінійної задачі мають місце розв'язність у відповідних функціональних просторах та необхідні апріорні оцінки розв'язків. Зауважимо також, що перша крайова задача для *квазілінійних недивергентних* еліптичних рівнянь в *негладких* областях майже не вивчалась.

НАУКОВА НОВИЗНА.

В дисертації отримані наступні нові результати.

1. Встановлені непокращувальні оцінки модулів розв'язків задачі Діріхле для еліптичних недивергентних лінійних та квазілінійних рівнянь другого порядку та їх перших похідних в околі кутової або конічної точки.
2. Знайдена точна (мінімальна) умова на гладкість коефіцієнтів рівняння, яка забезпечує наявність оцінок п.1.
3. Досліджена розв'язність задачі Діріхле для еліптичних недивергентних лінійних та квазілінійних рівнянь другого порядку в області з кутовою або конічною точкою в функціональних просторах, в яких вона має місце при мінімальнихх (та суттєвих) вимогах на дані задачі (при цьому і для лінійної задачі отримані нові теореми).
4. Досліджені диференціальні властивості та поведінка розв'язків задачі в околі конічної точки (теореми про підвищення гладкості).
5. Досліджено поведінку узагальнених розв'язків задачі Діріхле для дивергентних рівнянь в околі конічної точки.
6. Наведені приклади, що свідчать про істотність припущень і вірність отриманих результатів.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ.

В основу дослідження розв'язності першої крайової задачі для квазілінійного рівняння покладено метод Лере - Шаудера. Отримання непокращувальних оцінок розв'язків задачі базується на об'єднанні двох точних нерівностей Харді та Віртінгера, а також на рішенні задачі Коші для диференціальної нерівності із запізнюючим аргументом. Використовуються також шаудерівські L_p - оцінки, метод кілець Кондратьева, бар'єрна техніка та принцип порівняння.

ТЕОРЕТИЧНА ТА ПРАКТИЧНА ЦІННІСТЬ.

Дисертація має теоретичний характер. До крайових задач в областях з негладкою межею зводяться багаточисельні задачі фізики і техніки, зокрема: гідро- та аеродинаміки, гідромеханіки, пружності, тощо. Методи та результати дисертації можуть бути використані для дослідження мішаної крайової задачі в області з конічними точками, а також крайових задач в областях, межі яких мають особливості типу ребер.

АПРОБАЦІЯ РОБОТИ.

Основні результати дисертації доповідались на наукових семінарах:

- з нелінійного аналізу ІПММ АН України (керівник академік І.В. Скрипник, 1988, 1992, 1993 рр.);
- відділу диференціальних рівнянь з частинними похідними інституту математики АН України (кер. проф. М.Л. Горбачук, 1992 р.);
- відділу диференціальних рівнянь з частинними похідними ІПММ АН України та кафедри диференціальних рівнянь Львівського університету (кер. проф. В.Я. Скоробогатько, проф. Б.Й. Пташник, доц. С.П. Лавренюк, 1990-93 рр.);
- з теорем вкладення та їх застосувань в математичній фізиці Математичного інституту ім. В.О. Стеклова РАН (кер. акад. РАН С.М. Нікольський, чл.-кор. РАН Л.Д. Кудрявцев, 1990);
- лабораторії диференціальних рівнянь з частинними похідними Математичного інституту ім. В.О. Стеклова РАН (кер. проф. В.П. Михайлов, 1990 р.);
- кафедри диференціальних рівнянь та функціонального аналізу УДН ім. П.Лумумби (кер. проф. В.М. Масленнікова, 1990 р.);
- з якісної теорії рівнянь з частинними похідними кафедри диференціальних рівнянь Московського університету (кер. проф. В.О. Кондратьєв, проф. Є.М. Ландіс, 1989 р.),

а також на міжнародних конференціях:

- "Диференціальні рівняння та суміжні питання" - сумісні засідання семінару ім. І.Г. Петровського та Московського математичного товариства (1988; 1991, 1993 рр.);
- IX та X радянсько-чехословацька нарада (1987, 1989 рр.);
- з нелінійних задач математичної фізики (Ленінградське відділення Математичного інституту ім. В.О. Стеклова, 1989 р.);

- "Нелінійні задачі математичної фізики" (ІПММ АН України, 1989, 1991, 1993 рр.);
- 100-річчя народження С. Банаха (Львівський університет, 1992 р.).

ПУБЛІКАЦІЇ.

Основні результати дисертації опубліковані в 10 роботах автора, що перелічені в кінці автореферату.

СТРУКТУРА ТА ОБ'ЄМ ДИСЕРТАЦІЇ.

Дисертація складається з вступу, шести глав, додатку та бібліографії, яка містить 86 назв. Загальний об'ем дисертації - 248 сторінок машинописного тексту.

З М І С Т   Р О Б О Т И.

У вступній главі поданий короткий огляд сучасного стану проблеми та праць, які стосуються до розглядуваних питань; визначається місце серед інших праць результатів, що отримані в дисертції; наведені формулювання основних результатів дисертації. В п.0.2 цієї глави наведені основні позначення та означення. Наведемо деякі з них:

$O = (0,\dots,0)$ - початок прямокутної системи координат, в якій міститься конічна точка;

(r,ω) - сферичні координати точки $x \in \mathbb{R}^n$;

Ω - область, яка вирізається конусом K на одиничній сфері S^{n-1} з центром в O, з гладкою $(n-2)$-вимірною межею $\partial\Omega$;

Означення. Точка $O \in \partial G$ зветься *конічною точкою* області G, якщо $\partial G \setminus O$ - гладкий $(n-1)$-вимірний підмноговид в $\mathbb{R}^n$ та існує окіл U точки O в $\mathbb{R}^n$, дифеоморфний кулі $B_1(O)$, причому образ множини $U \cap \overline{G}$ є $B_1(O) \cap K$;

$G_a^b = G \cap \{ (r,\omega) \mid 0 \le a < r < b \,;\ \omega \in \Omega \}$ - шар в $\mathbb{R}^n$;

$\Gamma_a^b = \partial G \cap \{ (r,\omega) \mid 0 \le a < r < b \,;\ \omega \in \partial\Omega \}$ - бічна поверхня шару G_a^b;

$G_d = G \setminus G_0^d$, $\Gamma_d = \partial G \setminus \Gamma_0^d$, $d > 0$;

$\Omega_\rho = G_0^d \cap \{ |x| = \rho \}$; $0 < \rho < d$;

$G^{(k)} = G_{2^{-(k+1)}d}^{2^{-k}d}$, $k = 0,1,2,\dots$; $\bigcup_{k=0}^{\infty} G^{(k)} = G_0^d$;

$\nu(t)$ – додатня незростаюча неперервна функція, яка визначена при $t \geq 0$;

$\mu(t)$ – додатня неспадна неперервна функція, яка визначена при $t \geq 0$;

$d(x) = dist\ (x,\ \partial G \backslash \mathcal{O})$;

$\mathcal{A}(t)$– визначена при $t \geq 0$, невід'ємна монотонно зростаюча неперервна в нулі функція, $\mathcal{A}(0)=0$;

$\Phi(x)$ – будь-яке продовження всередину області G граничної функції $\varphi(x)$ таке, що $\Phi(x)=\varphi(x)$, $x \in \partial G$;

$\lambda = \lambda(\Omega)$ – найменше додатне власне число задачі

$$\begin{cases} \Delta_\omega \psi + \lambda(\lambda+n-2)\psi = 0, \omega \in \Omega \subset S^{n-1}, \\ \psi(\omega) = 0\ ,\ \omega \in \partial\Omega \end{cases} \qquad (ЗС)$$

Δ_ω – оператор Лапласа-Бельтрамі на одиничній сфері S^{n-1} ;

$V^k_{p,\alpha}(G)$ – соболевський простір з вагою функцій $u(x)$, для яких скінчена норма

$$|u|_{V^k_{p,\alpha}(G)} = \left(\iint\limits_G \sum_{|\beta|=0}^{k} r^{p(|\beta|-k+\alpha/2)} |D^\beta u|^p dx \right)^{1/p},\ p \geq 1 \ ;$$

$\overset{\circ}{W}{}^k_\alpha = \overset{\circ}{V}{}^k_{2,\alpha}(G)$, $(k \geq 0)$;

Перша глава присвячена отриманню непокращувальних оцінок розв'язків лінійної задачі Діріхле

$$\begin{cases} Lu = a^{ij}(x) u_{x_i x_j} + a^i(x) u_{x_i} + a(x) u = f(x)\ ,\ x \in G \\ u(x) = \varphi(x)\ ,\ x \in \partial G \end{cases} \qquad (Л)$$

в околі конічної точки. Вона складається з п'яти параграфів.

В якості розв'язків задачі *(Л)* ми розглядаємо функції $u \in C^0(G) \cap W^2(G \backslash \mathcal{O})$, що задовольняють рівняння для майже всіх $x \in G$ та граничну умову для всіх $x \in \partial G$. Питання гладкості розв'язків задачі (Л) в околі кутової точки раніше досліджувалися в працях А. Аззама; в них припускається, що коефіцієнти рівняння неперервні за Гельдером. Наші припущення про гладкість коефіцієнтів – мінімально можливі: старші коефіцієнти рівняння повинні бути неперервними за

Діні в конічній точці O, а молодші можуть навіть зростати (при цьому ми вказуємо точний степеневий порядок зростання). Головний результат цієї глави міститься в наступній теоремі:

Теорема 1. *Нехай $u(x)$ – розв'язок задачі (Л) та виконані припущення:*

(а) *умова рівномірної еліптичності*

$$\nu\xi^2 \le a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \mu\xi^2 \quad \forall x \in \bar{G},\ \forall\xi \in R^n; \nu,\mu = const>0 ;$$

(аа) $a^{ij}(0) = \delta_i^j$ – *символ Кронекера* $(i,j = 1..n)$;

(ааа) $a^{ij}(x) \in C^0(\bar{G})$, $(i,j = 1..n)$; $a^i(x)$, $i = 1..n$,$a(x)$ – *вимірні в G функції, причому $a^i(x)\in L_n(G)$; $a(x)\in L_p(G)$, $p > n/2$; для них виконується нерівність*

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} |a^{ij}(x)-a^{ij}(0)|^2 \right)^{1/2} + |x|\left(\sum_{i=1}^{n} |a^i(x)|^2 \right)^{1/2} +$$

$$+ |x|^2|a(x)| \le \mathcal{A}(|x|), \qquad x \in G_0^d$$

при деякому $d>0$ з $\mathcal{A}(r)$, що визначена при $r\ge0$, невід'ємна, монотонно зростаюча, неперервна в нулі функція, $\mathcal{A}(0)=0$;

(б) $f(x) \in L_p(G) \cap \overset{\circ}{W}{}^0_{4-n}(G)$;

$$\varphi(x) \in V^{2-1/p}_{p,0}(\partial G) \cap \overset{\circ}{W}{}^{3/2}_{4-n}(\partial G) \cap C^1(\partial G) \ ;\ p > n/2 \ ;$$

(в) *існують невід'ємні числа k_1,k_2 і $s>\lambda$ такі, що*

$$\|f\|_{\overset{\circ}{W}{}^0_{4-n}(G_0^\rho)} + \|\varphi\|_{\overset{\circ}{W}{}^{3/2}_{4-n}(\Gamma_0^\rho)} \le k_1\rho^s, \quad \rho \in (0,d) \ ;$$

$$\|f\|_{p,G^\rho_{\rho/2}} + \|\varphi\|_{V^{2-1/p}_{p,0}(\Gamma^\rho_{\rho/2})} \le k_2\rho^{\lambda-2+n/p}, \ \rho \in (0,d).$$

Нехай $\mathcal{A}(r)$ неперервна за Діні в нулі та відома величина $M_0 = \max_{\bar{G}} |u(x)|$.

Тоді існує таке $d_0>0$, що вірні наступні твердження:

1. $|u(x)| \le c_0|x|^\lambda$, $x\in G_0^\rho$; $\rho\in(0,d_0)$;

2. *якщо* $p>n$, $\lambda>1$, *то* $|\nabla u(x)|\le c_1|x|^{\lambda-1}$, $x\in G_0^\rho$; $\rho\in(0,d_0)$;

3. *якщо або* $\lambda\ge2$ *і* $p>n/2$, *або* $0<\lambda<2$, $n/2<p<n/(2-\lambda)$, *то*

$u\in V^2_{p,0}(G)$ *і при цьому* $|u|_{V^2_{p,0}(G_0^\rho)}\le c_2\rho^{\lambda-2+n/p}$; $\rho\in(0,d_0)$;

4. *якщо* $p\ge n/(2-\lambda)$, *то для* $\forall x,y\in G_0^\rho$, $\rho\in(0,d_0)$

$$|u(x)-u(y)|\le c_0|x-y|^\lambda,\ 0<\lambda<1;$$

$$|\nabla u(x)-\nabla u(y)|\le c_1|x-y|^{\lambda-1},\ 1<\lambda<2;$$

5. *якщо* $0<\lambda<2$, $\lambda\ne1$, $p\ge n/(2-\lambda)$, *то* $u\in C^\lambda(\overline{G_0^d})$; *якщо* $\lambda=1$, $p=n$, *то* $u\in C^{1-\varepsilon}(\overline{G_0^d})$ $\forall\varepsilon>0$.

В п. 1.3. ми будуємо приклади, які виявляють, що умова Діні на функцію $\mathcal{A}(r)$ в точці $\mathcal{O}$, а також припущення (ааа) про молодші коефіцієнти рівняння є істотні для вірності оцінок тверджень 1-4. В противному разі в цих оцінках показник λ треба замінити на $\lambda-\varepsilon$ з $\forall\varepsilon>0$. Те, що показник λ в цих оцінках не може бути й збільшений, виявляють часткові розв'язки рівняння Лапласа в області з кутовою або конічною точкою. В цьому сенсі оцінки в теоремі 1 є непокращувальні. В п.1.4 досліджується поведінка розв'язку задачі (Л) у випадку, що не охоплюється теоремою 1, і знову при мінімальних припущеннях на гладкість коефіцієнтів. Нарешті в п. 1.5. розглянуті природні теореми про підвищення гладкості розв'язків задачі (Л). Всі результати глави 1 є нові в сенсі мінімальності вимог на дані задачі, і як вже сказано вище, в цьому сенсі й непокращувальними.

Оцінки глави 1 дозволяють сформулювати нові теореми існування розв'язків задачі (Л). Ці теореми сформульовані і доведені в *другій* главі. Наведемо тут формулювання цих теорем.

Теорема 2. *Нехай* $\Gamma_{d_0}\in C^{1,1}$, *виконані припущення* (а) -

(в), $a(x) \le 0$ $\forall x \in G$ і при цьому або $\lambda \ge 2$, $p \ge n$, або $n \le p < n/(2-\lambda)$, $1 < \lambda < 2$.

Тоді задача (Л) має єдиний розв'язок $u(x) \in V^2_{p,0}(G)$ і для нього вірна оцінка

$$\|u\|_{V^2_{p,0}(G)} \le c_2(\|f\|_{p,G} + \|\varphi\|_{V^{2-1/p}_{p,0}(\partial G)}) \qquad (1)$$

із сталою c_2, що не залежить від u, f, φ та визначається лише величинами ν, μ, p, n, $\max_{x \in \bar{G}} A(|x|)$, $\|a\|_{p,G}$, $\left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |a^i(x)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{n,G}$ та області G.

Теорема 3. *Нехай задані числа $\lambda \in (1,2)$, $q > n/(2-\lambda)$. Нехай $\Gamma_{d_0} \in C^{1,1}$ та виконані припущення теореми 2 при $p=q$. Нехай виконані ще умови*

(г) $a^{ij}(x)$ $(i,j = 1..n)$ неперервні за Діні в будь-якій точці $y \in \partial G$, тобто $\left\{ \sum_{i,j=1}^{n} |a^{ij}(x) - a^{ij}(y)|^2 \right\}^{1/2} \le A(|x-y|)$ $\forall x \in G$, $y \in \partial G$, причому $\int_0^{d_0} t^{-1} A(t)\,dt < \infty$;

(д) існує невід'ємне число k_3 таке, що виконується нерівність:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a^i(x)|^2 \right)^{1/2} + |a(x)| + |f(x)| + |\Phi_{xx}(x)| \le k_3 d^{\lambda-2}(x),$$

$x \in G_\varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$, де $d(x) = \mathrm{dist}(x, \partial G \setminus O)$.

Тоді задача (Л) має єдиний розв'язок

$$u(x) \in W^{2,q}_{loc}(G) \cap V^2_{p,0}(G) \cap C^\lambda(\bar{G}) \quad з \quad \forall p \in [n, n/(2-\lambda))$$

та для нього вірні оцінка (1), а також:

$$|u|_{\lambda,G} \le K \qquad (2)$$

із сталою K, що не залежить від $u(x)$ та визначається лише величинами n, q, ν, μ, λ, $\mathcal{s}$, k_1, k_2, k_3, $\|f\|_{q,G}$,

$\|\varphi\|_{V^{2-1/q}_{q,0}(\partial G)}$, $\int\limits_0^{d_0} t^{-1}A(t)dt$, $\max\limits_{x\in \bar G} A(|x|)$ і областю G.

Теорема 4. *Нехай виконані всі умови теореми 2, окрім вимоги на гладкість поверхні Γ_{d_0}, яка заміняється припущенням $\Gamma_{d_0} \in C^{\lambda}$. Тоді задача (Л) має єдиний розв'язок $u(x) \in W^{2,q}_{loc}(G) \cap C^{\lambda}(\bar G)$ та для нього вірна оцінка (2).*

Теорема 2 раніше була відома в двох випадках: або, коли рівняння задачі (Л) є рівняння Пуасона (Вержбінський-Мазья, 1974), або, коли G - конус, але молодші коефіцієнти рівняння - більш гладкі (Козлов-Мазья, 1988). Теореми 3 та 4 - нові, бо без результатів глави 1 вони не можуть бути доведені. Зауважимо також, що в цих теоремах ми зменшуємо й вимоги на гладкість $\partial G \setminus O$. В теоремі 3 вони такі, щоб локально гладкий кусок поверхні можна було "розпрямити", а в теоремі 4 поверхня $\partial G \setminus O$ може бути *лягуновською*, тому що в таких областях вірні результати Відмана (1967), які ми використовуємо в околі гладкого куска $\partial G \setminus O$. Отримані в главі 2 теореми існування відіграють фундаментальну роль в подальшому (глава 5) при дослідженні розв'язності задачі (КЛ).

Як вже зазначалось вище, для побудови теорії розв'язності задачі Діріхле для квазілінійних рівнянь потрібні відповідні апріорні оцінки розв'язків самої нелінійної задачі. Отриманню таких оцінок присвячені *третя* та *четверта* глави. Центральним моментом в цих оцінках є локальна (поблизу кутової або конічної точки) оцінка Гельдера перших похідних розв'язків. Хоча результати глави 3 повністю вкладаються у результати глави 4 (що цілком природньо), проте специфіка плоского випадку дозволила нам його відокремити. До того ж й методи одержання оцінки $|u|_{1+\tau, G_0^d}$ різні у випадку $n=2$ та $n>2$. Нам було цікаво продемонструвати можливість застосування методу Л.Ніренберга для областей з кутовою точкою (п. 3.1). Отже, вдалося встановити основну оцінку

$$|u(x)| \le c_0|x|^{1+\gamma} \qquad (3)$$

з деяким $\gamma>0$. У випадку конічної точки ($n>2$) цей метод впровадити неможливо, тому що він є сугубо двовимірний. Для отримання оцінки (3) в цьому випадку ми звертаємось до бар'єрної техніки (п. 4.1) та застосовуємо принцип порівняння (п. 4.2). Сформулюємо основний результат глав 3 и 4. Він відноситься до задачі

$$\begin{cases} a_{ij}(x,u,u_x)u_{x_ix_j} + a(x,u,u_x) = 0, & x \in G \\ u(x) = \varphi(x), & x \in \partial G \end{cases} \qquad \text{(КЛ)}$$

(квазілінійне рівняння загального вигляду).

Теорема 5. *Нехай $u(x) \in C^0(\bar{G}) \cap W^{2,q}_{loc}(\bar{G}\setminus O)$, $q>n$ – розв'язок задачі (КЛ), відома величина $M_0 = \max_{x\in\bar{G}}|u(x)|$. Нехай виконані припущення*

(C) *для $\forall\varepsilon_0>0$ існує $d_0>0$ така, що*

$$G_0^{d_0} = \{x \in G \mid \cos\vartheta = x_n/r\ ;\ |\vartheta| < \pi/2-\varepsilon_0\ \}$$

$$(\text{ тобто } G_0^{d_0} \subset \{\ x_n>0\ \} \text{ і отже } \lambda>1\ ),$$

та на множині $\mathfrak{M} = \{\ (x,\ u,\ z) |\ x\in\bar{G},\ u\in\mathbb{R},\ z\in\mathbb{R}^n\ \}$

(A) $a(x,u,z)$, $a_{ij}(x,u,z) \in CAR$, ($i,j = 1..n$) – *каратеодорові функції;*

(AA) $a_{ij}(0,0,0)=\delta_i^j$ ($i,j = 1..n$) – *символ Кронекера;*

(Б) *умова рівномірної еліптичності: існують додатні сталі ν, μ, що не залежать від u, z, такі, що для $\forall\xi\in\mathbb{R}^n$, $\forall x\in G$, $u\in\mathbb{R}$, $z\in\mathbb{R}^n$*

$$\nu\xi^2 \le a_{ij}(x,u,z)\xi_i\xi_j \le \mu\xi^2\ ;$$

(B) *існують число $\beta > \lambda-2 > -1$, невід'ємні числа μ_1, k_1 та функції $b(x)$, $f(x) \in L_{q,loc}(\bar{G}\setminus O)$, $q\ge n$, що не залежать від u, z, такі, що:*

$$|a(x,u,z)| \le \mu_1|z|^2 + b(x)|z| + f(x)\ ,$$

причому $b(x) + f(x) \le k_1|x|^{\beta}$, $x \in G_0^{d_0}$;

(Г) функції $a_{ij}(x,u,z)$, $(i,j=1..n)$ в околі множини $\mathfrak{M}^{(u)}_{\bar d}=\{(x,u,z)\,|\,x\in G_0^{\bar d}, u=u(x), z=u_x(x)\}$, где $\bar d\in(0,d_0)$, мають узагальнені похідні першого порядку за всіма своїми аргументами та існують невід'ємні сталі μ_0, μ_2, k_2, і функція $g(x)\in L_{q,loc}(\bar G\setminus O)$, $q>n$, що не залежить від $u(x)$ такі, що

$$\sum_{i,j,k=1}^{n}\left|\frac{\partial a_{ij}(x,u,z)}{\partial z_k}-\frac{\partial a_{ik}(x,u,z)}{\partial z_j}\right|\le \mu_0(1+|z|^2)^{-1/2};$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{ij}(x,u,z)}{\partial u}z_k^2-\frac{\partial a_{kj}(x,u,z)}{\partial u}z_k z_i+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial a_{ij}(x,u,z)}{\partial x_k}z_k-\frac{\partial a_{kj}(x,u,z)}{\partial x_k}z_i\right)\right|\le(1+|z|^2)^{1/2}(\mu_2|z|+g(x))$$

$$|g(x)|_{q,G^{\rho}_{\rho/2}}\le k_2\rho^{n/q-2+\lambda},\quad 0<\rho<\bar d;$$

(Д) існують невід'ємні числа μ_3 та функція $h(x)\in L_{q,loc}(\bar G\setminus O)$, $q>n$, що не залежить від $u(x)$, такі що

$$\left\{\sum_{i,j=1}^{n}\left[\left|\frac{\partial a_{ij}(x,u,z)}{\partial u}\right|^2+\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial a_{ij}(x,u,z)}{\partial x_k}\right|^2\right]\right\}^{1/2}\le h(x);$$

$$\left\{\sum_{i,j,k=1}^{n}\left|\frac{\partial a_{ij}(x,u,z)}{\partial z_k}\right|^2\right\}^{1/2}\le\mu_3.$$

Тоді існують додатні числа $d\le d^*=\min(d_0,\bar d)$ і $\bar c_0$, $\bar c_1$, $\bar c_2$, $\bar c_3$, що не залежать від $u(x)$ і визначаються лише величинами n, λ, ν, μ, μ_0, μ_1, μ_2, μ_3, β, k_1, k_2, q, M_0, d_0, $\bar d$, $|b, f, g, h|_{q,G_0^{d^*}}$) і областю G, такі, що вірні наступні твердження:

1. $|u(x)|\le\bar c_0|x|^{\lambda}$; $|\nabla u(x)|\le\bar c_1|x|^{\lambda-1}$, $x\in G_0^{d/2}$;

2. $u(x)\in \overset{\circ}{W}{}^2_{4-n}(G_0^{d/2})$ і при цьому $\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^2_{4-n}(G_0^\rho)} \le \overline{c}_2\rho^\lambda$, $\rho\in(0,d/2)$

3. якщо або $\lambda\ge 2$, $q>n$, або $n<q<\frac{n}{2-\lambda}$, $1<\lambda<2$, то $u(x)\in V^2_{q,0}(G_0^{d/2})$ і при цьому $|u|_{V^2_{q,0}(G_0^\rho)} \le \overline{c}_3\rho^{\lambda-2+n/q}$, $\rho\in(0,d/2)$;

4. якщо $1<\lambda<2$, $q\ge\frac{n}{2-\lambda}$, то $u(x)\in C^\lambda(\overline{G_0^{d/2}})$.

Зауважимо, що сформульовані результати відносяться до задачі , рівняння в якій - *недивергентне*. Такі задачі в *негладких* областях майже не вичались. Нам відомо лише одне дослідження І.І.Данілюка (1987), в якому методами теорії функцій комплексної змінної та інтегральних рівнянь доведена розв'язність в просторі $W^{2,2+\varepsilon}(G)$, $\varepsilon>0$ - достатньо мале, $G\subset\mathbb{R}^2$ і містить кутові точки. Проте, як ми побачимо нижче (глава 5), вимоги на дані задачі в цій роботі завищені і число ε не уточнене. Як показує сформульована теорема 5

$$0<\varepsilon<2\,\frac{\pi/\omega_0-1}{2-\pi/\omega_0},\quad \text{якщо } \pi/2<\omega_0<\pi.$$

Теорема 5 показує також, що розв'язки задачі (КЛ) мають таку ж регулярність (в околі конічної точки), що й розв'язки задачі (Л).

Звернемо увагу ще на одну обставину. Відомий в лінійній теорії метод апроксимації негладкої області послідовністю гладких областей при дослідженні нелінійних задач не можна застосувати, тому що неможливий граничний перехід. Це ми обходимо введенням функції $r_\varepsilon(x)$ - квазівідалі; введення такої функції дозволяє нам працювати в заданій області, а потім забезпечити граничний перехід по $\varepsilon\to+0$ (при цьому $r_\varepsilon(x)\to|x|=r$). Цей же прийом ми використовуємо при вивченні задачі (Л) в главі 1.

В п. 4.5 ми доводимо теореми про підвищення гладкості розв'язків, аналогічні лінійному випадку.

Результати глави 2 (про розв'язність лінійної задачі) і оцінки глав 3, 4 розв'яків нелінійної задачі дозволяють перейти в *п'ятій* главі до дослідження розв'язності задачі (КЛ). Основні результати цієї глави містяться в доведенні наступних двох теорем.

Розглянемо однопараметричну сім'ю задач

$$\begin{cases} a_{ij}(x,u,u_x)u_{x_ix_j} + ta(x,u,u_x) = 0 \quad , \quad x \in G \\ u(x) = t\varphi(x) \qquad \forall t \in [0,1] \quad , \quad x \in \partial G \end{cases} \quad (\text{КЛ})_t$$

Теорема 6. *Нехай* $\Gamma_{d_0} \in W^{2,p}$, $\varphi(x) \in V^{2-1/p}_{p,0}(\partial G)$, $p>n$ *і виконуються припущення:*

(i) для будь-якого розв'язку $u_t(x)$ *задачі* $(\text{КЛ})_t$ *відома величина* $M_0 = \sup_{x\in G}|u_t(x)| \quad \forall t\in[0,1]$;

(ii) умови (C), (A), (Б) і $(\text{В})^*$, *(Г) при* $q=p$ *теореми 5 (вони гарантують існування* $M_1 = \sup_{x\in G}|\nabla u_t(x)| \quad \forall t\in[0,1]$);

(iii) умови (Д) при $q=p$ *і (АА) теореми 5 .*

Тоді, якщо або $\lambda \geq 2$, *або* $1<\lambda<2$, $n<p<\frac{n}{2-\lambda}$, *то задача* $(\text{КЛ})_t$ *має принаймі один розв'зок* $u_t(x) \in V^2_{p,0}(G)$ *при довільному* $t\in[0,1]$.

Теорема 7. *Нехай задані числа* $\lambda\in(1,2)$, $p\in(n,n/(2-\lambda))$, $\beta>\lambda-2$, $q>\frac{n}{2-\lambda}$. *Нехай* $\Gamma_{d_0} \in W^{2,p}$, $\varphi(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{3/2}_{4-n}(\partial G) \cap V^{2-1/q}_{q,0}(\partial G)$, *виконуються припущення теореми 6 і умова: існують невід'ємні числа* k_3, k_4, k_5 *і* $s>\lambda$ *такі, що*

$$b(x)+f(x)+|\Phi_{xx}(x)| \leq k_3 d^{\lambda-2}(x),\ x\in G_\varepsilon\ \forall\varepsilon>0,\ d(x)=\operatorname{dist}(x,\partial G\backslash 0),$$

$$|\varphi|_{\overset{\circ}{W}{}^{3/2}_{4-n}(\Gamma^\rho_0)} \leq k_4\rho^s,\ |\varphi|_{V^{2-1/p}_{p,0}(\Gamma^\rho_{\rho/2})} \leq k_5\rho^{\lambda-2+n/p},\ \rho\in(0,d_0).$$

Тоді задача $(\text{КЛ})_t$ *має принаймі один розв'язок* $u_t(x) \in W^{2,q}_{loc}(G) \cap V^2_{p,0}(G) \cap C^\lambda(\overline{G})$ *при довільному* $t\in[0,1]$.

Доведенням цих двох теорем і завершується частина I нашої роботи. Резюмуючи цю частину, робимо висновок, що в ній повністю побудована теорія розв'язності першої крайової задачі для недивергентних рівномірно еліптичних рівнянь другого порядку в областях з конічними та кутовими точками.

В *другій* частині роботи ми розглядаємо деякі нерозв'язані аспекти теорії, що відносяться до рівнянь дивергентного вигляду

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{a^{ij}(x)u_{x_j} + a^i(x)u\right\} + b^i(x)u_{x_i} + c(x)u = g(x) + \\ \quad + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^j(x)}{\partial x_j}, \qquad x \in G \\ u(x) = \varphi(x), \qquad x \in \partial G \end{cases} \tag{ДЛ}$$

(лінійне дивергентне рівняння),

$$\begin{cases} \frac{d}{dx_i} a_i(x,u,u_x) = A(x,u,u_x), \qquad x \in G \\ u(x) = \varphi(x), \qquad x \in \partial G \end{cases} \tag{ДКЛ}$$

(квазілінійне дивергентне рівняння).

Історія розвитку досліджень таких рівнянь набагато більша. Це пов'язано з тим, що в цьому випадку можна вивчати узагальнені розв'язки задачі, яка тим самим замінюється еквівалентною інтегральною тотожністю, що не містить других узагальнених похідних шуканої функції. Точні оцінки розв'зку задачі (ДЛ) поблизу особливих точок на межі раніше були отримані Г.М.Вержбінским та В.Г.Мазьйою (1971-72) при умові, що старші коефіцієнти $a^{ij}(x)$ задовольняють умову Гельдера, $a^i(x)=b^i(x)=\varphi(x)=0$. В працях Кондратьева - Копачека - Олійник (1982-86) подані оцінки модуля неперервності розв'язку задачі (ДЛ) (при умові, що $a^i(x)=\varphi(x)=0$ в околі граничної точки O) в околі граничної точки O. Старші коефіцієнти $a^{ij}(x)$ припуокаються неперервними (неперервними за Діні) в точці O. При певних припущеннях про структуру межі області G в околі точки O для узагальненого розв'язку задачі (ДЛ) встановлюється гельдерівість в області $\bar{G}$, причому показник Гельдера визначається структурою межі області та є непокращуваним у вказаному класі областей.

Недавно (1991) А. Аззам та В.О. Кондратьев встановили гельдерівську неперервність в околі кутової точки перших похідних узагальненого розв'язку задачі (ДЛ) при припущенні гельдерівської неперервності коефіцієнтів рівняння та $\varphi=0$; при цьому показник Гельдера α задовольняє нерівності $\alpha<\pi/\omega_0-1$. В п. 6.1 глави 6 цей результат ми узагальнюємо на випадок конічної точки та послаблюємо вимоги на гладкість коефіцієнтів: вони повинні бути неперервні за Діні.

Звернемось тепер до задачі (ДКЛ). Теорія регулярності узагальнених розв'язків цієї задачі та її розв'язність в гладкій області добре відома. Починаючи з 1981 року, з'являється цикл праць Е.Мірземана, П.Толксдорфа, П.Грівара, які вивчали поведінку узагальнених розв'язків задачі (ДКЛ) в околі кутової або конічної граничної точки. В п.6.2 ми поширюємо їх результати на більший клас рівнянь та розглядаємо *довільні* (а не тільки *додатні*!) узагальнені розв'язки. Зауважимо також, що оцінки, доведенні в п.6.2, підсилюють у випадку, якщо гранична точка є конічна, недавно (1987) встановлену О.О.Ладиженською та Н.М.Уральцевою ліпшіцеву оцінку розв'язків задачі (ДКЛ) ($m\geq2$) в околі граничної точки. В п.6.3 ми встановлюємо енергетичні вагові оцінки розв'язків задачі (ДКЛ) (у випадку $m=2$), які є подібні до оцінок п.4.3: в них показник ваги - найкращий. Оцінки п.6.3 дозволяють отримати непокращувальні оцінки модулів розв'язку задачі (ДКЛ) та його градієнта ($m=2$), такі ж, як оцінки пп.1.2, 4.4. Нарешті, в п.6.5 ми оцінюємо другі узагальнені похідні узагальнених розв'язків (ДКЛ) (при $m=2$) у ваговому соболевському просторі з найкращим показником ваги. В п.6.6 ми на прикладі переконуємось в точності отриманих результатів.

Роботу ми завершуємо додатком, в якому зібрані деякі відомі факти, що використовуються в роботі, а також деякі твердження, які ми доводимо. Останні ми винесли в додаток, оскільки вони відіграють допоміжну (але важливу!) роль і в основному тексті відволікали б від змісту теорем, що доводяться.

СПИСОК ПРАЦЬ АВТОРА ПО ТЕМІ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Борсук М.В.* Поведение обобщённых решений задачи Дирихле для квазилинейных эллиптических дивергентных уравнений второго порядка вблизи конической точки.// Сиб. мат. ж. 1990. Т.31, N 6. С. 25-38.
2. *Борсук М.В.* Неулучшаемые оценки решений задачи Дирихле для линейных эллиптических недивергентных уравнений

второго порядка в области с конической точкой.// ДАН СССР. -1991.- Т. 317, N 4. С. 790-792.

3. *Борсук М.В.* Неулучшаемые оценки решений задачи Дирихле для линейных эллиптических недивергентных уравнений второго порядка в окрестности конической точки границы // Матем. сб. 1991. Т. 182, N10. С. 1446-1462.

4. *Борсук М.В.* Оценки решений задачи Дирихле для квазилинейного эллиптического недивергентного уравнения второго порядка вблизи угловой точки. // ДАН СССР. -1991.- Т.319, N 6. С. 1289-1291

5. *Борсук М.В.* Оценки решений задачи Дирихле для квазилинейного эллиптического недивергентного уравнения второго порядка вблизи угловой точки// Алгебра и анализ. -1991.- Т.3, N 6. С. 85 - 107.

6. *Борсук М.В.* Поведение решений задачи Дирихле для квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка общего вида вблизи угловой точки.// Укр. мат. журн. -1992.- 44, N 2. С. 167 - 173.

7. *Борсук М.В.* Неулучшаемые оценки решений задачи Дирихле для линейных эллиптических недивергентных уравнений второго порядка в области с конической точкой.// Нелинейные граничные задачи. Сб. научн. тр. Киев: Наук. думка. -1992.- 4. С.9-13.

8. *Борсук М.В.* Оцінки розв'язків задачі Діріхле для квазілінійного еліптичного недивергентного рівняння другого порядку в околі конічної точки// ДАН України. -1993.- N 1. С. 12-15.

9. *Борсук М.В.* О разрешимости задачи Дирихле для линейных эллиптических уравнений второго порядка в области с коническими точками // Успехи мат. наук. -1993. -Т.48, N4. С.176-177.

10. *Борсук М.В.* Оценки решений задачи Дирихле для эллиптических недивергентных уравнений второго порядка в окрестности конической точки границы // Диференциальные уравнения. -1994. -Т.30, N1. С.104-108.

БОРСУК МИХАЙЛО ВОЛОДИМИРОВИЧ

ПЕРША КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ В ОБЛАСТЯХ З КОНІЧНИМИ ТА КУТОВИМИ ТОЧКАМИ НА МЕЖІ.

01.01.02 - диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук

Підписано до друку 26.12.93. Формат 60x84/16. Папір друк.№I.
Друк. офсет. Умовн. друк. арк. I,2. Умовн.фарб. відб. I,3.
Обл.-вид. арк. I,2. Тираж IOO. Зам. 438.
Машинно-офсетна лабораторія Львівського державного університету ім. І.Франка. 290602. Львів, вул. Університетська,I.

второго порядка в области с [illegible] // ДАН СССР. 1991.- Т. 317, N 4. С. [illegible].
3. *Борсук М.В.* Неулучшаемые оценки решений задачи Дирихле для линейных эллиптических недивергентных уравнений второго порядка в окрестности конической точки границы // Мат. сб. 1991. Т. 182, N [illegible] С. 1446-1462.
4. *Борсук М.В.* Оценки решений задачи Дирихле для квазилинейного эллиптического недивергентного уравнения второго порядка вблизи угловой точки. // ДАН СССР. -1991.- Т.319, N 6. С. 1288-1291
5. *Борсук М.В.* [illegible] квазилинейного эллиптического недивергентного уравнения второго порядка вблизи угловой точки. // Алгебра и анализ. 1991.- Т.3, N 6. С. 85-[illegible].
6. *Борсук М.В.* Поведение решений задачи Дирихле для квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка общего вида [illegible] // Укр. мат. журн. [illegible]
7. *Борсук М.В.* Неулучшаемые оценки решений задачи Дирихле для линейных эллиптических недивергентных уравнений второго порядка в области с конической точкой // Нелинейные граничные задачи. Сб. научн. тр. Киев: Наук. думка. -[illegible].- 4. С.9-15.
8. *Борсук М.В.* Оцінки розв'язків задачі Діріхле для квазілінійного еліптичного недивергентного рівняння другого порядку в околі конічної точки // ДАН України. -1993.- N 1. С. 12-15.
9. *Борсук М.В.* О разрешимости задачи Дирихле для линейных эллиптических уравнений второго порядка в области с [illegible]
[illegible]
11. *Борсук М.В.* [illegible]
[illegible]
[illegible] уравнения. 1993. Т.29, N1, С. [illegible]