АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

КАРАГОДОВ Віктор Павлович

НЕЛІНІЙНІ НЕСТАЦІОНАРНІ ЗАДАЧІ КОНВЕКЦІЇ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ В ОБМЕЖЕНОМУ ОБ'ЄМІ

01.01.03 — математична фізика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 1994

Дисертацією є рукопис

Робота виконана в Інституті математики АН України

Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук
ГАЛІЦИН А. С.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук
БАРНЯК М. Я.,

кандидат фізико-математичних наук
ГОРДИНСЬКИЙ Л. Д.

Провідна організація:
Інститут гідромеханіки АН України

Захист відбудеться 29 березня 1994 р. о 15 годині на засіданні Спеціалізованої ради Д 016.50.02 при Інституті математики АН України за адресою: 252601 Київ - 4, ГСП, вул. Терещенківська, 3; FAX: (044) 225 20 10.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Інституту.

Автореферат розіслано 25 лютого 1994 р.

Вчений секретар
Спеціалізованої ради,
доктор фізико-математичних наук
професор ЛУЧКА А. Ю.

Загальна характеристика роботи

Актуальність теми. Конвекція рідини (газу) як фізичне явище дуже широко розповсюджена в природі і її вивчення відіграє важливу роль в багатьох галузях практичної діяльності людини - таких як енергетика, хімічна технологія, металургія, метеорологія, агротехніка та інші. Одними з найбільш актуальних в теоретичному і прикладному аспектах дослідження є задачі, пов'язані з тепловою конвекцією в'язкої нестисливої рідини, що описуються рівняннями Нав'є-Стокса в наближенні Обербека-Буссінеска. Поряд з тим, що ці рівняння є одною з найбільш досліджених математичних моделей (Дж. Лере, Дж. Лионс, Р. Темам, У. Хопф, О. О. Ладиженська, В. А. Солонніков, К. К. Головкін та інш.), існує ряд принципових питань, які вимагають відповіді. Таким є питання про однозначну розв'язність пов'язаних з цими рівняннями задач в загальному тривимірному випадку, ствердно відповісти на яке можна поки-що лише при суттєвих обмеженнях на вихідні дані задачі.

Поряд з теоретичним дослідженням задач конвекції рідини значна роль відводиться їх чисельному моделюванню (Г. З. Гершуні, Є. М. Жуховицький, Є. Л. Тарунін, В. І. Полежаєв, М. М. Яненко, А. О. Дородніцин, Б. Л. Рождественський, О. А. Самарський, Р.Темам, П. Роуч та ін.). Цей аспект досліджень також пов'язаний із значними труднощами, викликаними складністю задач, що полягає в нелінійності, високому порядку, багатовимірності, наявності малого параметра при старших похідних диференціальних рівнянь, якими ці задачі описуються. Тому надзвичайно важливим є розробка ефективних методів для їх наближеного розв'язування.

Мета роботи:

- дослідження однозначної розв'язності нестаціонарних задач конвекції як чисто гідродинамічного типу, так і задач теплової конвекції рідини у тривимірній замкнутій області;

- розробка алгоритму наближеного розв'язування задач про конвекцію рідини, який базується на застосуванні методу Гальоркіна для апроксимації розв'язків;

- дослідження ефективності застосування методу Гальоркіна при наближеному розв'язуванні задач про теплову конвекцію рідини;

- чисельне моделювання стаціонарної і нестаціонарної течій в широкому діапазоні характеристичних чисел течії (число Грасгофа $Gr = 10^4 - 10^{15}$) та аналіз результатів.

Методика досліджень. В роботі використовуються методи функціонального аналізу, теорія узагальнених функцій, прикладні аспекти теорії варіаційних методів, метод скінченних різниць, ітераційний метод наближеного розв'язування нелінійних алгебраїчних систем.

На захист виносяться такі результати:

- нові локальні оцінки гальоркінських наближень до розв'язків задач конвекції в'язкої нестисливої рідини, які узагальнюють аналогічні результати О. О. Ладиженської і М. К. Коренєва, та сформульовані на основі цих оцінок локальні теореми існування і єдиності розв'язків цих задач;
- обгрунтування переваги застосування методу Гальоркіна при наближеному розв'язуванні задач конвекції з високою інтенсивністю течії над скінченно-різницевим методом та методом скінченних елементів,
- принципи застосування методу Гальоркіна при чисельному моделюванні процесів теплової конвекції та оснований на цьому методі алгоритм;
- нові результати чисельного моделювання осесиметричної задачі стаціонарної теплової конвекції рідини в циліндрі, що підігрівається збоку;
- результати чисельного моделювання нестаціонарних задач теплової конвекції рідини при великих значеннях числа Грасгофа.

Наукова новизна. Отримані нові оцінки для гальоркінських наближень до розв'язків тривимірних нестаціонарних задач конвекції рідини, які узагальнюють відомі результати і збільшують часовий проміжок дії теорем про однозначну розв'язність вказаних задач.

Досліджено методологію застосування методу Гальоркіна при наближеному розв'язуванні тривимірних нестаціонарних задач конвекції рідини і обгрунтовано перевагу неперервної апроксимації по простору над методами скінченних різниць та скінченних елементів. При цьому виявлено високу ефективність використання функцій Лежандра для побудови наближеного розв'язку в скінченновимірному базисі.

Розроблено алгоритми обчислень і побудовано комплекс програм, що грунтується на застосуванні методу Гальоркіна, для наближеного розв'язування осесиметричних задач теплової конвекції. Чисельним моделюванням встановлено і обгрунтовано нові ефекти в стаціонарному русі рідини в скінченному круговому циліндрі, що підігрівається збоку, які суттєво відрізняються від відомих. На основі чисельного моделювання досліджено еволюцію термоконвекції при великих значеннях числа Грасгофа ($Gr = 10^7 - 10^{15}$).

Практична цінність. Отримані результати дослідження однозначної розв'язності тривимірних нестаціонарних задач конвекції рідини можуть бути використані в послідуючих дослідженнях в напрямку встановлення єдиного глобального розв'язку цих задач.

Розроблена методологія застосування методу Гальоркіна при наближеному розв'язуванні тривимірних нестаціонарних задач термоконвекції, а також алгоритми обчислень і створений комплекс програм можуть бути використані для чисельного дослідження різноманітних фізичних процесів, пов'язаних з конвекцією рідини.

Апробація роботи. Основні результати роботи доповідались:

- на школі-семінарі "Динамика твердых и упругих тел, взаимодействующих с жидкостью" (м. Київ, 1982 р.);
- на республіканській конференції по нелінійних задачах математичної фізики (м. Донецьк, 1983 р.);
- на 4-му засіданні міжнародного бюро по гірничій теплофізиці (Великобританія, 1985 р.);
- на конференції "Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике" (м. Київ, 1985 р.);
- на республіканській конференції "Экстремальные задачи теории приближений и их применение" (м. Київ, 1990 р.);
- на семінарах відділів прикладних досліджень, динаміки і стійкості багатовимірних систем Інституту математики АН України.

Публікації. По темі дисертації опубліковано 10 робіт, список яких наведено нижче.

Структура та обсяг роботи. Робота складається із вступу, трьох глав, висновків та списку цитованої літератури і містить 106 сторінок тексту, включаючи 6 таблиць та 7 рисунків (з варіантами). Список літератури містить 85 найменувань.

Основний зміст роботи

У вступі розглядається актуальність тематики в теоретичному і прикладному аспектах, якої торкається дисертація. На основі бібліографічного аналізу проводиться короткий історичний огляд відповідної проблематики, а також висвітлюються основні труднощі, з якими пов'язане її вивчення на даний час. Подається зміст приведених в дисертації досліджень автора та результатів цих досліджень, а також апробація останніх.

§ 1 гл. 1 містить відомі твердження, що стосуються функціональних просторів і нерівностей як для скалярних, так і для векторних функцій, які використовуються потім при узагальненій постановці розглянутих задач, побудові оцінок для гальоркінських наближень до їх розв'язків та формулюванні теорем про однозначну розв'язність даних задач, а також при розгляді питань про застосування методу Гальоркіна для наближеного розв'язування їх.

В § 2 цієї глави спочатку розглядається класична постановка задачі про нестаціонарну конвекцію в'язкої нестисливої рідини в обмеженому об'ємі Q при умовах прилипання на границі області і заданих початковій швидкості руху рідини $\vec{a}(x)$ та сили збурення $\vec{f}(x, t)$, що описується системою рівнянь

$$\vec{v}_t + (\vec{v}\cdot\nabla)\,\vec{v} = \nu\,\Delta\,\vec{v} - \nabla\, p + \vec{f}, \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0\,, \tag{1}$$

$$\vec{v}|_{t=0} = \vec{a}(x)\,, \quad \vec{v}|_{S_T} = 0\,, \tag{2}$$

де $\vec{v}(x, t)$, $p(x, t)$ - відповідно, швидкість руху рідини і тиск в точці $x \in Q \subset E_3$ в момент часу $t \in [0, T]$; $\nu = const$ - в'язкість рідини; S_T - границя області $Q_T = Q \times [0, T]$. На основі цієї постановки вводиться поняття узагальненого розв'язку.

<u>Означення</u> <u>1</u>. Узагальненим розв'язком задачі (1), (2) називається функція $\vec{v}(x, t) \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(Q_T) \cap \overset{\circ}{J}(Q_T)$, яка задовольняє тотожність

$$\int_0^t [\,(\vec{v}_t, \vec{\Phi}) + \nu\,(\vec{v}_x, \vec{\Phi}_x) - ((\vec{v}\cdot\nabla)\,\vec{\Phi}, \vec{v})]\,dt = \int_0^t (\vec{f}, \vec{\Phi})\,dt, \tag{3}$$

при довільних $\vec{\Phi}(x, t) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,0}_2(Q_T) \cap \overset{\circ}{J}(Q_T)$ та $t \in [0, T]$ і в якій існують всі, що входять до неї, інтеграли. Тут і далі рискою зверху $(\overset{\circ}{I}_2(Q_T))$ позначаються простори вектор-функцій, відповідні відомим скалярним функціональним просторам $(L_2(Q_T))$, а нулик зверху в позначенні просторів означає, що функції відповідних просторів мають нульовий слід на границі області їх визначення. $\mathring{J}(Q)$ – підпростір простору $\mathring{L}_2(Q)$, що складається з соленоїдальних вектор-функцій. Конструкція (,) означає скалярний добуток в $L_2(Q)$ або в $\mathring{L}_2(Q)$.

Поряд з цим розглядається також поняття "слабкого" розв'язку, отриманого Е. Хопфом, і в цьому зв'язку – отримані О. О. Ладиженською точні межі класу єдиності розв'язків, що визначаються певними співвідношеннями, які вони повинні задовольняти.

Що стосується функції $p(x, t)$, то завдяки узагальненій постановці задачі (1), (2) визначення її зводиться до окремої поряд з (4) задачі. В зв'язку з цим наводяться деякі відомі твердження про існування та єдиність цієї складової розв'язку даної задачі, а також про її властивості.

Далі розглядається задача про теплову конвекцію, яка в наближенні Обербека-Бусінеска представляється системою рівнянь

$$\vec{v}_t + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = \nu\Delta\vec{v} - \nabla p - \vec{g}\beta u + \vec{f}, \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0, \qquad (4)$$

$$\vec{v}|_{t=0} = \vec{a}(x), \quad \vec{v}|_{S_T} = 0, \qquad (5)$$

$$u_t + (\vec{v}\cdot\nabla)u = \varkappa\Delta u + q, \qquad (6)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u|_{S_T} = 0, \qquad (7)$$

де $u(x, t)$ – температура в точці $x \in Q \subset E_3$ в момент часу $t \in [0, T]$, β – коефіцієнт теплового розширення; $\vec{g}$ – прискорення сили тяжіння; $\varkappa$ – температуропровідність рідини; $q(x, t)$ – внутрішні джерела тепла; $u_0(x)$ – початкова температура рідини. Інші величини означають те ж саме, що й в попередній задачі. На основі класичної постановки (4)-(7) формулюється узагальнена постановка задачі.

<u>Означення 2</u>. Узагальненим розв'язком задачі (4)-(7) при $t \in [0, T]$ назвемо пару функцій $(\vec{v}, u) \in (\mathring{W}_2^1(Q_T) \cap \mathring{J}(Q_T), \mathring{W}_2^1(Q_T))$, яка задовольняє тотожності

$$\int_0^t [(\vec{v}_t, \vec{\Phi}) + \nu(\vec{v}_x, \vec{\Phi}_x) - ((\vec{v}\cdot\nabla)\vec{\Phi}, \vec{v})]\, dt =$$

$$= \int_0^t [-\beta(u\vec{g}, \vec{\Phi}) + (\vec{f}, \vec{\Phi})]\, dt, \qquad (8)$$

$$\int_0^t [(u_t, \theta) + \varkappa (u_x, \theta_x) - ((\vec{\vartheta}\cdot\nabla)\,\theta,\, u)]\, dt = \int_0^t (q,\, \theta)\, dt \qquad (9)$$

при будь-яких $\vec{\vartheta}(x, t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T) \cap \overset{\circ}{J}(Q_T)$ і $\theta(x, t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$ для всіх $t \in [0, T]$ і таких, що існують всі інтеграли в цих тотожностях.

І, нарешті, розглядаються класична та узагальнена постановки задачі про теплову конвекцію в'язкої нестисливої рідини, що заповнює циліндричну порожнину Q_1 скінченних розмірів в теплопровідному твердому масиві – аксіальному циліндрі Q_2. При цьому використовуються безрозмірні величини виміру простору, часу, швидкості та температури, а також вводиться функція течії $\psi(r, z, t)$ при припущенні аксіальної симетрії вхідних даних задачі. В наближенні Обербека-Бусінеска ця задача представляється наступною системою рівнянь:

$$D\psi_t - r\,\frac{\partial(\psi,\ r^{-2}D\psi)}{\partial(r,\ z)} - D^2\psi = r\left(\phi - Gr\,\frac{\partial u}{\partial r}\right),\ (r, z) \in Q_1, \qquad (10)$$

$$\sigma\left[\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial(\psi,\ u)}{\partial(r,\ z)}\right] - \lambda\,\Delta u = F,\ (r, z) \in Q,\ t > 0; \qquad (11)$$

$$\psi = (\vec{n}_1\cdot\nabla\psi) = 0,\ (r, z) \in \Gamma_1,\ t \ge 0; \qquad (12)$$

$$[\,u\,] = [\,\lambda\,(\vec{n}_1\cdot\nabla u)\,] = 0,\ (r, z) \in \Gamma_1,\ t > 0; \qquad (13)$$

$$\lambda_2(\vec{n}\cdot\nabla u) + \alpha u = f,\ (r, z) \in \Gamma,\ t > 0; \qquad (14)$$

$$\psi(r, z, 0) = \psi_0(r, z),\ (r, z) \in Q_1; \qquad (15)$$

$$u(r, z, 0) = u_0(r, z),\ (r, z) \in Q. \qquad (16)$$

де $u_0(r, z)$ – взагалі кажучи, розривна функція:

$$u_0(r, z) = \begin{cases} u_{10}, & (r, z) \in Q_1, \\ u_{20}, & (r, z) \in Q_2, \end{cases}$$

$$(\sigma,\ \lambda) - \left\{\begin{pmatrix} \sigma_1 = \nu\rho_1 c_1 \\ \sigma_2 = \nu\rho_2 c_2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}\right.,\ (r, z) \in \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix},$$

D – оператор Стокса:

$$D\psi = r\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\ .$$

В даній системі функція течії $\psi(r,\ z,\ t)$ і безрозмірна температура $u(r,\ z,\ t)$ - відшукувані функції; $Gr = g\beta\theta R^3/\nu^2$ - число Грасгофа; $\Phi(r,\ z,\ t)$ і $F(r,\ z,\ t)$ - функції збурення ротора швидкості та температури, відповідно; ν - в'язкість рідини; β - коефіцієнт теплового розширення рідини; g - величина прискорення сили тяжіння; ρ_l, c_l, λ_l - відповідно густина, теплоємність та теплопровідність рідини ($l = 1$) і твердого масиву ($l = 2$); $\alpha = \alpha(r,\ z)$ - коефіцієнт теплопередачі на поверхні Γ масиву Q_2; $[\varkappa]$ - стрибок на Γ_1 функції $\varkappa$,заданої в Q, рівний $(\varkappa_2 - \varkappa_1)|_{\Gamma_1}$ (тут $\varkappa_1$ і $\varkappa_2$ - звуження функції на Q_1 і $Q \setminus \bar{Q}_1$, відповідно); $\vec{n}$ і $\vec{n}_1$ - нормалі до Γ і Γ_1, відповідно. Всі наведені фізичні характеристики рідини і твердого масиву вважаються постійними.

Отже рівняня (10) розглядається в циліндрі $Q_{1T} = Q_1 \times [0,\ T]$, а рівняння (11) з розривними коефіцієнтами σ і λ, що описує розподіл температури як в рідині, так і в масиві, - в циліндрі $Q_T = [Q_1 \cup (Q \setminus \bar{Q}_1)] \times [0,\ T]$ (як випливає з крайових умов, функцію ψ можна продовжити нулем в область $Q_T \setminus Q_{1T}$).

Характерними особливостями сформульованої задачі є нелінійність, різні порядки диференціальних рівнянь (10), (11), розривність коефіцієнтів правої частини рівняння (11), великі значення числа Gr (10^6 - 10^{15}), що відповідають більшості процесів теплообміну в рідинах, які зустрічаються на практиці.

Використовуючи наведені в дисертації інтегральні співвідношення та відповідні функціональні простори, формулюється постановка задачі для узагальненого розв'язку.

<u>Означення</u> <u>3</u>. Узагальненим розв'язком задачі (10)-(16) назвемо пару функцій $(\psi,\ u)$, що належить простору $V^{3,0}_{2,0}(Q_T) \times V^{1,0}_{2,0}(Q_T)$, якщо вона задовольняє інтегральні тотожності

$$\int\limits_{Q_{1t}} \left[D\psi_t\,\frac{\varphi}{r} - \frac{D\psi}{r}\,\frac{\partial(\psi,\ \varphi)}{\partial(r,\ z)} + \frac{(\nabla D\psi \cdot \nabla \varphi)}{r} \right] dr dz dt =$$

$$= \int\limits_{Q_{1t}} \left[Gr\ u\ \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \Phi\ \varphi \right] dr\ dz\ dt\ , \qquad (17)$$

$$\int\limits_{Q_t} \left\{ \sigma\left[u_t\theta + \frac{1}{r}\,\frac{\partial(\psi,\ \theta)}{\partial(r,\ z)}\,u \right] + \lambda(\nabla u \cdot \nabla \theta) \right\} r dr dz dt =$$

$$= \int\limits_{Q_t} F\,\theta\, r dr dz dt + \int\limits_{\Gamma} f\,\theta\, d\gamma - \alpha \int\limits_{\Gamma} u\,\theta\, d\gamma \qquad (18)$$

при всякому $t \in [0, T]$ і довільній парі (φ, θ) з $V^{1,1}_{2,0}(Q_T) \times V^{1,1}_{2,0}(Q_T)$, де банахові простори $V^{l,m}_{k,0}(Q_T)$ в дисертації відповідним чином визначені.

В § 1 гл. 2 узагальнюються результати, отримані О. О. Ладиженською для тривимірних нестаціонарних задач конвекції в'язкої нестисливої рідини, що описуються наведеними вище рівняннями (1), (2). Це узагальнення стосується насамперед оцінок для гальоркінських наближень до розв'язків вказаних задач і при введених позначеннях

$$y(t) = \| \vec{v}(x, t) \|, \ \varphi(t) = \| \vec{v}_x(x, t) \|,$$

$$\psi(t) = \| \vec{v}_t(x, t) \|, \ F(t) = \| \vec{v}_{xt}(x, t) \|,$$

де символ $\|\cdot\|$ означає норму в $L_2(Q)$, сформульоване у вигляді наступної леми.

Лема 1. Якщо $\vec{v}(x, t)$ задовольняє при майже всіх $t \in [0, T]$ співвідношення

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} y^2 + \nu \varphi^2 = (\vec{f}, \vec{v}), \qquad (19)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \psi^2 + \nu F^2 = (\vec{f}_t, \vec{v}_t) + ((\vec{v}_t \cdot \nabla)\vec{v}_t, \vec{v}), \qquad (20)$$

то при всіх $t \in [0, t_n]$ мають місце оцінки

$$\varphi(t) \le \varphi(0) + h^*, \qquad (21)$$

$$\psi(t) \le C_2 e^{z_n(h_n)}, \qquad (22)$$

$$t_n = \sum_{i=1}^{n} T_i, \qquad (23)$$

де n - довільне додатне натуральне число, $h^* = \sum\limits_{i=1}^{n} h_i$,

$z_n(h) = \frac{1}{4} A_1 \nu^{-1}\left[\varphi(0) + \sum\limits_{i=1}^{n-1} h_i + h\right]^2$, T_i - максимальні значення

функції $T_n(\varepsilon, h) = \gamma h^2 \left[C_2^2 e^{z_i(h)} \left[A_1 \varepsilon^{-1} e^{z_i(h)} + 1\right]\right]^{-1}$,

які досягаються в точках (ε_i, h_i) при умові

$$\gamma = \nu - \left[\varepsilon (4\nu)^{-1}\left[\varphi(0) + \sum_{i=1}^{i-1} h_i + h\right]^2\right]^{1/3} > 0 .$$

Для всіх $i = 1,2,\dots,n$ при $t \in [0, t_i]$ виконується така оцінка

$$\psi^2(t) + 2\gamma \int_0^t F^2\, dt \le 2\, C_2^2\, e^{z_1(k)} \left(A_1 \varepsilon^{-1} e^{z_1(k)} + 1\right) . \qquad (24)$$

де $\gamma = \gamma_i$, якщо $\varepsilon = \varepsilon_i$ і $k = k_i$.

На основі отриманих оцінок (21)-(24) формулюється теорема про однозначну розв'язність задачі (1), (2) на відрізку $[0, t_n]$.

<u>Теорема</u> <u>1</u>. Якщо $\vec{a} \in W_2^2(Q) \cap \overset{\circ}{J}{}_2^{(1)}(Q)$, $\vec{f} \in L_2(Q_T)$, $\vec{f}_t \in L_{2,1}(Q_T)$, то при $t \in [0, t_n]$, $t_n \in [0, T]$, існує єдиний узагальнений розв'язок, для якого виконуються оцінки леми 1 і $\vec{v}^2 \in L_2(Q_T)$, $\vec{v}_x$, $\vec{v}_{tx} \in L_2(Q_T)$, а $\vec{v}_t$ - елемент простору $\overset{\circ}{J}(Q)$, що неперервно залежить від t в слабкій топології $\overset{\circ}{J}(Q)$. Величина t_n оцінюється знизу нерівністю (23).

В § 2 цієї глави розглядаються аналогічні оцінки для задачі (4)-(7). В даному випадку узагальнюються результати, отримані Н. К. Кореневим.

Введемо додатково позначення

$z(t) = \|u(x, t)\|$, $\zeta(t) = \|u_x(x, t)\|$, $\xi(t) = \|u_t(x, t)\|$,

$R(t) = \|u_{xt}(x, t)\|$, де символ $\|\cdot\|$ означає норму в $L_2(Q)$. Це узагальнення можна сформулювати у вигляді наступних лем.

<u>Лема</u> <u>2</u>. Якщо функції $\vec{v}(x, t)$ і $u(x, t)$ задовольняють при майже всіх $t \in [0, T]$ співвідношення

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} y^2 + \nu\, \varphi^2 = -\beta(u\,\vec{g}, \vec{v}) + (\vec{f}, \vec{v}) , \qquad (25)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} z^2 + \varkappa\, \zeta^2 = (q, u) , \qquad (26)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \psi^2 + \nu\, F^2 = ((\vec{v}_t \cdot \nabla)\, \vec{v}_t, \vec{v}) - \beta(u_t \vec{g}, \vec{v}_t) + (\vec{f}_t, \vec{v}_t) , \qquad (27)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \xi^2 + \varkappa\, R^2 = ((\vec{v}_t \cdot \nabla)\, u_t, u) + (q_t, u_t) . \qquad (28)$$

$$\left(u_t \vec{g}, \vec{v}_t\right) + \left(\left(\vec{v} \cdot \nabla\right) u\, \vec{g}, \vec{v}_t\right) + \varkappa\left(u_x \vec{g}, \vec{v}_{tx}\right) = \left(q\, \vec{g}, \vec{v}_t\right). \qquad (29)$$

то при всіх $t \in [0, t_1]$, де $t_1 \le T$, виконуються оцінки

$$\varphi(t) \le \varphi(0) + h \qquad (30)$$

$$\psi^2(t) \le \min_{\bar{\varepsilon}} C(\bar{\varepsilon}) = \min_{\bar{\varepsilon}} \left\{\psi^2(0) + \beta^2\, |\vec{g}|^2 \left[\left(2\cdot\sqrt{3}\ \bar{\varepsilon}_1^{-2}\, C_1 + \right.\right.\right.$$

$$+ \bar{\varepsilon}_2^{-2}\ \varkappa^2\Big)\ \varkappa^{-1}D_1 + \bar{\varepsilon}_3^2 \int_0^T \|q\|^2\, dt\Big] + \bar{\varepsilon}_5^2 \int_0^T \|\vec{f}_t\|^2\, dt\Big\} \times$$

$$\times \exp\left[\frac{1}{2}\,\bar{\varepsilon}_4^{-4}\left(A_1 \nu^{-1} T\right)^{1/2} + \left(\bar{\varepsilon}_3^{-2} + \bar{\varepsilon}_5^{-2}\right) T\right] = C_3^{*}, \qquad (31)$$

$$\psi^2(t) + 2\gamma(\varepsilon, k) \int_0^t F^2\, dt \le \psi^2(0) + \Big[\frac{1}{2}\,\varepsilon_4^{-4} \int_0^t \varphi\, dt +$$

$$+ \left(\varepsilon_3^{-2} + \varepsilon_5^{-2}\right) t\Big]\, C_3(\bar{\varepsilon}) + \beta^2\, |\vec{g}|^2 \Big[\left(2\cdot\sqrt{3}\ \varepsilon_1^{-2}\, C_1 + \varepsilon_2^{-2}\, \varkappa^2\right) \times$$

$$\times \int_0^T \zeta^2\, dt + \frac{1}{2}\,\varepsilon_3^2 \int_0^T \|q\|^2\, dt\Big] + \varepsilon_5^2 \int_0^T \|\vec{f}_t\|^2\, dt = C_4(\varepsilon, \bar{\varepsilon}). \qquad (32)$$

де $\bar{\varepsilon} = (\bar{\varepsilon}_i,\ i = \overline{1,5})$ задовольняє умову

$$\gamma(\bar{\varepsilon}, k) = \nu - \frac{1}{2}\,\bar{\varepsilon}_2^2 - \left(\varphi_0 + k\right)\left(\bar{\varepsilon}_1^2 + \bar{\varepsilon}_4^{4/3}\right) = 0\,.$$

а $\varepsilon = (\varepsilon_i,\ i = \overline{1,5})$ - умову $\gamma_1(\varepsilon, k) > 0$ і t_1 оцінюється знизу нерівністю

$$t_1 \ge 2\, k^2 \gamma_1(\varepsilon, k)\, C_4^{-1}(\varepsilon, \bar{\varepsilon}) = T^{*}(k, \varepsilon, \bar{\varepsilon})\,. \qquad (33)$$

Лема 3. Якщо $\vec{v}(x, t)$ і $u(x, t)$ задовольняють при $t \in [0, T]$ співвідношення (25)-(29), то при всіх $t \in [t_{n-1}, t_n]$, де n - довільне додатне натуральне число, виконуються оцінки (31)-(33) і оцінка $\varphi(t) \le \varphi_{n-1} + k_n$ при значеннях $k = k_n$ і $\varepsilon^{*} = \varepsilon^{*}_n$, що задовольняють максимум правої частини нерівності

$$t_n - t_{n-1} \ge 2\, \gamma_n(\varepsilon, k)\, k^2\, C_4^{-1} = T_n^{*}(k, \varepsilon^{*}) \qquad (34)$$

при умовах

$$\gamma_n(\varepsilon, k) = \nu - \frac{1}{2}\,\varepsilon_2^2 - \left(\varphi_{n-1} + k\right)\left(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_4^{4/3}\right) > 0\,, \qquad (35)$$

$$\gamma_n(\bar{\varepsilon}, k) = \nu - \frac{1}{2}\,\bar{\varepsilon}_2^2 - \left(\varphi_{n-1} + k\right)\left(\bar{\varepsilon}_1^2 + \bar{\varepsilon}_4^{4/3}\right) = 0, \qquad (36)$$

де ε^{*} - це сукупність параметрів $\varepsilon = (\varepsilon_i,\ i = \overline{1,5})$ і $\bar{\varepsilon} = (\bar{\varepsilon}_i,\ i = \overline{1,5})$, що фігурують в (35), (36). $T_n = T_n^{*}(k_n, \varepsilon_n^{*}) = \max\limits_{k,\varepsilon} T_n^{*}(k, \varepsilon^{*})$ визначає оцінку відрізка $[t_{n-1}, t_n]$ знизу: $t_n - t_{n-1} \ge T_n$. Оцінки, що відповідають $t \in [t_{n-1}, t_n]$, виконуються для всіх $t \in [0, t_n]$, де

$$t_n \ge \sum_{i=1}^{n} T_i. \qquad (37)$$

Отримані апріорні оцінки дозволяють сформулювати для $\tau \in$

$[0, t_n]$ теорему про існування єдиного розв'язку задачі про теплову конвекцію в'язкої нестисливої рідини.

<u>Теорема 2</u>. Якщо в задачі (4)-(7) $\vec{a} \in \overset{\circ}{J}{}_2^{(1)}(Q) \cap W_2^2(Q)$, u_0 - $W_2^2(Q) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$, $\vec{f}_t \in I_2(Q_T)$, $q_t \in L_2(Q_T)$, $\max\limits_t \|\vec{f}\| = C_2 < \infty$ $\max \|q\| = B_2 < \infty$, то при $t \in [0, t_n]$, де t_n оцінюється знизу нерівністю (37), існує єдиний розв'язок $(\vec{v}, u)$ цієї задачі причому $\vec{v}_x$, $\vec{v}_t$, $\vec{v}_{tx} \in I_2(Q_T)$, $\vec{v}^2$, u^2, u_x, u_t, $u_{tx} \in L_2(Q_T)$, $\psi = \|\vec{v}_t\|$ і $\xi = \|u_t\|$ - неперервні функції по t на $[0, t_n]$ і для та u мають місце оцінки леми 3.

Глава 3 присвячена застосуванню методу Гальоркіна при наближеному розв'язуванні тривимірних нестаціонарних задач теплової конвекції, що мають аксіальну симетрію. Постановка однієї з них наведена вище.

В § 1 на прикладі простішої від згаданої задачі розглядаються загальні питання, пов'язані з застосуванням вказаного методу до даного класу задач. А саме, в гільбертовому просторі $\overset{\circ}{W}{}_2^{(2)}(Q)$ із скалярним добутком $(\psi, \varphi) = \int\limits_Q \frac{D\psi}{r^2} \frac{D\varphi}{r^2} r dr dz$ вибирається деяка повна в ньому система координатних функцій $\{\varphi_k(r, z)\}_{k=1}^{\infty}$ і координатна система $\{\theta_l(r, z)\}_{l=1}^{\infty}$, повна в $W_2^1(Q)$ (або $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$ у випадку крайової умови для температури $u = 0$). Наближений розв'язок відшукується вигляді

$$\psi^{NM}(r, z, t) = \sum_{k=1}^{N} c_k^{NM}(t) \varphi_k(r, z), \ (r, z) \in Q, \ t \ge 0 , \quad (38)$$

$$u^{NM}(r, z, t) = \sum_{l=1}^{M} c_{N+l}^{NM}(t) \theta_l(r, z), \ (r, z) \in Q, \ t \ge 0 , \quad (39)$$

де $c_j^{NM}(t)$, $j = \overline{1, N+M}$, - відшукувані компоненти розв'язку (індекс NM надалі опускається).

Використовуючи відому методику застосування методу Гальоркіна для отримання наближених розв'язків, прийдемо до задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь відносно невідомих c

$$\hat{B} \frac{dc}{dt} - D(c) + \hat{A} c = G , \ c(0) = c^{(0)} ,$$

де $c = \{c_j(t), \ j = \overline{1, N+M}\}$,

$$\hat{B} = \left[\begin{array}{c|c} \hat{B}^{(1)} & 0 \\ \hline 0 & \hat{B}^{(2)} \end{array}\right], \quad \hat{A} = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}^{(1)} & \hat{A}^{(0)} \\ \hline \hat{A}^{(3)} & \hat{A}^{(2)} \end{array}\right] - \qquad (41)$$

блочні матриці, які складаються із матриць $\hat{A}^{(1)}$, $\hat{B}^{(1)}$ розмірності $N \times N$, матриць $\hat{A}^{(2)}$, $\hat{B}^{(2)}$ розмірності $M \times M$ і матриць $\hat{A}^{(0)}$, $\hat{A}^{(3)}$ розмірності $N \times M$; $D(c)$ - квадратична форма відносно елементів вектора , що відповідає нелінійним членам рівнянь (10), (11); $c^{(0)}$, G - відомі вектор-стовпці, що відповідають початковим умовам та вільним членам заданої задачі. Спосіб визначення всіх елементів системи (40) описаний в дисертації.

Для розв'язування вказаної системи використовується схема Кранка-Ніколсона, що забезпечує другий порядок точності апроксимації відносно кроку по часу τ . Отриману при цьому алгебраїчну систему нелінійних рівнянь пропонується розв'язувати узагальненим ітераційним методом Ньютона , записавши її для цього у вигляді

$$\left(\hat{B} + \frac{\tau}{2} \hat{A} \right) c^{s+1} = \left(\hat{B} - \frac{\tau}{2} \hat{A} \right) c^{s} + \tau\, D \left(\frac{c^{s+1} + c^{s}}{2} \right) + \frac{\tau}{2} \left(G^{s+1} + G^{s} \right) . \qquad (42)$$

Було встановлено, що як перше наближення на кожному кроці доцільно використовувати розв'язок $\bar{c}^{s+1}$ відповідної лінійної системи, отриманої з (42) виключенням нелінійного члена.

В підсумку цього розділу дається загальний опис алгоритму чисельного розв'язування даного класу задач на ЕОМ, а також деякі особливості реалізації створеного програмного комплексу на ЕОМ.

На прикладі одновимірної тестової задачі в цьому розділі демонструється також значний негативний вплив на точність розв'язку апроксимаційної в'язкості при застосуванні різницевих схем.

В § 2 розглянуті питання вибору координатних функцій для апроксимації розв'язку (ψ, u). Як координатні при цьому застосовувались, відповідно, функції вигляду

$$\psi_{km}(r, z) = r^2 \varphi_k(r) \bar{\varphi}_m(z) \quad , \ k, m = \overline{1,N} ;$$

$$\theta_{\nu\mu}(r, z) = \eta_{\nu}(r) \bar{\eta}_{\mu}(z) \quad , \ \nu, \mu = \overline{1,M} ; \qquad (43)$$

де $\varphi_k(r) = \frac{(2k+1)^{-1/2}}{4} \left[\frac{1}{2k+3} P_{k+2}(2r - 1) - \right.$

$$- \frac{2(2k+1)}{(2k+3)(2k-1)} P_k(2r-1) + \frac{1}{2k-1} P_{k-2}(2r-1) \Big]$$

і $$\bar{\varphi}_m(z) = \frac{h^2(2m+1)^{-1/2}}{4} \left[\frac{1}{2m+3} P_{m+2}\left(2\frac{z}{h} - 1\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{2(2m+1)}{(2m+3)(2m-1)} P_m\left(2\frac{z}{h} - 1\right) + \frac{1}{2m-1} P_{m+2}\left(2\frac{z}{h} - 1\right)\right], \quad (44)$$

побудовані на основі поліномів Лежандра $P_k(x)$ з врахуванням граничних умов для функції течії ψ.

Для апроксимації температури u виявилось зручним використовувати тригонометричні функції

$$\eta_\nu(r) = \cos \pi(\nu - 1)r \ , \ \bar{\eta}_\mu(z) = \cos \frac{\pi}{h}(\mu - 1)z \qquad (45)$$

у випадку природної граничної умови на Г і функції

$$\eta_\nu(r) = \cos \frac{\pi}{2}(2\nu - 1)r, \ \bar{\eta}_\mu(z) = \cos \frac{\pi \mu}{h} z \qquad (46)$$

у випадку граничної умови $u = 0$ на Г.

З метою порівняння використовувались також для апроксимації функції течії ψ комбінації тригонометричних функцій вигляду

$$\varphi_k(r) = \cos \frac{(-1)^{k+1} - 1}{2} \pi r - \cos (k - 1) \pi r$$

$$\bar{\varphi}_m(z) = \cos \frac{(-1)^{m+1} - 1}{2} \frac{\pi z}{h} - \cos (m - 1) \frac{\pi z}{h} \qquad (47)$$

Завдяки такому вибору координатних функцій всі елементи матриць $\hat{A}$ та $\hat{B}$ і коефіцієнти квадратичної форми $D(c)$ обчислюються точно в квадратурах, що значно зменшує апроксимаційні похибки.

З метою визначення оптимального по точності і розміру скінченного базису для апроксимації розв'язку були проведені обчислювальні експерименти на точність знаходження власних значень спектральних задач

$$\hat{A}^{(1)} + \lambda \hat{B}^{(1)} = 0 \ , \quad \hat{A}^{(2)} + \alpha \hat{B}^{(2)} = 0 \ . \qquad (48)$$

Представлені в дисертації результати свідчать про те, що з застосуванням поліномів Лежандра задовільна точність досягається вже при N = 4 (16 координатних функцій), що співставляється з точністю при N = 8 (64 координатних функцій) з застосуванням тригонометричних функцій. Звичайно, в зв'язку з нелінійністю задач, що розглядаються, точніше визначити розмір базису можна лише експериментально в процесі їх розв'язування.

В § 3 розглянуті результати тестової перевірки алгоритму і програмного комплексу на вже досліджених задачах про теплову конвекцію в квадраті (Г. З. Гершуні, Є. М. Жуховицький, Є. Л. Таруній) при значеннях числа Грасгофа $Gr = 10^4$, 10^6 та в круговому циліндрі, що підігрівається збоку (В. І. Полєжаєв, С. Г. Черкасов), при значеннях $Gr = 10^5$, 10^7. Координатні функції в цих випадках будуються, в основному, так само, як це описано вище, з деякими особливостями, обумовленими умовами цих задач, що відзначено в дисертації.

Що стосується першої задачі, то вже при невеликій кількості координатних функцій ($N = M = 3$, 4) досягається задовільне співпадання розв'язків, отриманих за допомогою методу Гальоркіна, з отриманими із застосуванням методу сіток. Застосування ж методу Гальоркіна для розв'язування другої задачі приводить при тих же параметрах до якісно іншої течії. Разом з тим, було встановлено, що результатам застосування методу сіток при числі $Gr = 7 \cdot 10^6$ добре відповідають результати, отримані з застосуванням методу Гальоркіна при числі $Gr = 7 \cdot 10^4$. Вказана невідповідність результатів при однакових значеннях числа Грасгофа пояснюється впливом апроксимаційної в'язкості, що виникає при різницевій апроксимації нелінійних членів вихідних рівнянь.

На основі отриманих нових якісних та кількісних результатів проведений детальний аналіз стаціонарної течії у випадку цієї задачі для значень $Gr = 7 \cdot 10^4$ та $Gr = 7 \cdot 10^6$.

В § 4 розглядається весь перебіг конвективного процесу від моменту зародження до стабілізації для останньої задачі при вказаних значеннях числа Грасгофа. Наведені якісні картини течії та її кількісні характеристики (максимальні значення функції течії та модуля швидкості). Коментуються найхарактерніші стадії та особливості цього процесу.

На завершення проведених досліджень розглянуто чисельне моделювання нестаціонарної теплової конвекції, що описана вище системою рівнянь (10)-(11), в якій вважається $\Phi = F = f = 0$, $\alpha = 0$ і $\left(\vec{n} \cdot \nabla u\right) = 0$ на границі Г. Початковий розподіл безрозмірної температури в системі рідина - тверде тіло з врахуванням геотермічного градієнта задавався у вигляді:

$$u_0(r,\, z) = \begin{cases} 0\,, & (r,\, z) \in Q_1\,, \\ -\,0{,}00714\, z + 0{,}99286\,, & (r,\, z) \in Q_2\,. \end{cases}$$

Обчислення проводились для значень $Gr = 7{,}6636 \cdot 10^k$, де $k = 6$, 10, 14, з кроком по часу $\tau = 10^{-4}$, 10^{-6}, 10^{-8}, відповідно. Результати представлені у вигляді ізоліній функції течії та ізотерм, а також ізоліній модуля швидкості, пульсацій модуля швидкості в фіксованих точках об'єму.

Основні результати дисертації опубліковані в наступних роботах:

1. Галицын А. С., Карагодов В. П. Об одной экономичной разностной схеме численного решения системы уравнений тепловой конвекции в цилиндрической лакуне // Дифференциальные уравнения с частными производными в прикладных задачах. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1982. - С. 36-40.

2. Галицын А. С., Жуковский А. Н., Карагодов В. П. Нелинейная сопряженная задача о термоконвективной динамике вязкой жидкости в замкнутой полости и численно-аналитический метод ее решения // Республиканская конференция по нелинейным задачам математической физики. Донецк, 12 - 14 сент. 1983 г.: Тез. докл. - Донецк: Ин-т прикл. математики и механики, 1983. -С. 32.

3. Карагодов В. П. Проекционно-разностный метод решения задачи о конвекции вязкой жидкости при больших числах Грасгофа // Численно-аналитические методы исследования динамики и устойчивости сложных систем. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. - С. 142-152.

4. Галицын А. С., Жуковский А. Н., Карагодов В. П. О применении метода Галеркина к решению осесимметричной задачи конвекции жидкости в замкнутом объеме. - Киев, 1985. - 48 с. - (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.40).

5. Галицын А. С., Жуковский А. Н., Карагодов В. П. Интегрирование квазилинейной системы уравнений нестационарной конвекции при сопряженном теплообмене методом Галеркина // Тез. докл. II Всесоюз. конф. "Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике", Киев, 9 - 11 сент. 1985 г. - Киев, 1985. С. 66-68.

6. Galitsin A. S., Zhukovsky A. N., Karagodov V. P. Method and results of mathematical modelling combined thermophysical processes in underground equipment containing a viscous fluid // 4-th IBMT Session, Abstracts, United Kindom. - 1985. -P. 1-7.

7. Галицын А. С., Жуковский А. Н., Карагодов В. П. Решение нелинейных задач конвекции в замкнутом объеме вязкой жидкости проекционно-разностным методом - Киев, 1987. - 44 с. - (Препринт АН УССР. Ин-т математики; 87.9).

8. Карагодов В. П. Об оценках галеркинских приближений для решений трехмерных задач конвекции вязкой несжимаемой жидкости // Специальные граничные задачи теории теплообмена. - Киев: Ин-т

математики АН УССР, 1990. - С. 41-47.

9. Карагодов В. П. Об оценках галеркинских приближений для решений некоторых задач течения вязкой несжимаемой жидкости // Тез. докл. респ. науч. конф. "Экстремальные задачи теории приближения и их приложения", Киев, 29 - 31 мая 1990 г. - Киев, 1990. - С. 69.

10. Карагодов В. П. О локальной разрешимости трехмерных задач тепловой конвекции вязкой несжимаемой жидкости. - Киев, 1991. - 17 с - (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 91.20).

Підп. до друку 21.02.94. Формат 60х84/16. Папір друк. Офс. друк. Ум. друк. арк. 1,16. Ум. фарбо-відб. 1,16. Обл.-вид. арк. 0,8
Тираж 100 пр. Зам. 43 Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики АН України
252601 Київ 4, ГСП, вул. Терещенківська, 3