МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ ІНСТИТУТ ІНЖЕНЕРІВ ЦИВІЛЬНОЇ АВІАЦІЇ

На правах рукопису

КОБА Олена Вікторівна

АНАЛІТИЧНІ І СТАТИСТИЧНІ МОДЕЛІ СИСТЕМ ОБСЛУГОВУВАННЯ ПОТОКІВ МНОЖИННИХ ЗАЯВОК

Спеціальність 05.13.01 -
Управління в технічних системах

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття вченого ступеня
кандидата технічних наук

Київ - 1994

Робота виконана в Київському інституті інженерів цивільної авіації.

Науковий керівник - доктор технічних наук, професор
Дем'янчук В.С.

Науковий консультант - академік АН України,
доктор фізико-математичних наук,
доктор технічних наук, професор
Коваленко І.М.

Офіційні опоненти - доктор технічних наук, професор
Кудиненко А.В.
- доктор технічних наук, професор
Креденцер Б.П.

Ведуча організація: Інститут програмних систем АН України.

Захист відбудеться "30" березня 1994 року о 14^{30} годині на засіданні спеціалізованої ради К 072.04.02 при Київському інституті інженерів цивільної авіації.

Адреса: 252058, Київ-58, пр.Космонавта Комарова,1, КІІЦА.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці КІІЦА.

Автореферат розісланий "28" лютого 1994 року.

Вчений секретар
спеціалізованої ради
кандидат технічних наук — Баскакова А.Г.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Однією з важливих характеристик технічних систем обслуговування і, зокрема, автоматизованих систем управління повітряним рухом (АС УПР) є їх пропускна спроможність. В цивільній авіації під пропускною спроможністю прийнято розуміти максимально можливі інтенсивності потоків повітряних суден при яких забезпечуються нормативні вимоги до безпеки польотів. В найпростішій постановці задача про пропускну спроможність системи формулюється як деяка задача теорії масового обслуговування (ТМО). Потік об'єктів, що обслуговуються, схематизується як потік однорідних подій. Визначаються такі основні поняття як канал обслуговування, час обслуговування як випадкова величина, критерій якості обслуговування (допустимий час чекання, допустима ймовірність втрати заявки і т.п.) і знаходиться зв'язок між параметрами системи і значенням критерія в залежності від інтенсивності потоку.

Проте у випадку УПР кожна заявка, в протилежність класичній ТМО, має складний характер, оскільки складається з окремих частин, кожна з яких потребує відповідного обслуговування. Така множинність обслуговування заявки характерна для процесів обслуговування в системах УПР за рахунок уриваності зняття інформації з бортів літаків. Відомі результати ТМО, в даному випадку, недостатньо відображають реальні процеси і єдиним методом дослідження подібних систем є метод статистичного моделювання. Але процес моделювання такої системи набагато складніший, ніж у випадку одиночних заявок. Тому виникає задача заміни системи зі складними заявками еквівалентною в розумінні того чи іншого критерія системою одиночних заявок. У випадку, коли еквівалентна заміна неможлива виникає необхідність в розробці зручного математичного ймовірносного апарату описання і аналізу системи масового обслуговування (СМО) з множинними заявками, а також пошук можливого спрощення формул і статистичних моделей для характеристик якості обслуговування при порівняно малих (що характерно для процесів в УПР) ймовірностях перекриття імпульсів.

Мета роботи. Розробка математичного принципу описання СМО з множинними заявками, а також методів їх статистичного моделювання для підвищення ефективності оцінок пропускної спроможності систем і засобів управління повітряним рухом на етапах їх розробки і функціонування.

Наукова новизна роботи полягає в наступному:

- розроблено комплексний підхід до розв'язання задач оцінки пропускної спроможності систем і засобів УПР на основі математичного принципу описання систем з множинними заявками;
- розроблено методи їх статистичного моделювання;
- знайдено достатні умови заміни СМО з вхідним потоком множинних заявок більш простою СМО з вхідним потоком одиночних заявок;
- формалізовано величину втрати заявці внаслідок перекриття і скоплення заявок в системі;
- виведено верхню і нижню оцінки величини втрати, розв'язано практичні приклади, які демонструють точність цих оцінок;
- виведено формули для характеристики СМО з здвоєними заявками, з'ясовано умови ергодичності цих систем;
- проведено статистичний експеримент з аналітичною перевіркою результатів (виведених автором) для системи з здвоєними заявками;
- розроблено статистичну модель СМО з множинними заявками і жорстким плануванням часу виконання операцій.

Практична цінність роботи полягає в використанні отриманих автором результатів у вигляді аналітичних і статистичних моделей, алгоритмів і програм в дослідженнях по створенню і застосуванню систем з множинними заявками. Подібні моделі характерні для систем і засобів УПР. В роботі

- виявлено можливість значного спрощення процесу моделювання СМО з множинними заявками у випадку, коли залежність функції втрати від попередніх заявок діє тільки на інтервалі часу не більшим за величину τ;
- дано схематизацію множинної заявки, СМО з потоками подібних заявок, функції втрати, що дозволяє моделювати багато систем за допомогою одного і того ж алгоритму і робити оцінки показників їх ефективності;
- для СМО з здвоєними заявками виведено формули для середнього часу чекання операцій;

- для деяких характеристик імпульсних потоків виведені формули і нерівності для середньої втрати, зв'язаної з перекриттям імпульсів, що може бути використано в практичних розрахунках пропускної спроможності системи;
- розроблено алгоритм прискореного моделювання (без моделювання потоку) для оцінки пропускної спроможності системи;
- розроблено алгоритми і програми для систем з здвоєними заявками і систем з жорстким плануванням часу обслуговування;
- виведено оцінки максимальної розмірності масивів при моделюванні систем з здвоєними заявками, що суттєво при написанні і використанні моделюючої програми.

Методи досліджень. Основні результати роботи отримані з використанням теорії ймовірностей, теорії масового обслуговування, статистичного моделювання, теорії імпульсних потоків, теорії множин. Для демонстрації і перевірки ефективності і практичності отриманих теоретичних результатів використовувалось числове моделювання.

Апробація роботи. Основні результати роботи доповідались автором в 8-ми доповідях на 6-ти науково-технічних конференціях і семінарах.

Публікації. По темі дисертації опубліковано 22 друковані роботи.

Структура і об'єм роботи. Робота складається з вступу, п'яти розділів, заключення, списку літератури (123 найменування) та двох додатків. Зміст роботи викладено на 159 сторінках машинописного тексту, вміщує 20 рисунків, 2 таблиці, 8 схем.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтовано актуальність проблеми, що розглядається, викладено наукову новизну і практичну цінність отриманих результатів, наведено короткий зміст дисертації.

В першому розділі розроблено математичну модель потоків з множинними заявками, яка основана на законі Пуассона для моментів початку груп заявок і складному характері індивідуальної групи. Запропоновано також зручний як для виводу формул так і для статистичного моделювання спосіб завдання ймовірносного закону індивідуальної множинної заявки розподілом числа x необхідних операцій, а також інтервалів (t'_k, t''_k) в яких можливе виконання операцій.

Приведемо алгоритм моделювання потоку заявок для розімкненої системи, розроблений автором. Припустимо, що $\Lambda(t)=\Lambda_{z(t)}(X,t)$ - двічі неперервно диференційована функці... Обчислимо значення її похідної в точках $t_n+kh/2$, де t_n - надходження n-ої заявки, $h>0$ - постійний крок, $k=1,2,\ldots$, і по формулі Сімпсона, використовуючи параболічну інтерполяцію в кожному інтервалі $(t_n+kh, t_n+(k+1)h)$ по крайніх і середній точкам, обчислюємо значення інтегралу

$$\Lambda_{nk}=\int_{t_n}^{t_n+kh}\lambda(t)dt.$$

А саме,

$$\Lambda_{n0}=0;\quad \Lambda_{nk}=\Lambda_{n,k-1}+\frac{h}{6}(\lambda(t_n+(k-1)h)+4\lambda(t_n+(k-\tfrac{1}{2})h)+\lambda(t_n+kh)).$$

Заздалегідь реалізуємо за допомогою давача випадкових або псевдовипадкових чисел деякі ω_n з показниковим розподілом:

$$P(\omega_n>x)=e^{-x},\ x\geq 0.$$

Для кожного k, починаючи з $k=1$, перевіряємо нерівність $\Lambda_{nk}>\omega_n$. Припустимо, що вперше вона реалізувалась для k, тобто $\Lambda_{n,k-1}\leq\omega_n$, $\Lambda_{nk}>\omega_n$. Тоді визначаємо t_{n+1} за допомогою лінійної інтерполяції:

$$t_{n+1}=t_n+(k-1)h+h(\omega_n-\Lambda_{n,k-1})/(\Lambda_{nk}-\Lambda_{n,k-1}).$$

В наведених формулах формально t_0 приймається як момент початку процесу, хоча як момент заявки t_0 не враховується.

<u>У другому розділі</u> дається аналітико-статистична оцінка ймовірностей та середніх значень, пов'язаних з перерізом випадкових складних множин (заявок).

Головна задача розділу формулюється таким чином. Нехай маємо пуассонівський потік однорідних подій-заявок. З кожною заявкою виникає випадкова множина імпульсів. Множини імпульсів різних заявок незалежні. Можливі інформаційні втрати внаслідок перекриття заявок формалізуються поняттям втрати f, що вводиться в роботі. Втрата даній заявці, - в загальному випадку, випадкова величина, що залежить від кількості інших заявок, що перетинаються з нею, і параметрів їх взаємного розміщення.

Необхідно знайти математичне сподівання величини втрати в розрахунку на одну заявку.

Для розв'язання поставленої задачі запропоновано алгоритми статистичного моделювання, які основані на розробленому автором алгоритмі протяжки однієї множини через іншу і автоматизації розрахунку лебегової міри множини зсувів, при яких має місце переріз.

Нехай задано дві числові множини $\bigcup_{i=1}^{\nu} = U(a_i, b_i)$ і $V = \bigcup_{k=1}^{\mu}(c_k, d_k)$, де $0=a_1<b_1<a_2<\ldots<b_\nu$, $0=c_1<d_1<c_2<\ldots<d_\mu$, ν, μ - натуральні числа.

"Інтервалом перерізу" множин U і V назвемо множину тих чисел τ будь-якого знаку, для яких множина U має хоча б одну точку перетину з множиною $V+\tau = \bigcup_{k=1}^{\mu}(c+\tau, d+\tau)$.

Алгоритм обчислення міри, T_{uv}, інтервалу перерізу (і.п.) полягає в наступному. Позначмо

$$\text{"і.п."} = \bigcup_{i=1}^{\nu} \bigcup_{k=1}^{\mu} \bigcup_{\tau} \{ \tau : (a_i, b_i) \cap (c_k+\tau, d_k+\tau) \neq \emptyset \} \tag{1}$$

Розглянемо будь-які задані і та k. Визначимо τ, для яких $(a_i, b_i)\cap(c_k+\tau, d_k+\tau) \neq \emptyset$. Найменше значення τ - те, при якому $(c_k+\tau, d_k+\tau)$ примикає до (a_i, b_i) зліва, найбільше - коли справа. Тоді маємо $d_k+\tau=a_i$ та $c_k+\tau=b_i$. Таким чином τ має входити до інтервалу $w_{ik}=(a_i-d_k, b_i-c_k)$. Довжина такого інтервалу для τ:

$$T_{ik}=(b_i-a_i)+(d_k-c_k). \tag{2}$$

Сумуючи (2) по всім і і k, отримаємо:

$$T_{UV} \le \mu \sum_{i=1}^{\nu}(b_i-a_i)+\nu \sum_{k=1}^{\mu}(d_k-c_k). \tag{3}$$

Якщо лебегову міру множини A позначити $|A|$, то (3) можна переписати так

$$T_{UV} \le \mu|U|+\nu|V|. \tag{4}$$

Потім пропонується алгоритм точного обчислення T_{uv}. Покладемо $\tau_{ik}=a_i-d_k$, $\tau'_{ik}=b_i-c_k$. Розглянемо множину $S = \bigcup_{i=1}^{\nu} \bigcup_{k=1}^{\mu}(\tau_{ik}, \tau'_{ik})$. Впорядкуємо ці числа, перепозначивши їх $x_1 \le x_2 \le \ldots x_{2\nu\mu}$. (Очевидно, x_1 - це якесь τ_{ik}, $x_{2\nu\mu}$ - якесь τ'_{ik}). Якщо $x_j \in (\tau_{jk})$, покладемо $w_j=1$, якщо $x_j \in (\tau'_{ik})$, то $w_j=-1$. Тоді

$$T_{UV}=\sum_{j=1}^{2\nu\mu-1}(x_{j-1}+x_j)\operatorname{sgn}\left(\sum_{i=1}^{j}w_i\right). \qquad (5)$$

В практичних випадках часто важливо знати міру інтервалу перерізу двох множин, коли початок U-імпульсу попадає всередину V-імпульсів ($T_{U/V}$) і навпаки ($T_{V/U}$). У роботі наводиться алгоритм оцінки $T_{U/V}$ і $T_{V/U}$, а кінцевий результат має вигляд:

$$T_{U/V}\le\nu|V|,\ T_{V/U}\le\mu|U|. \qquad (6)$$

Дано також алгоритм оцінки міри $T^{(\Delta)}_{U/V}$ і $T^{(\Delta)}_{V/U}$, де $T^{(\Delta)}_{U/V}$- міра множини таких τ, при яких хоча б для однієї пари (i,k) початок i-го U-імпульсу попадає або на k-ий V-імпульс, або на відстань, меншу за Δ, зліва від нього на осі часу ($T^{(\Delta)}_{V/U}$- визначається відповідно). Приймаючи практичну умову: $d_k+\Delta\le c_{k+1}$, отримано оцінки

$$T^{(\Delta)}_{U/V}\le\nu(|V|+\mu\Delta),\ T^{(\Delta)}_{V/U}\le\mu(|U|+\nu\Delta). \qquad (7)$$

Після визначення міри множини зсувів можна ставити і розв'язувати задачу про ймовірність перекриття складних випадкових множин. Розглянемо пуассонівський потік заявок з параметром λ. З кожною заявкою асоціюється випадкова множина $U=\bigcup_{i=1}^{\nu}(a_i,b_i)$, де $0=a_1<b_1<a_2<\ldots<b_\nu$. Тут величини ν,a_i,b_i- випадкові: вони визначаються загальною елементарною подією $\omega\in\Omega$, де Ω - простір елементарних подій. Елемент ω реалізується по мірі $P(A)$ на деякій σ-алгебрі подій F. Гіпотетично заважаючу заявку позначимо $V=\bigcup_{k=1}^{\mu}(c_k,d_k)$, де V випадкова множина. Ставиться задача про оцінку ймовірностей: $q=q_{UV}$, $q=q_{U/V}$, $q=q_{V/U}$, $q=q^{(\Delta)}_{U/V}$, $q=q^{(\Delta)}_{V/U}$, де q_{UV}- ймовірність перекриття хоча б одного U-імпульсу з одним V-імпульсом; $q_{U/V}$- імовірність початку хоча б одного U-імпульсу під час V-імпульсу; $q_{V/U}$- імовірність початку хоча б одного V-імпульсу під час U-імпульсу; $q^{(\Delta)}_{U/V}$ ($q^{(\Delta)}_{V/U}$) - те саме, що і $q_{U/V}$ ($q_{V/U}$), але з врахуванням продовження на час Δ.

В работі отримано такі оцінки:

$q_{UV}\le\lambda MT_{UV}$; $q_{U/V}\le\lambda MT_{U/V}$; $q_{V/U}=\lambda MT_{V/U}$; $q^{(\Delta)}_{U/V}\le\lambda MT^{(\Delta)}_{U/V}$; $q^{(\Delta)}_{V/U}\le\lambda MT^{(\Delta)}_{V/U}$;

Потім в розділі викладено розв'язання задачі про знаходження верхньої та нижньої оцінки математичного сподівання величини втрати. Позначимо

$$\zeta=f(U,\{V_i\}) \qquad (8)$$

випадкову величину втрати заявці з множиною U, що визначається сукупною дією всіх множин V_1, що перерізаються з U; $f^* < \infty$ – максимальне можливе значення втрати. В розділі наведено алгоритм визначення оцінки (8), який основано на алгоритмі протяжки однієї множини через іншу і визначенні міри множини зсувів (5). Кінцевий результат такий:

$$M\xi \le \lambda \int\limits_{\langle \tau : U \cap (\bar{V}+\tau) \neq \emptyset \rangle} f_\tau d\tau + f^* \lambda^2 M(T_{uv} T_{uv'}), \quad f_\tau = f(U, V+\tau). \qquad (9)$$

Для визначення точності (9) виводиться нижня оцінка $M\xi$. Її вивід грунтується на властивостях потоку Пуассона про функцію розподілу часу між моментами заявок і властивості монотонності функціоналу f. А саме, припускається, що кожна нова заявка, що заважає даній заявці, може лише збільшити величину втрати. Нижня оцінка має вигляд

$$M\xi \ge \lambda M \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|\tau|} f_\tau d\tau - f^* \lambda^2 M(T_{UV} T_{UV'}) \qquad (10)$$

Таким чином, (9) і (10) оцінюють $M\xi$ з двох сторін, що дозволяє судити про точність оцінки.

У цьому ж розділі, застосовуючи розроблену методику, розроблено моделі функціонування систем і засобів УПР. Проведено числове моделювання.

<u>У третьому розділі</u> виявлено можливість значного спрощення процесу моделювання СМО з множинними заявками у випадку, коли залежність функції втрати від попередніх заявок діє тільки на інтервалі часу, не більшим за величину τ. У цьому випадку можлива заміна системи з складними заявками еквівалентною системою одиночних заявок.

На початку розділу дається означення систем з τ-обмеженою післядією. Нехай маємо СМО, яка характеризується процесом $W(t)$ як оператором від вхідного потоку $X(t)$. Позначмо $L_x[W]$ закон розподілу випадкового процесу $W(t)$ при заданій траєкторії процесу $X(t)$.

Означення. СМО назвемо системою з τ-обмеженою післядією, якщо для будь-яких траєкторій $X_1(t)$ і $X_2(t)$ процесу $X(t)$, які співпадають при $t_0-\tau \le t \le t_1$, має місце рівність $L_{X_1}[W] = L_{X_2}[W]$ для скінченновимірних розподілів, що відносяться до значень процесу $W(t)$ на відрізку $t_0 \le t \le t_1$.

Потім розглядаються СМО з нескінченним числом каналів, які обслуговують пуассонівський потік незв'язних імпульсів. А саме, потік кодується послідовністю (t_n, η_n), де t_n - момент надходження n-ої заявки (початок n-го імпульсу), η_n - довжина n-го імпульсу (час обслуговування n-ої заявки). Для такої системи формулюється і доводиться

Теорема 1. Нехай $\eta_n \le \tau$ з імовірністю одиниця. Тоді дана СМО є системою з τ-обмеженою післядією.

Далі ставиться і розв'язується основна задача розділу. Нехай маємо потік незв'язних множинних імпульсів. Для нього $W(t)$ має якийсь розподіл $L[W(t)]$. Чи можна підібрати еквівалентний потік одиночних імпульсів, при якому $L[W(t)]$ залишається незмінним?

Для розв'язання поставленої задачі визначаються скінченновимірні розподіли імпульсного потоку і вводиться поняття τ-еквівалентних потоків.

Означення. Два імпульсних потоки, скінченновимірні розподіли яких співпадають на інтервалах довжини, меншої або рівної τ, назвемо τ-еквівалентними.

Задача, поставлена вище, розв'язується за допомогою сформульованої і доведеної автором теореми про τ-еквівалентність потоку множинних імпульсів та потоку одиночних імпульсів.

Теорема 2. Нехай X - пуассонівський з параметром λ стаціонарний потік множинних імпульсів. В кожному множинному імпульсі - випадкова кількість ν одиночних імпульсів зі скінченним математичним сподіванням $\bar{\nu}$. Одиночні імпульси починаються через інтервали, більші за $\tau+\tau_1$, а час існування кожного одиночного імпульсу $\le\tau_1$.

При даних умовах потік X τ-еквівалентний пуассонівському потоку з параметром $\lambda\bar{\nu}$ одиночних імпульсів. Функція розподілу $B(t)$ пов'язана з характеристиками потоку X формулою:

$$B(t)=\frac{1}{\bar{\nu}}\sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu (B_{\nu 1}(t)+B_{\nu 2}(t)+\ldots+B_{\nu\nu}(t)),$$

де p_ν - імовірність даного значення ν; $B_{\nu k}(t)$ - функція розподілу довжини k-го одиночного імпульсу в множинному імпульсі, що складається з ν одиночних імпульсів.

<u>В четвертому розділі</u> розглянуто системи зі здвоєними заявками.

Функціонування системи описується таким чином. В одноканальну СМО надходить пуассонівський з параметром λ потік заявок. Кожна заявка потребує дві операції обслуговування постійної тривалості τ, але друга операція може початися не раніше, ніж закінчиться перша і не раніше, ніж через час $\tau+\Delta$ після надходження заявки. Як тільки заявка надійшла, диспетчер планує час як для першої, так і для другої операції, виходячи з вищезазначеної умови. Подрібнення виконання операцій заборонено

При дослідженні системи було визначено умову ергодичності, функцію розподілу часу чекання здвоєної заявки, середній час чекання першої і другої операції. Було проведено статистичне моделювання функціонування системи.

Умова ергодичності визначається сформульованими і доведеними автором теоремами.

Теорема 3. При $2\lambda\tau\geq1$ сумарний час чекання $w_1^{(n)}+w_2^{(n)}$ першої і другої операції n-ої заявки прямує до нескінченності за ймовірністю при $n \to \infty$.

Теорема 4. При $2\lambda\tau<1$ випадковий вектор $(w_1^{(n)},w_2^{(n)})$ має ергодичний розподіл.

Доведення обох теорем проводиться за індукцією за допомогою паралельного розгляду вищезазначеної системи і системи $M|D|1$ з пуассонівським тієї ж інтенсивності потоком і часом обслуговування 2τ.

Після з'ясування умови ергодичності можна ставити питання про знаходження функції розподілу часу чекання для першої і другої операції здвоєної заявки. Розглянемо випадок $\Delta<\tau$.

Аналіз розподілу часу чекання заявки вівся за допомогою віртуального часу чекання (метод, розроблений Такачем) Нехай $F(t)$ - функція розподілу віртуального часу чекання системи. Тоді автор виводить рівняння:

$$F'(z)-\lambda F(z)+F(z-2\tau)=0 \text{ при } z\geq2\tau+\Delta, \qquad (11)$$

$$F'(z)-\lambda F(z)=0 \qquad \text{при } 0<z<2\tau+\Delta. \qquad (12)$$

Розв'язуючи (12), маємо $F(z)=(1-2\tau\lambda)e^{\lambda(z-\Delta)}$ при $0\leq z\leq2\tau+\Delta$. Тоді середній час чекання здвоєної заявки:

$$a = \frac{2\tau^2\lambda}{1-2\tau\lambda} + \Delta - \frac{1-2\tau\lambda}{\lambda}(1-e^{-\lambda\Delta}) \qquad (13)$$

У випадку $\Delta=0$ (13) перетворюється у відому формулу Хінчина.

Для функції розподілу часу чекання першої $F_1(x)$ і другої $F_2(x)$ операції можемо записати

$$F_1(z)=P(w_1<z)=F(z), \qquad (14)$$

$$F_2(z)=P(w_2<z)=P(w<z+\Delta)=F(z+\Delta) \qquad (15)$$

при $z>0$.

Тоді середній час чекання, на основі формул (14) і (15), дорівнює

$$Mw_1 = Mw = \frac{2\tau^2\lambda}{1-2\tau\lambda} + \Delta - \frac{1-2\tau\lambda}{\lambda}(1-e^{-\lambda\Delta}). \qquad (16)$$

$$Mw_2 = \int_{\Delta}^{\infty}(x-\Delta)dF(x) = \frac{2\tau^2\lambda}{1-2\tau\lambda} \qquad (17)$$

У випадку $\Delta\geq\tau$ було застосовано статистичне моделювання. Алгоритм моделювання складний, але по своїй суті побудований на двох процедурах: розміщення і злиття. Процедура розміщення визначає момент розміщення операції відносно вже існуючих зайнятих інтервалів, а процедура злиття зливає фактично зайняті інтервали між якими вільні інтервали менші, ніж τ.

Для резервування пам'яті виведено оцінку розмірності масивів $a_1, a_2, \ldots, a_l$; $b_1, b_2, \ldots, b_l$, де (a_i, b_i), $i=1,\ldots,l$ - інтервали зайнятості. При цьому $l=d$, коли l - кількість інтервалів зайнятості в момент надходження заявки, $l=d^+$, $l=d^{++}$, коли l - кількість інтервалів зайнятості в момент закінчення першої і другої операції відповідно. Оцінка має вигляд:

$$\left.\begin{array}{c} d \\ d^+ \\ d^{++} \end{array}\right\} \leq \left[\frac{\Delta}{2\tau}\right]+2. \qquad (18)$$

Як показник ефективності системи визначався час чекання першої і другої операції.

При $\Delta\geq\tau$ була досліджена залежність середнього часу чекання першої і другої операції від величини зазору і інтенсивності вхідного потоку. Для кожного $\lambda=0.1$; 0.2; 0.3; 0.4 і кожного Δ від 1 до 20 з кроком 0.2 було проведено 10 реалізацій по 1000 заявок в кожній. Загальна тенденція отриманих залежностей така. До моменту $\Delta=\tau$ час чекання першої операції зростає, другої - залишається практично постійним. Після моменту $\Delta=\tau$ різко зменшується час чекання як першої, так і другої операції. Потім для першої операції час чекання починає зростати, для другої - спадати, кожний повільно прямуючи до своєї практично постійної величини.

У випадку $\Delta<\tau$ теж було проведено статистичне моделювання, але по більш простому алгоритму. При порівнянні аналітичних результатів (16), (17) і результатів статистичного моделювання відносна похибка роботи програми не менша 1.12% і не більша 4.67%.

В останньому параграфі розділу проаналізовано розподіл віртуального часу чекання здвоєної заявки.

Для функцій $F(2k\tau+\Delta+x)=F_k(x)$ розглядаємо $u(z,x)=\sum_{k=0}^{\infty} z^k F_k(x)$, $|z|<1$, і виводимо формулу

$$u(z,x) = \frac{(1-\rho)e^{\lambda(1-z)}}{1-ze^{(1-z)\rho}}, \qquad 0<x<2\tau. \qquad (19)$$

Розкладаючи (19) по степенях z, отримаємо $F_k(x)$ як коефіцієнт при z^k:

$$F_0(x)=(1-\rho)e^{\lambda x},\quad F_1(x)=(1-\rho)e^{\lambda x}(e^{\rho}-\lambda x),$$

$$F_2(x) = (1-\rho)e^{\lambda x}(e^{2\rho}\rho-\lambda xe^{\rho} + \frac{\lambda^2 x}{2}), \text{ і т.д.}$$

Тут всюди $0<x<2\tau$. Або, роблячи зсув аргументу, маємо:

$$F(x)=(1-\rho)e^{\lambda(x-\Delta)},\quad 0<x\le 2\tau+\Delta,$$

$$F(x)=(1-\rho)e^{\lambda(x-2\tau-\Delta)}(e^{\rho}-\lambda(x-2\tau-\Delta)),\quad 2\tau+\Delta\le x\le 4\tau+\Delta, \qquad (20)$$

$$F(x)=(1-\rho)e^{\lambda(x-4\tau-\Delta)}(e^{2\rho}-e^{\rho}\rho-\lambda(x-4\tau-\Delta)e^{\rho}+ \frac{\lambda^2(x-4\tau-\Delta)^2}{2}),$$
$$4\tau+\Delta\le x\le 6\tau+\Delta,$$

і т.д.

Для перетворення Лапласа $\varphi(s)$ функції розподілу $F(x)$ маємо:

$$\varphi(s)= \frac{(1-\rho)e^{-s\Delta}}{1- \frac{\lambda}{s}(1-e^{-2\tau s})} + (1-\rho)\frac{s}{\lambda-s}(e^{-s\Delta}-e^{-\lambda\Delta}). \qquad (21)$$

<u>У п'ятому розділі</u> досліджуються системи масового обслуговування жорсткого планування з множинними заявками методом статистичного моделювання.

Постановка задачі така. На обслуговуючий канал надходить пуассонівський потік заявок з параметром λ. Кожна заявка має пройти $\varkappa$ операцій обслуговування на одному й тому ж каналі. Час, необхідний для k-ої операції j-ої заявки, позначимо η_{jk}. Вважаємо, що всі η_{jk} - незалежні випадкові величини з функцією розподілу $B_k(t)$. Від моменту надходження заявки як від початку відліку розглядається інтервал, в якому можливе виконання k-ої операції j-оі заявки, позначимо його (t'_{jk}, t''_{jk}). В загальному випадку ці інтервали можуть перекриватися навіть при одному і тому ж j, але $t'_{jk} \le t'_{j,k+1}$. Задається сумісна функція розподілу $C(t'_1, t''_1, \ldots, t'_{æ}, t''_{æ})$ випадкового вектора $(t'_1, t''_1, \ldots, t'_{æ}, t''_{æ})$.

Приймаються обмеження, які названі умовою жорсткого планування. В момент надходження j-оі заявки відомі $\eta_{jk}, t'_{jk}, t''_{jk}$, $1 \le k \le æ$, і час обслуговування кожної операції планується таким чином, що використовується тільки ті інтервали часу, які вільні від обслуговування j-1-оі і більш ранніх заявок. Перша операція займає крайнє ліве положення на осі часу з врахуванням обмеження (t'_{jk}, t''_{jk}), друга - саме ліве положення з врахуванням обмеження $(t'_{j,k+1}, t''_{j,k+1})$, але тільки після закінчення (або переривання через нестачу часу) першої операції і т.д. Допускається поділ часу виконання операції.

Задача полягає в визначенні стаціонарних показників ефективності системи масового обслуговування, а саме:

$q_0^{(k)}$ - імовірність неповного виконання k-оі операції випадково вибраної заявки;

$\bar{q}_0$ - імовірність неповного виконання випадково вибраної операції;

$q_{æm}$ - імовірність того, що по випадково вибраній заявці буде не повністю виконано m або більше операцій;

$\bar{v}$ - середній сумарний час перебування в системі однієї заявки;

$q_{\varepsilon}^{(k)}$ - при заданому ε $(0<\varepsilon<1)$, імовірність того, що з потрібного часу η_{jk} обслуговування k-оі операції випадкової заявки буде загублено хоча б $\varepsilon\eta_{jk}$ часу;

$\bar{q}_{\varepsilon}$ - імовірність того, що сумарний ступінь недообслуговування випадково вибраної заявки буде не менше $100\varepsilon\%$;

$\bar{w}$ - середні витрати часу по операціях випадково вибраної заявки, не враховуючи фактичного часу обслуговування;

p_0 - імовірність вільного стану СМО.

Назвемо вільним станом системи такий стан, коли всі заявки, що раніше надійшли, вже обслужені.

Періодом зайнятості системи назвемо інтервал від моменту виходу з вільного стану до моменту повернення в нього.

Час, зайнятий на попередні, все ще не обслужені заявки до моменту надходження даної заявки, назвемо зайнятим інтервалом.

Визначимо величини, що характеризують поточний стан СМО: δ_j^- - число зайнятих інтервалів часу в момент надходження j-ої заявки в межах даного періоду зайнятості; $(\tau'^-_{jk},\tau''^-_{jk})$ - k-ий зайнятий інтервал, відрахований з моменту надходження j-ої заявки; δ_j^+ - те саме, що і $(\tau'^-_{jk},\tau''^-_{jk})$, але після виділення часу на обслуговування j-ої заявки.

Ведемо ще величини: T_i - довжина i-го періоду зайнятості; ν_i - число заявок, що надійшли під час i-го періоду заяйнятості.

В роботі викладено алгоритм послідовної реалізації періодів зайнятості. За допомогою цього алгоритму, крім T_i та ν_i, обчислюються такі величини:

$n_{io}^{(k)}$- число заявок i-го періоду зайнятості,по кожній з якоі k-та операція не виконана повністю;

n_{io} - загальне число не повністю виконаних операцій по заявкам i-го періоду зайнятості;

$n_{i,\varkappa,m}$- загальне число заявок i-го періоду зайнятості, по кожній з яких не повністю виконано m і більше операцій;

V_i - загальний час перебування в системі заявок i-го періоду зайнятості;

$n_{i,\varepsilon}^{(k)}$ - число заявок i-го періоду зайнятості по кожній з яких k-та операція не виконана хоча б на 100ε%;

$\bar{n}_{i,\varepsilon}$ - число заявок i-го періоду зайнятості, по яких сумарне недовиконання операціі складає не мечше 100ε%;

w_i - сумарні невиробничі витрати часу по заявках i-го періоду зайнятості.

Реалізуючи N періодів зайнятості, (1≤i≤N), з регенеративності процесу, що моделюється, можна отримати такі оцінки:

$$q_o^{(k)}\approx\sum_{i=1}^{N}n_{io}^{(k)}/\sum_{i=1}^{N}\nu_i,\ \bar{q}_o\approx\frac{1}{\varkappa}\sum_{k=1}^{\varkappa}q_o^{(k)},\ q_{\varkappa m}\approx\sum_{i=1}^{N}n_{i,\varkappa,m}/\sum_{i=1}^{N}\nu_i,$$

$$\bar{v}\approx\sum_{i=1}^{N}V_i/\sum_{i=1}^{N}\nu_i,\quad q_\varepsilon^{(k)}\approx\sum_{i=1}^{N}n_{i,\varepsilon}^{(k)}/\sum_{i=1}^{N}\nu_i,\tag{22}$$

$$\bar{q}_\varepsilon\approx\sum_{i=1}^{N}\bar{n}_{i,\varepsilon}/\sum_{i=1}^{N}\nu_i,\ W\approx\sum_{i=1}^{N}w_i/\sum_{i=1}^{N}\nu_i,\ p_o\approx 1/(1+\lambda\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}T_i).$$

Для описання процесу послідовного планування обслуговування заявок на одному періоді заяйнятості було розроблено алгоритм моделювання поточного стану системи, виведено початкові умови моделювання, розрахункові формули для переходу від m-1-ої операції до m-ої операції, умови недовиконання операцій. Тут же змодельовано прийняття рішення про кількість заявок на періоді зайнятості і визначено тривалість періоду зайнятості.

<u>В заключенні</u> наведено основні результати роботи.

<u>Додатки</u> містять в собі документи, які підтверджують практичне використання розроблених методик, алгоритмів і програм, а також тексти програм.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ

Практика досліджень в галузі ефективності АС УПР, в тому числі автора дисертації, показала, що відомі результати теорії масового обслуговування часто грубо відображує реальні процеси, що досліджуються, і єдиним методом розрахунку ефективності системи масового обслуговування такої складної природи є метод статистичного моделювання. Проте громіздкість алгоритмів, що моделюються, безконтрольність точності, можливість методичних помилок в програмі часто роблять моделювання неефективним. Все це характерно для моделювання процесів УПР.

В даній роботі

- розроблено принципи моделювання потоків з множинними заявками;
- розроблено принципи зведення класу задач ефективності інформаційних СМО до схеми втрати, що зв'язана з перекриттям складних випадкових заявок;
- виведено точні формули і нерівності для розрахунку і оцінки середньої втрати, що срощують практичні розрахунки;
- розроблено алгоритм прискореного статистичного моделювання (без моделювання вхідного потоку) для оцінки показників ефективності системи;
- виявлено можливість аналітичного обчислення характеристик СМО з множинними заявками при деяких спрощеннях;
- на основі т-залежного потоку досліджено можливість заміни СМО

з множинними заявками еквівалентною СМО з одиночними заявками;
- для СМО з здвоєними заявками виведено формули для середнього часу чекання операцій і функції розподілу часу чекання заявки, виведено також умову ергодичності;
- розроблено і реалізовано алгоритм статистичного моделювання системи з здвоєними заявками, обчислено показники ефективності;
- досліджено питання точності оцінок статистичного моделювання для визначення практичної придатності розроблених алгоритмів;
- виведено оцінку розмірності масивів, які використовуються при моделюванні системи з здвоєними заявками;
- розроблено алгоритм статистичного моделювання СМО з множинними заявками, яка працює в режимі жорсткого планування.

ОСНОВНІ З ДРУКОВАНИХ РОБІТ:

1. Коба Е.В. О моделировании некоторых систем обслуживания со сложными заявками // Кибернетика и системный анализ, Киев, Институт кибернетики АН Украины, 1993, №2.
2. Koba E.V. On the simulation of queueing systems with multiple calls // Доповіді АН України, Київ, 1993, №5.
3. Коба Е.В. Оценка вероятности наложения сигналов бортовых ответчиков методом статистического моделирования // Повышение эффективности автоматизированных систем управления, Киев, КИИГА, 1992.
4. Демьянчук В.С., Коба Е.В. и др. Автоматизированные системы управления воздушным движением. Оценка надежности радиоэлектронных средств АС УВД в процессе испытания и эксплуатации // Отраслевой стандарт. Система стандартов на АС УВД, ОСТ 54 71006-86, МГА, 1987.
5. Демьянчук В.С., Коба Е.В. Об оценке эффективности многопозиционных радиопеленгационных систем управления воздушным движением. // Авиационные тренажеры и системы управления воздушным движением, Киев, КИИГА, 1989.
6. Демьянчук В.С., Коба Е.В. Анализ распределенных систем обработки информации в АС УВД. // Прикладные вопросы надежности аппаратурного и программного обеспечения вычислительных систем,

Киев, КИИГА, 1985.
7. Демьянчук В.С., Коба Е.В. Принципы построения автоматизированных систем управления воздушным движением в нижнем воздушном пространстве. // Тезисы докладов Всесоюзной научно-технической конференции "Статистические методы в теории передачи и преобразования информационных сигналов", Киев, 1988.
8. Демьянчук В.С., Коба Е.В. Аналитико-статистическая модель прогнозирования эксплуатационных показателей радиоэлектронных средств и систем УВД. // Тезисы докладов Всесоюзной научно-технической конференции "Статистические методы в теории передачи и преобразования информационных сигналов", Киев, 1985.
9. Коба Е.В. О влиянии законов распределения на характеристики обслуживания потоков воздушных судов в системах УВД. // Тезисы докладов Второй Всесоюзной конференции "Управление воздушным движением", Москва, 1983.

Підписано до друку II.02.94. Формат 60х84/I6. Папір друкарський. Офсетний друк. Ум.фарбовідб.5. Ум.друк.арк.0,93.Обл.-вид.арк.I,0. Тираж 90 прим. Ціна . Вид. № 40/Ш. Замовл.- 40-I

Видавництво КІЇЦА.
252058. Київ-58, проспект Космонавта Комарова,1