

Дніпропетровський державний університет

На правах рукопису

Маневич Еліна Леонідівна

Асимптотичні методи у теорії підкріплених пластин  
(вплив граничних умов).

01.02.04 - механіка деформівного твердого тіла

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата фізико-математичних наук.

Дніпропетровськ - 1994

AB 29.202

Дисертація є рукопис.

Робота виконана у Відділенні фізико-технічних проблем транспорту на надпровідних магнітах Інституту геотехнічної механіки АН України.

Науковий керівник - академік АН України, доктор фізико-математичних наук, професор Мосаковський В.І.

Офіційні опоненти:

професор,

доктор технічних наук Заруцький В.О.

доктор фізико-математичних наук, професор Павленко А.В.

Провідна організація - Запорізький державний університет.

Захист відбудеться " 18 " Березня 1994р. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 053 24.05 при Дніпропетровському державному університеті (м.Дніпропетровськ, пр.К.Маркса, 35, ДДУ, корпус 3).

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Дніпропетровського державного університету (м.Дніпропетровськ, вул.Казакова, 8)

Автореферат розісланий 10 лютого 1994р.

ЛНБ України ім.В.Стефаніка



00756707 (W)

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради, кандидат технічних наук, доцент

*Костирко*

Костирко В.В.

ЛНБ ім. В. Стефаніка  
АН України

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми.

Пластинчаті конструкції, які підкріплені ребрами жорсткості, знайшли широке застосування у різних галузях техніки - машинобудуванні, будівництві та ін.

Основи теорії розрахунку підкріплених тонкостінних конструкцій було закладено у роботах С.П.Тимошенка, Ф.Блейха, Флінге, В.З.Власова. Досягнення сучасної теорії стійкості підкріплених пластинчатих конструкцій зв'язані з дослідженнями С.А.Амбарцумяна, Д.В.Вайнберга, В.О.Заруцького, В.В.Кабанова, В.Т.Койтера, А.Нейта та ін.

Проте практично усі роботи, присвячені дослідженню стійкості періодично підкріплених пластин з урахуванням дискретності розміщення ребер жорсткості, відносяться до випадку шарнірного опирання навантажених кінців. Це викликано не тим, що такі граничні умови найбільш часто зустрічаються на практиці. Як правило, реальні конструкції знаходяться в умовах, більш близьких до зацімлення. Але граничні умови шарнірного опирання різко виділяються своєю простотою, оскільки у цьому випадку кінцеву пластину можна розглядати як частину нескінченно довгої та фактично замінити граничні умови умовами періодичності. При зміні граничних умов проблема стає суттєво крайовою.

Тому виявляється необхідним аналіз впливу граничних умов, відповідних до навантажених кінців, на стійкість періодично підкріплених пластин. Однак при цьому, як показали дослідження шарнірно опертих пластин, необхідний комплексний облік дискретності розміщення ребер та їх ексцентриситету відносно обшивки. При такому розташуванні ребер поряд з деформацією вигину виникає додаткова мембранна деформація, неврахування якої може привести до значних похибок.

Є ще один важливий аспект проблеми. У багатьох випадках лінійна теорія може виявитися недостатньою. Як показали теоретичні та експериментальні дослідження, для конструкцій, у яких критичні зусилля різних форм випинання близькі між собою, суттєво проявляється взаємодія таких форм у закритичній стадії, що може якісно змінити поведінку конструкції.

Ця проблема була об'єктом досліджень у останні роки, однак

зя їх рамками залишилось вивчення граничних умов, відмінних від шпирного опирання.

Таким чином, аналіз впливу граничних умов на критичні зусилля, форми втрати стійкості та граничні навантаження реальних дискретно підкріплених односторонніми ребрами пластин є актуальною проблемою.

#### Мета роботи.

- розробка схеми методу збурення граничних умов, який використовує у ролі малого параметра жорсткість пружного закріплення границі і його застосування до лінійної та нелінійної задач стійкості при пружному закріпленні навантажених кінців пластини,
- аналіз впливу граничних умов при кінцевих переміщеннях на граничні навантаження та рівноважні вітки зв'язаної форми втрати стійкості,
- розробка схеми асимптотичного методу з використанням малих параметрів, відбиваючих характерні для реальних конструкцій геометрико-жорсткісні співвідношення,
- одержання на цій підставі аналітичних рішень, які визначають критичні навантаження та форми втрати стійкості при основних типах граничних умов,
- розробка схеми методу збурення граничних умов щодо плоских задач теорії пружності, який використовує у ролі нульового наближення рішення відповідної задачі теорії потенціалу, та його застосування до задачі про передачу навантаження від неінерескінченного стрингера, який розтягнений, до пружної півплощини при пружному закріпленні границі.

Практична цінність роботи визначається можливістю оцінити на її основі вплив граничних умов для дискретно ексцентрічно підкріплених пластин, що широко використовуються у різних галузях техніки, у лінійній та нелінійній постановках.

Достовірність результатів підтверджується коректністю постановки задачі, суворістю математичного апарату, а також:

- дослідженням можливих граничних випадків,
- порівнянням результатів, одержаних у рамках різних асимптотичних методів,
- порівнянням з результатами інших авторів,
- апробацією методик на задачах, точне рішення яких може бути одержане, та аналізом похибок отриманих результатів.

### Методика дослідження.

Дослідження впливу граничних умов здійснюється за допомогою двох асимптотичних методів. Перший метод - збурення граничних умов - використовує у ролі малого параметра жорсткість пружного закріплення навантажених кінців пластини таким чином, що шарнірне опирання та зацімлення виявляються граничними випадками, які відповідають мінімальному та максимальному значенням коефіцієнта пружного закріплення границь. У плоских задачах такими граничними випадками є відсутність на границі поперечних зміщень та відсутність дотичних напруг.

Другий підхід у ролі малого параметра використовує відношення відстані між ребрами до характерного розміру пластини (чи обернену величину) з урахуванням реального відношення інших геометрико-жорсткостних параметрів. Навантажені кінці припускаються шарнірно опертими або жорстко затисненими.

### Наукова новизна.

Стосовно до загальної та місцевої форм втрати стійкості стиснутих періодично підкріплених у напрямку навантаження пластин розвинуто схему методу збурення граничних умов, який дозволяє одержати рішення задачі стійкості при пружному закріпленні навантажених кінців. Застосування апроксимації Паде до одержаного відрізку асимптотичного ряду дозволило розширити область його застосування аж до нескінченної жорсткості пружного закріплення.

На підставі цього проведено аналіз впливу граничних умов на граничні навантаження та рівноважні вітки зв'язаної форми втрати стійкості у першому асимптотичному наближенні за методом В.Т.Койтера.

Розроблено схему асимптотичного методу, який використовує характерні для реальних конструкцій малі параметри, та одержано аналітичне рішення задачі стійкості стиснутої підкріпленої пластини при шарнірному опиранні та зацімленні навантажених кінців без рішення відповідних характеристичних рівнянь.

Стосовно до плоских задач теорії пружності розроблено схему методу збурення граничних умов, яка використовує за незбурене рішення відповідної задачі теорії потенціалу, та одержано аналітичне рішення задачі про передачу навантаження від напівнескінченного стрингера, який розтягнений, до пружної півплощини.

Основні положення, що подаються до вахисту.

- аналітичне рішення задачі стійкості стиснутої періодично підкріпленої пластини при пружному закріпленні навантажених кінців з використанням методу збурення граничних умов,
- асимптотичне рішення задачі стійкості стиснутої періодично підкріпленої пластини з урахуванням малості геометрико-жорсткостних параметрів пластини при основних типах граничних умов без рішення відповідних характеристичних рівнянь,
- розв'язання задачі про зв'язану втрату стійкості у першому асимптотичному наближенні при кінцевих переміщеннях з урахуванням однієї загальної та однієї місцевої форм втрати стійкості за методом В.Т.Койтера при пружному закріпленні навантажених кінців пластини,
- аналітичне рішення задачі про взаємодію напівнескінченного стрингера, який розтягнений, з пружною півплощиною з використанням у ролі нульового наближення рішення відповідної задачі теорії потенціалу.

Апробація роботи. Основні результати дисертації викладені у 4 друкованих роботах та доповідались на семінарах під керівництвом акад. АН України В.І. Мосаковського (Дніпропетровськ, 1990, 1991), на I Українсько-Польському семінарі по механіці матеріалів та конструкції (Дніпропетровськ, 1993), на семінарі кафедри обчислювальної механіки та міцності конструкцій Дніпропетровського держуніверситету (1993), на семінарі відділу будівельної механіки тонкостінних конструкцій під керівництвом д.т.н. Заруцького В.О. (Київ, Інститут механіки АН України, 1993), на V конференції "Оболонкові конструкції: теорія та додатки" (Яновице, 1992)

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається з вступу, 6 глав, висновків, списку літератури і додатку. Загальний обсяг роботи 197 стор., у тому складі 15 стор. списку літератури, 12 стор. додатку, 34 стор. рисунків та 10 таблиць.

**ЗМІСТ РОБОТИ.**

У вступі наведено огляд досліджень С.П.Тимошенка, Ф.Блейха, І.Ф.Образцова, С.А.Амбарцумяна, Д.В.Вайнберга, В.О.Заруцького та ін., присвячених стійкості підкріплених пластин та застосуванню асимптотичних методів. Показано актуальність та практичну цін-

ність обраної теми. Дано опис методів, які використані при дослідженні впливу граничних умов на стійкість стиснутих періодично підкріплених пластин у лінійній та нелінійній постановках. Сформульовано мету роботи.

Першу главу присвячено розробці схеми методу збурення граничних умов стосовно до плоских задач теорії пружності. Оскільки клас задач теорії потенціалу, які точно вирішуються, суттєво ширший, запропоновано за незбурене обирати рішення відповідної задачі теорії потенціалу. Такі задачі можна одержати у тих випадках, коли вдається сформулювати незалежні граничні умови для функцій  $u = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$  та  $\sigma = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$ . Це має місце для двох типів граничних умов (при  $y=0$ ):

$$1. \quad \sigma_{22} = f_1(x), \quad u = f_2(x) \quad (1)$$

$$2. \quad \sigma_{12} = f_1(x), \quad v = f_2(x)$$

Найбільш же часто на границі пружної півплощини задаються умови:

$$\sigma_{22} = f_1(x), \quad \sigma_{12} = f_2(x) \quad (2)$$

Розглядаючи узагальнені граничні умови

$$\sigma_{22} = f_1(x)$$

$$\mu_1(1-\epsilon)u + \epsilon\sigma_{12} = f_2(x), \quad (3)$$

де  $0 \leq \epsilon \leq 1$ , при  $\epsilon=0$  маємо граничні умови задачі, яка може бути зведена до задачі теорії потенціалу. Якщо  $\epsilon=1$ , одержуємо задані граничні умови. Випадок  $0 < \epsilon < 1$  відповідає пружному закріпленню границі у поперечному напрямку. Розглядаючи величину  $\epsilon$  як малий параметр, будемо відповідні асимптотичні розкладання.

Для ілюстрації ефективності методу розглянуто найпростіший випадок першої основної задачі теорії пружності, який припускає точне рішення – задача про дів гармонічного навантаження на пружну півплощину. Показано, що розкладання точного рішення в ряд по параметру  $\epsilon$  співпадає з асимптотичним рішенням.

З використанням методу збурення граничних умов розв'язано задачу про передачу навантаження від напівнескінченного стрингера, який розтягнений, до пружної півплощини. Надано огляд досліджень Попова Г.Я., Арутюняна М.Х., Абрамяна Б.Л., Тихоненко Л.Я., Р.Муки, Є.Стернберга та ін., присвячених даній темі. У граничному випадку півплощини, навантаженої зосередженою силою, асимптотичне рішення, одержане з урахуванням перших трьох наближень, добре

узгоджується з точним. Досліджено характер особливості контактних напружень. Він не залежить від жорсткості закріплення границі при кінцевій її величині та відповідає випадку границі, вільної від напруги.

Друга глава присвячена застосуванню методу збурення граничних умов до задачі стійкості періодично підкріпленої повздовжними ребрами стиснутої пластини (мал.1). У зв'язку з періодичністю підкріплення розглядається ділянка пластини між ребрами. На навантажених кінцях прийняті наступні граничні умови:

$$w=0$$

$$(1-\epsilon)w_{,xx} = \pm \epsilon / L w_{,x}, \quad (4)$$

де знак "+" відповідає верхньому, "-" - нижньому кінцю. Тоді при  $\epsilon=0$  одержуємо задачу стійкості при шарнірному опиранні навантажених кінців (яка служить нульовим наближенням),  $\epsilon=1$  - при їх зацімленні. Випадок  $0 < \epsilon < 1$  відповідає пружному закріпленню границь.

В даній главі у лінійній постановці розглянуто загальну форму втрати стійкості, яка характеризується симетрією прогинів пластини відносно кожного з ребер жорсткості, причому ребра випинаються у своїй площині. При такій постановці описується деформація пластини між ребрами.

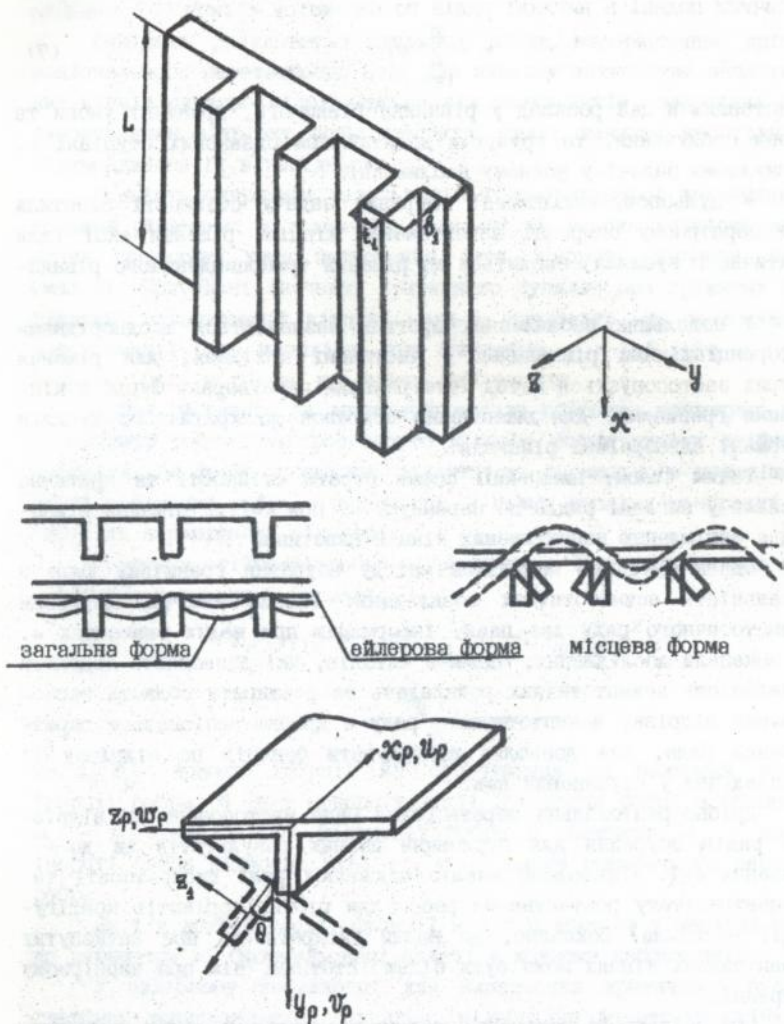
При ексцентричному розміщенні ребер необхідним є урахування мембранної деформації, тому рівняння стійкості мають вигляд:

$$u_{,\xi\xi} + \frac{1-\nu}{2} u_{,\eta\eta} + \frac{1+\nu}{2} v_{,\xi\eta} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{1+\nu}{2} u_{,\xi\eta} + \frac{1-\nu}{2} v_{,\xi\xi} + v_{,\eta\eta} = 0$$

$$w_{,\xi\xi\xi\xi} + 2w_{,\xi\xi\eta\eta} + w_{,\eta\eta\eta\eta} + \frac{T}{c^2} w_{,\xi\xi} = 0, \quad (6)$$

де  $u, v, w$  - переміщення точок серединної площини обшивки у напрямках вісей  $x, y, z$ ,  $T=T^0/Eh$ ,  $T$  - докритичне повздовжнє зусилля, додатне при стисненні,  $E$  - модуль пружності,  $\nu$ -коefficient поперечної деформації,  $h$ -товщина пластини,  $b$ -ширина ділянки між ребрами,  $c^2=h^2/(12b^2(1-\nu^2))$ ,  $\xi, \eta$ -безрозмірні координати:  $\xi=x/b$ ,  $\eta=y/b$ . Зв'язок між рівняннями (5), які описують мембранну деформацію, і рівнянням (6), яке описує деформацію вигину,



Мал.1. Загальна та місцева форми втрати стійкості.

проявляється через рівняння стійкості ребра (тобто умови сполучення).

Відповідно до схеми методу збурення по параметру усі величини подані в вигляді рядів по параметру  $\epsilon$  типу:

$$\varphi = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i \epsilon^i \quad (7)$$

Підставляючи цей розклад у рівняння рівноваги, граничні умови та умови сполучення, та групуючи доданки при однакових ступінях  $\epsilon$ , формулюємо задачі у кожному наближенні.

У нульовому наближенні одержано задачу стійкості пластини при шарнірному опиранні навантажених кінців, рішення якої (для критичного зусилля) зводиться до рішення трансцендентного рівняння.

У подальших наближеннях прогини визначаються неоднорідними диференціальними рівняннями у частинних похідних, для рішення котрих застосовується метод інтегральних перетворень Фур'є з кінцевими границями. Для визначення поправок до критичного зусилля одержані алгебраїчні рівняння.

Таким чином, визначені форма втрати стійкості та критичне зусилля у вигляді рядів по параметру  $\epsilon$ . При  $\epsilon=1$  це рішення відповідає зацімленню навантажених кінців пластини.

Однак суттєвим недоліком методу збурення граничних умов є локальність асимптотичних розкладень. Інакше кажучи, відрізок асимптотичного ряду дає певну інформацію при малих значеннях  $\epsilon$ . Як показали дослідження, одним з методів, які дозволяють подолати локальність асимптотичних розкладень та розширити область застосування відрізка асимптотичного ряду є дробно-раціональне перетворення Паде, яке дозволяє відбудувати функцію по відрізку її розкладання у ступеневий ряд.

Дробно-раціональне перетворення Паде застосовано до відрізків рядів збурення для отримання певних результатів аж до значення  $\epsilon=1$ . Проведено аналіз відносної ролі дискретності та ексцентриситету розташування ребер для різних варіантів конфігурації пластини. Показано, що вплив дискретності при затиснутих навантажених кінцях може бути більш істотним, ніж при шарнірному опиранні.

При збільшенні відносної ширини пластини  $b/L$  вплив граничних умов зменшується, причому цей ефект тим суттєвіший, чим "сильні-

ші" ребра (мал.2). Порівняння одержаних результатів з результатами, що відповідають конструктивно-ортотропній теорії (мал.3) показали, що остання може завищувати критичне зусилля на 20% і більше.

Оскільки результати, одержані після використання дрібно-раціонального перетворення Паде для випадку затиснутих навантажених кінців суттєво відрізняються від результатів, одержаних підсумовуванням відрізка асимптотичного ряду, виникає необхідність підтвердження їх вірогідності.

Певність одержаних результатів підтверджується зрівнянням з точними рішеннями у граничних випадках та висока точність виконання граничних умов затиснення (кут повороту дорівнює нулю) (мал.4). Приведені значення критичного зусилля при пружному закріпленні навантажених кінців (мал.5) показують, що застосування апроксимації Паде необхідне при значеннях  $\epsilon > 0,5$  (при  $\epsilon < 0,5$  відрізок ряду збурення дає певну інформацію).

У третій главі за допомогою методу збурення граничних умов у лінійній постановці розглянуто місцеву форму втрати стійкості пластини. Ця форма припускає відсутність нормального переміщення лінії з'єднання ребра з пластинкою. У цьому випадку мембранні зусилля та переміщення відсутні.

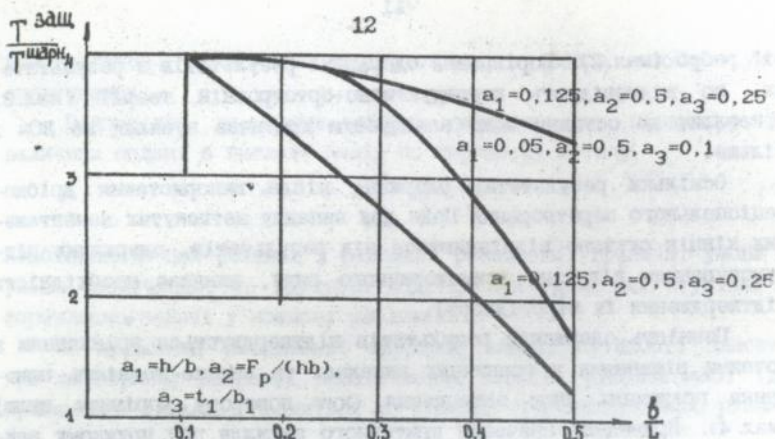
Рівняння стійкості ребра з урахуванням його однобічного розташування записано у вигляді:

$$-e^2 I_y \epsilon \cdot \epsilon \epsilon \epsilon \epsilon + \epsilon \cdot \epsilon \epsilon b^2 \left( \frac{I_k}{2(1+\nu)} - T F_p (r_p^2 \epsilon^2) \right) + \frac{m_k b^4}{E} = 0, \quad (8)$$

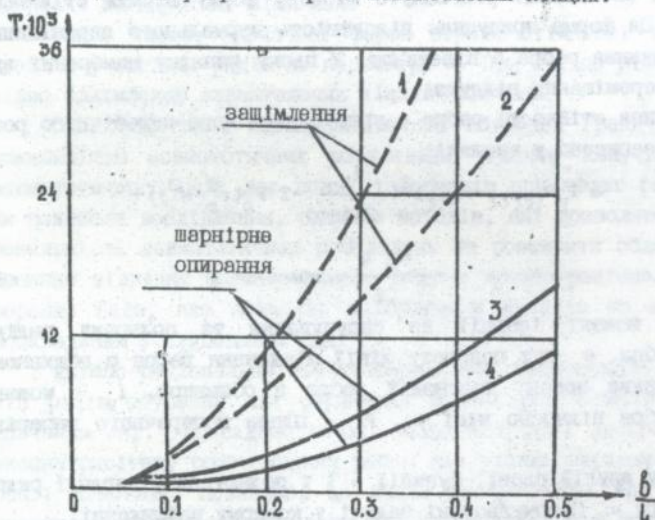
де  $I_k, r_p$  - момент інерції на скручування та полярний радіус інерції ребра,  $\epsilon$  - кут повороту лінії з'єднання ребра з обшивкою,  $m_k$  - погонний момент взаємодії ребра з обшивкою,  $I_y$  - момент інерції ребра відносно вісі  $y_p$ ,  $F_p$  - площа поперечного перерізу ребра.

Як і у другій главі, функції  $w$  і  $T$  подаються у вигляді рядів по параметру  $\epsilon$ . Сформульовані задачі у кожному наближенні.

У нульовому наближенні для визначення критичного зусилля одержано трансцендентне рівняння, відповідне до втрати стійкості шарнірно опертої пластини. Алгоритм знаходження поправок до критичного зусилля і прогину нульового наближення той же, що і для

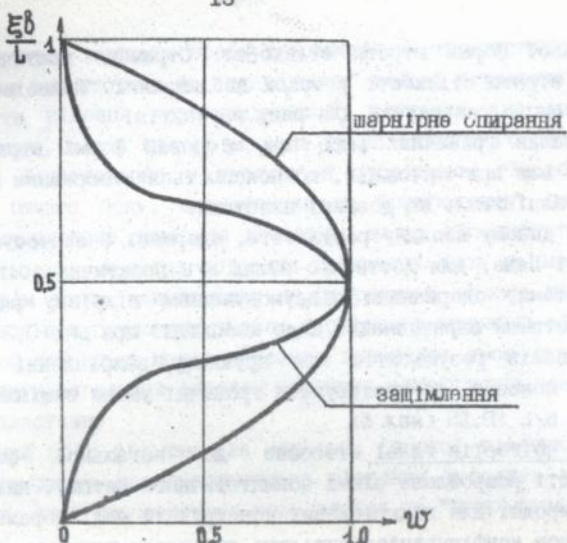


Мал.2. Відношення критичних зусиль при зацімлених та шарнірно опертих невантажених кінцях.

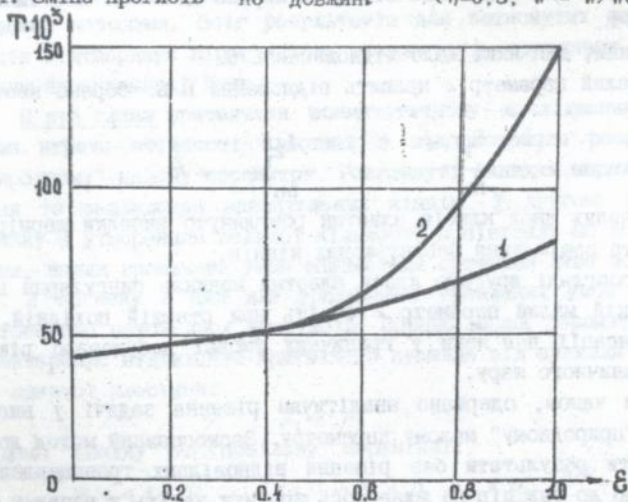


Мал.3. Порівняння з результатами, одержаними згідно з конструктивно-ортотропною теорією (криві 1,3).

( $a_1 = 0,06, a_2 = 0,2, a_3 = 0,12$ .)



Мал.4. Зміна прогибів по довжині ( $\eta=0.5$ ,  $\bar{w} = w/w(0.5)$ ).



Мал.5. Критичні зусилля при різних коефіцієнтах пружного закріплення границь. Крива 1 відповідає відрітку ряду збурення, крива 2 - зусилля, перебудованому по Паде.

загальної форми втрати стійкості. Отримані критичні зусилля і форма втрати стійкості у трьох наближеннях. Приведені результати кількісного розрахунку для ряду варіантів.

Вплив граничних умов при місцевій формі втрати стійкості менше, ніж при загальній, що пояснюється утворенням великої кількості напівхвиль по довжині пластини.

У даному випадку результати, одержані з застосуванням апроксимації Паде, для достатньо малих  $b/L$  практично збігаються з результатами, одержаними підсумовуванням відрізка ряду збурення. Використання апроксимації Паде необхідно при  $b/L > 0,2$ .

Аналіз результатів при пружному закріпленні навантажених кінців показав, що враховувати граничні умови зацімлення необхідно при  $b/L > 0,25$  (мал. 6).

У чотвертій главі стосовно до загальної форми втрати стійкості розроблена схема асимптотичного методу, який використовує природні для підкріплених конструкцій малі параметри. За геометричною конфігурацією виділено два класи пластин:

- а). пластини, для яких мала відносна ширина ділянки пластини між ребрами  $b/L$ ,
- б). пластини, для яких мало відношення  $L/b$ .

За малий параметр  $\epsilon$  править відношення  $b/b$ . Обрано наступні оцінки:

$$\frac{F_p}{hb} \sim 1, \quad \frac{I_{z_1}}{bh^3} \sim \epsilon^{-2} \quad (9)$$

Для зазначених двох класів пластин розглянуто випадки шарнірного опирання та зацімлення навантажених кінців.

При розгляді другого класу пластин виникає сингулярна проблема, у якій малий параметр  $\epsilon$  стоїть при старшій похідній. Тут для компенсації нев'язки у граничних умовах побудовано рішення типу пограничного шару.

Таким чином, одержано аналітичне рішення задачі у вигляді рядів по "природному" малому параметру. Застосований метод дозволив дістати результати без рішення відповідних трансцендентних рівнянь, що до сих пір не вдавалось зробити навіть у випадку шарнірного опирання навантажених кінців пластини. При цьому у десятки разів скорочується використання часу ЕОМ, що стає дуже суттєвим. Наприклад, на етапі оптимізаційного проектування, де потрібно багаторазове повторення рішень трансцендентних рівнянь. Нема-

ловечним фактором явилась взаємодоповненість використаних методів, оскільки асимптотика по "природному" малому параметру дозволила одержати рішення трансцендентного рівняння для достатньо широких пластин, в той час як рішення трансцендентного рівняння у цій області недостовірно у зв'язку з зростанням гіперболічних функцій. З іншого боку, асимптотика по "природному" параметру може бути використана лише для достатньо малих або достатньо великих значень  $b/L$ , а метод збурення граничних умов не має таких обмежень. Крім того, асимптотика по природному малому параметру застосовується при граничних умовах шарнірного опирання або зацімлення, в той час коли метод збурення граничних умов дав можливість дослідити загальний випадок пружного закріплення навантажених кінців пластини.

Фактичний збіг рішення для шарнірно опертої пластини з рішенням відповідного трансцендентного рівняння доводить вірогідність методу, який використовує розкладання по "природному" малому параметру.

Проведено порівняння результатів, які одержані двома застосованими методами. Збіг результатів для затиснутих навантажених кінців підтверджує вірогідність результатів, одержаних з використанням апроксимації Паде.

П'ята глава присвячена асимптотичному дослідженню місцевої форми втрати стійкості пластини з використанням розкладень по "природному" малому параметру. Розглянуті випадки шарнірного опирання та зацімлення навантажених кінців. У другому випадку, у зв'язку з утворенням великої кількості напівхвиль по довжині пластини, вплив граничних умов опиняється суттєвим лише поблизу кінців. У зв'язку з цим для урахування граничних умов зацімлення застосовано метод двох масштабів. Обрано малий параметр  $\epsilon_1$ , який характеризує відхилення критичного зусилля від зусилля для шарнірно опертої пластини:

$$\epsilon_1 = T - T^* \quad (10)$$

Уведено "швидку" та "повільну" перемінні:

$$\Psi = q(\epsilon_1)\zeta, \quad q(\epsilon_1) = 1 + Q_1 \epsilon_1 + Q_2 \epsilon_1^{3/2} + \dots$$

$$x = \epsilon_1^{1/2} \zeta \quad (11)$$

Така заміна дає можливість задовольнити граничним умовам зацімлення на навантажених кінцях. У нових перемінних сформульовано рів-

няння рівноваги та граничні умови. Одержані форма втрати стійкості та критичне зусилля у вигляді рядів по параметру  $\epsilon_1$ . Проведено порівняння критичних зусиль, отриманих з використанням двох викладених методів, яке свідчить про вірогідність одержаних результатів.

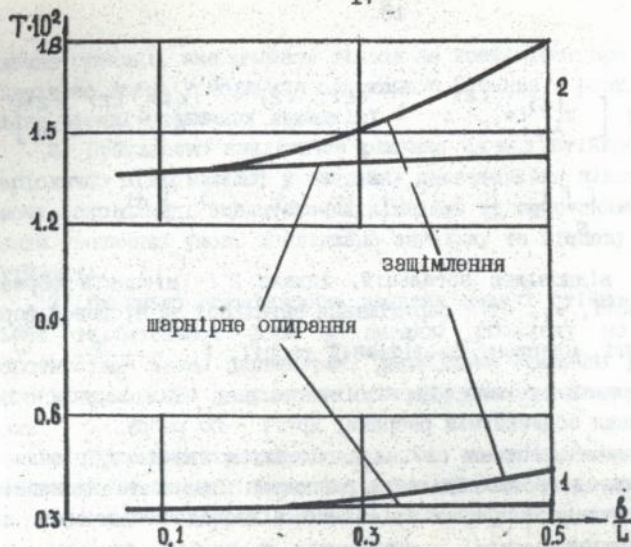
У шостій главі, проведено аналіз впливу граничних умов у нелінійній проблемі з урахуванням ефектів взаємодії форм втрати стійкості. Аналіз "зв'язаної" форми втрати стійкості базується на загальній асимптотичній теорії стійкості, розробленій В. Т. Койтером, та опирається на енергетичний критерій стійкості з використанням розкладень потенційної енергії у ряд по амплітудам лінійних форм виникання поблизу точки біфуркації.

У першому нелінійному наближенні (тобто при урахуванні членів до третього порядку у виразу для потенційної енергії) і урахуванні взаємодії двох форм втрати стійкості - однієї загальної та однієї місцевої - система рівнянь рівноваги має вигляд:

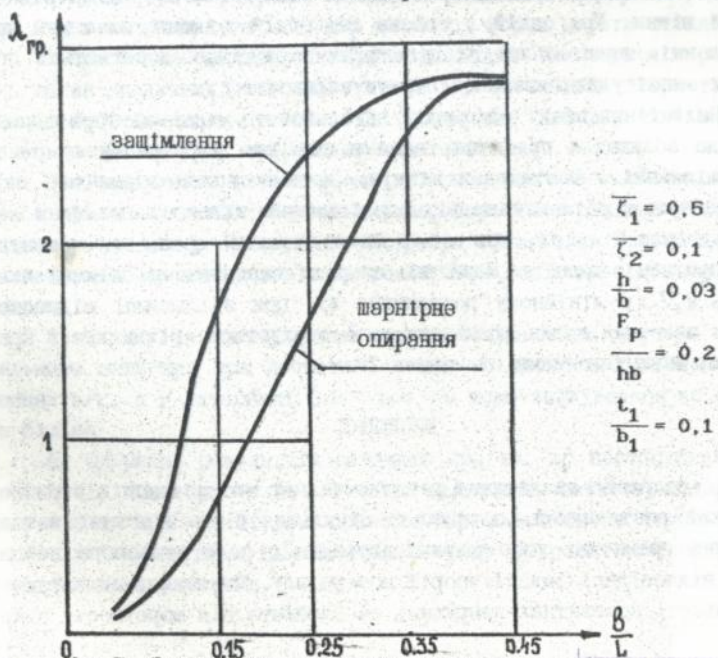
$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \zeta_1 + d_1 \zeta_1^2 + d_2 \zeta_2^2 &= \frac{\lambda}{\lambda_1} \zeta_1 \\ \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_2}\right) \zeta_2 + d_3 \zeta_1 \zeta_2 &= \frac{\lambda}{\lambda_1} \zeta_2 \end{aligned} \quad (12)$$

де  $\lambda_1, \lambda_2$  - критичні значення параметра навантаження  $\lambda$  для загальної і місцевої форм відповідно ( $\lambda = T \cdot 10^3$ ),  $\zeta_1, \zeta_2$  - амплітуди переміщень,  $\zeta_1, \zeta_2$  - амплітуда початкових недосконалостей,

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{3 a_{111}}{2 a_1}, \quad d_2 = \frac{a_{122}}{2 a_1}, \quad d_3 = \frac{a_{122}}{a_2} \\ a_1 &= \lambda_1 h \iint_S (w, \zeta^{(1)})^2 dS + t_1 \lambda_1 \iint_{S_p} (v_p, \zeta^{(1)})^2 dS_p \\ a_2 &= \lambda_2 h \iint_S (w, \zeta^{(2)})^2 dS + t_1 \lambda_1 \iint_{S_p} (w_p, \zeta^{(2)})^2 dS_p \\ a_{111} &= h \iint_S \left[ T_1^{(1)}(w, \zeta^{(1)})^2 + T_2^{(1)}(w, \eta^{(1)})^2 + 2S_2^{(1)} w, \zeta^{(1)} w, \eta^{(1)} \right] dS + \\ &+ t_1 \iint_{S_p} T_p^{(1)}(w_p, \zeta^{(1)})^2 dS_p \end{aligned}$$



Мал.6. Залежність критичного зусилля від  $b/L$ .  
(місцева форма).



Мал.7. Залежність граничних навантажень від  $b/L$

$$a_{122} = h \int_S \left[ T_1^{(1)}(w, \zeta)^{(2)} + T_2^{(1)}(w, \eta)^{(2)} + 2S_2^{(1)} w, \zeta w, \eta \right] dS + \\ + t_1 \int_{S_p} T_p^{(1)} \left[ (w_p, \zeta)^{(2)} + r_p^{(2)} (\theta_p, \zeta)^{(2)} \right] dS_p$$

Тут індекс 1 відповідає загальній, індекс 2 - місцевій формам втрати стійкості,  $w_1, w_2$  - переміщення загальної та місцевої форм втрати стійкості, одержані по лінійній теорії,  $T_p^{(1)} = \frac{du_p^{(1)}}{d\zeta}$ ,  $T_1, T_2, S_2$  - мембранні зусилля. Перші інтеграли у (12) беруться по поверхні ділянки облицьки між ребрами, другі - по ребру.

Виключивши з системи (12)  $\zeta_2$ , одержуємо кубічне рівняння відносно  $\lambda$ , яке дозволяє будувати рівноважні вітки та визначати значення граничного навантаження (воно відповідає максимуму на рівноважній вітці).

Проведений аналіз рівноважних віток та граничних навантажень показав, що зацімлення кінців суттєво впливає на характер рівноважної вітки. При одній і тій же відносній довжині пластини при зацімленні навантажених кінців граничне зусилля досягається при менших амплітудах загальної втрати стійкості  $\zeta_1$ .

Нелінійний ефект взаємодії загальної та місцевої форм приводить до зближення граничних навантажень при шарнірному опиранні та зацімленні навантажених кінців, причому вплив граничних умов зменшується з збільшенням відносної ширини ділянки пластини між ребрами (мал. 7). Так, при  $b/L=0,05$  відношення граничних навантажень при зацімлених та шарнірно опертих навантажених кінцях становить 2,7 (у лінійному розрахунку 4), при збільшенні відносної ширини пластини вплив граничних умов знижується, різниця між критичними навантаженнями становить 2%.

#### ВИСНОВКИ

1. Одержано аналітичне рішення задачі про взаємодію стрингера, який розтягнутий, з пружною півплощиною на підставі методу збурення граничних умов з використанням у ролі нульового наближення відповідної задачі теорії потенціалу. Показано, що характер особливості контактних напружень не залежить від жорсткості закрі-

плення границі, яка впливає тільки на коефіцієнт при особливості. Відмічено добре узгодження одержаного рішення з результатами, які є для різних граничних випадків.

2. Побудовано аналітичне рішення задачі стійкості стиснутої періодично підкріпленої у напрямку навантаження пластини при пружному закріпленні навантажених кінців з використанням методу збурення граничних умов. Досліджено загальну та місцеву форми втрати стійкості.

3. Одержано асимптотичне рішення задачі стійкості для загальної та місцевої форм у вигляді розкладу по геометрико-жорсткостним малим параметрам. Досліджено граничні умови шарнірного опирання та зацімлення без побудови характеристичних рівнянь.

4. Проведений аналіз показав, що вплив граничних умов є істотним для загальної форми втрати стійкості та менш істотним для місцевої форми втрати стійкості. Так, у розглянутих варіантах максимальний коефіцієнт підсилення  $\alpha$  (відношення критичного зусилля, відповідного до зацімлення навантажених кромок, до критичного зусилля при шарнірному опиранні навантажених кромок) дорівнює 4 для загальної та 1,28 для місцевої форми втрати стійкості.

З зростанням відносної ширини дільниці пластини між ребрами  $b/L$  вплив граничних умов зменшується для загальної та зростає для місцевої форми втрати стійкості (у другому випадку при  $b/L < 0,3$  вплив граничних умов зацімлення є неістотним).

При зацімленні навантажених кінців пластини сильніш виявляється ефект дискретності розміщення ребер. Так, різниці у переміщеннях точок між ребрами та точок ребра опиняється при зацімленні навантажених кромок у декілька разів вище, ніж при їх шарнірному опиранні.

У випадку загальної форми втрати стійкості  $\alpha$  досягає максимального значення при достатньо малих та достатньо великих значеннях  $b/L$ , а у інтервалі  $0,3 < b/L < 5$  може знижуватися на 40-50% та більше.

5. Одержані результати свідчать про те, що застосування апроксимації Паде дозволяє суттєво підвищити точність одержаних результатів при  $\epsilon > 0,5$ , особливо для загальної форми втрати стійкості, та обмежитися трьома членами ряду збурення для одержання вірогідних результатів.

6. Отримано рішення задачі про зв'язану форму втрати стійкості у першому нелінійному наближенні з урахуванням однієї загальної та однієї місцевої форм при пружному закріпленні навантажених кінців пластини.

7. Нелінійний ефект взаємодії загальної та місцевої форм втрати стійкості веде до зближення граничних навантажень при шарнірному опиранні та зацімленні навантажених кінців - коефіцієнт  $\alpha$  знижується з 4 до 2,7. Різниця між критичним навантаженням, одержаним у лінійному розрахунку, та граничним навантаженням при зацімненні навантажених кінців значно вище, ніж при їх шарнірному опиранні, та досягає у розглянутих варіантах 40%.

Основний зміст дисертації опубліковано у роботах:

1. Маневич Э.Л. Влияние граничных условий на устойчивость подкрепленной бесконечной полосы. //В сб. Математические методы в задачах расчета и проектирования сложных механических систем. Киев, Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова, 1992, с. 29-33.

2. Маневич Э.Л. Асимптотическое исследование местной формы потери устойчивости сжатой подкрепленной пластины. //Деп в ГНТБ Украины N 1291-Ук 93,18с.

3. Маневич Э.Л. Анализ влияния граничных условий для общей формы потери устойчивости сжатой подкрепленной пластины. //Деп в ГНТБ Украины N 1292-Ук 93,20 с.

4. Manevitch E.L. Method of the boundary conditions perturbation in the compressed stiffened plate buckling problem. //In: Theoretical Foundations in Civil Engineering. Warsaw, Proc. of Ukrainian-Polish Seminar, 1993, p. 58-63.

---

1994 г. Заказ № 26. Объем I п.л. Тираж 80 экз. Формат 60x84 I/16.  
Подписано к печати 17 декабря 1993 г. Ротапринт ДСМ. Набережная  
В.И.Ленина, 18.



460831

AB 29.202