Академия наук Украины
Институт кибернетики имени В. М. Глушкова

На правах рукописи

КАЛЖАНОВ Марат Умирбекович

РАЗРАБОТКА ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ И ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТИ

01.01.09 — математическая кибернетика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Киев 1994

Диссертацией является рукопись

Работа выполнена в Институте кибернетики имени В. М. Глушкова АН Украины.

Научный руководитель: академик АН Украины
ПШЕНИЧНЫЙ Б. Н.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор ГУПАЛ А. М.,

кандидат физико-математических наук НЕНАХОВ Э. И.

Ведущая организация: Киевский государственный университет.

Защита состоится «25» марта 1994 г. в 11^00 часов на заседании специализированного совета Д 016.45.01 при Институте кибернетики имени В. М. Глушкова АН Украины по адресу:

252207 Киев 207, проспект Академика Глушкова, 40.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-техническом архиве института.

Автореферат разослан «24» февраля 1994 г.

Ученый секретарь
специализированного совета СИНЯВСКИЙ В. Ф.

АВ-29.304

Актуальность темы

Данная работа посвящена разработке численных методов решения вариационных неравенств и задачи о дополнительности. Вариационные неравенства занимают одно из важнейших мест в общем ряду классических задач математического программирования. В терминах вариационных неравенств формулируются методы для решения моделей экономического равновесия, которые являются универсальными в том смысле, что занимают промежуточное значение и имеют более гибкий аппарат и широкие возможности по сравнению с методами оптимизации и методами неподвижной точки. Вариационные неравенства имеют огромное прикладное значение и описывают реальные задачи из различных сфер человеческой деятельности (экономика, техника, военное дело и др.). Не менее важное значение имеет проблема дополнительности, которая тесно связана с другими задачами математического программирования. В частности, теоремы существования и методы решения вариационных неравенств и неподвижной точки используются в теории задач дополнительности. И наоборот, идеи и специальные методы, разработанные для задач дополнительности, применяются для решения вышеуказанных задач.

В последнее время все большую популярность завоевывают методы решения задач математического программирования, основанные на идеи метода линеаризации. Однако их свойства в аспекте вариационных неравенств еще не изучены. Этим фактом объясняется актуальность разработки подобных алгоритмов для задачи вариационных неравенств.

В силу изложенного, разработка численных алгоритмов решения указанных задач является актуальной проблемой, имеющей не только теоретическое, но и большое практическое значение. При этом важное значение и большой интерес представляет реализация полученных алгоритмов в виде программ для персональных ЭВМ (учитывая возрастающую тенденцию проникновения этого класса перспективной техники во многие сферы человеческой деятельности).

Основные цели работы

Перечисленные проблемы определили основные задачи данной диссертационной работы, которые можно сформулировать следующим образом:

на основе некоторой модификации метода линеаризации Б. Н. Пшеничного разработать алгоритм решения вариационных неравенств, исследовать свойства алгоритма, доказать сходимость при условии сильно монотонного отображения;

отдельно рассмотреть линейный случай задачи вариационных неравенств и предложить алгоритм решения с учетом особенностей линейной задачи, в частности с условием сильной регулярности решения;

исследовать задачу дополнительности как специальный случай задачи вариационных неравенств; доказать сходимость предложенного алгоритма;

осуществить проверку эффективности предложенных методов решения на тестовых примерах.

Методы исследования

Все численные методы, предложенные автором, строго обоснованы. В доказательствах использованы результаты классической теории экстремума, математического программирования, аппарата вычислительной математики и теории матриц. Часть методов проверена в ходе вычислительных экспериментов и решения тестовых примеров.

Научная новизна

Разработан новый алгоритм решения задачи вариационных неравенств, представляющий собой некоторую модификацию метода линеаризации Б.Н. Пшеничного.

Полученные результаты распространены на линейный случай задачи вариационных неравенств; доказана конечность предложенного алгоритма при условии сильной регулярности решения и сильной монотонности оператора.

Полученные результаты распространены на задачу дополнительности.

Практическая ценность

Численные методы, предложенные в диссертации, применимы для решения конкретных оптимизационных задач, описывающих реальные проблемы из различных сфер человеческой деятельности: экономики, техники, военного дела и др.

Апробация работы

Основные результаты работы неоднократно докладывались и обсуждались на семинарах, проводимых научным советом АН Украины по проблеме " Кибернетика", на семинаре отдела "Вычислительные методы оптимизации " Института кибернетики имени В.М. Глушкова АН Украины, на научном семинаре Кустанайского государственного университета (Кустанай, сентябрь 1993 г.) и на международном конгрессе по компьютерным системам и прикладной математике (Санкт-Петербург, июль 1993 г.), других научных семинарах и конференциях.

Публикации

По теме диссертации опубликованы 3 работы.

Структура и объем работы

Работа состоит из введения, трех глав, заключения, приложения и списка цитируемой литературы, состоящей из 90 наименований. Объем работы составляет 91 страницу.

Содержание работы

Первая глава посвящена обзору современного состояния проблемы вышеуказанных задач.

В последние годы развитие экспериментальной экономики и применение сложных моделей стратегического планирования в промышленности обусловили потребность в эффективных методах для анализа и численного решения моделей экономического и теоретико-игрового равновесия.

Среди методов вычисления экономического равновесия отметим два основных подхода. Первый, базирующийся на конструктивном доказательстве существования точки равновесия, объединяет методы, известные под названием методов неподвижной точки.

Другим традиционным подходом к решению моделей равновесия является нелинейная оптимизация . Каждый из упомянутых подходов, как методы неподвижной точки, так и методы оптимизации, имеют свои недостатки и преимущества. Каждому из них в отдельности не хватает или общности, или эффективности вычислений, необходимых для решения широкомасштабных задач о равновесии.

В последние годы в качестве многообещающих компромиссов между методами оптимизации и методами неподвижной точки появились задачи с конечномерными вариационными неравенствами и задачи нелинейной дополнительности. Интенсивный поток публикаций в зарубежной прессе по указанным задачам позволяет судить о бурном развитии теории, алгоритмов и приложений данного направления. К сожалению, это переспективное направление до сих пор недостаточно освещено в нашей литературе. Именно поэтому в данной главе приведен краткий обзор современного состояния математического программирования.

В §1.1 даны постановка задачи вариационных неравенств и вспомогательные сведения, необходимые для дальнейших рассуждений.

Определение I.I. Пусть X - непустое подмножество R^n, F - отображение из R^n в себя. Задачей вариационного неравенства, обообозначаемой VI(X,F), является нахождение вектора $x^* \in X$, такого, чтобы

$$F(x^*)^T (y - x^*) \geqslant 0 \quad \text{для всех } y \in X, \tag{I.I}$$

Обычно допускают, что множество X является замкнутым и выпуклым, ча самом деле X в приложениях часто является многогранником.

Задача нелинейной дополнительности NCP - особый случай задачи VI(X,F).

Определение I.2. Пусть F - отображение R^n в себя. Задачей нелинейной дополнительности, обозначаемой NCP(F), является нахождение вектора $x^* \in R^n_+$, такого, что

$$F(x^*) \in R^n_+ \quad \text{и } F(x^*)^T x^* = 0 . \tag{I.2}$$

В определении I.2 и во всем последующем изложении R^n_+ означает неотрицательный ортант R^n. При $F(x)$, являющейся аффиной функцией x, например $F(x) = q + Mx$ для некоторого данного вектора $q \in R^n$ и матрицы $M \in R^{n\times n}$ задача NCP(F) сводится к задаче линейной дополнительности, обозначаемой LCP(q,M).

В этом же параграфе показана взаимосвязь задачи вариационных неравенств с задачей минимизации, с решением системы уравнений. Введены понятие обобщенной задачи дополнительности, а также минимаксная формулировка вариационного неравенства с использованием так называемой функции разрыва. В §1.2 приведены основные результаты и некоторые из их следствий теории существования и единственности. Рассмотрены различные формы отображения F, влияющие на существование и единственность решения обеих задач. В §1.3 рассмотрены история алгоритмов и краткий обзор их современного состояния, а также перспективные направления разработки алгоритмов.

Следующая глава диссертации посвящена построению численных алгоритмов решения вариационных неравенств и задачи о дополнительности. В §2.1 предложен итеративный алгоритм решения, доказана и обоснована сходимость предложенного алгоритма при условии, что отображение F является сильно монотонным, гарантирующим существование и единственность решения. Этот алгоритм представляет некоторую модификацию метода линеаризации Б.Н.Пшеничного.

В дальнейшем будем рассматривать пространство n-мерных векторов R^n, так что, если $x \in R^n$, то x - вектор-столбец с компонентами x^i, $i=1,\dots,n$. Пусть $F:R^n \longrightarrow R^n$ отображение R^n в R^n, а M - выпуклое множество. Под решением вариационного неравенства понимается нахождение такой точки $x_o \in M$, что

$$(F(x_o),\ x - x_o) \geqslant 0 \quad \forall\, x \in M, \tag{2.I}$$

где (x,y) - скалярное произведение векторов x и y. Обычную евклидову норму вектора x обозначим $|x|$.

Пусть теперь для $y \in M$

$$K_M(y) = \{p \in R^n : p = \lambda(x - y),\quad \lambda > 0,\quad x \in M\}.$$

- конус возможных направлений к M в точке y. Так как сопряженный ему конус имеет вид

$$K_M^*(y) = \{q: (p,q) \geq 0,\ p \in K_M(y)\},$$

то, очевидно, соотношение (2.I) может быть переписано в эквивалентной форме:

$$F(x_0) \in K_M^*(x_0). \qquad (2.2)$$

Обратим теперь внимание на то, что различные задачи могут быть приведены к форме (2.2):

а) пусть $M = R^n$. Тогда легко видеть, что $K_M^*(x_0) = 0$ и (2.2) приобретает вид $F(x_0) = 0$, т.е. сводится к решению системы нелинейных уравнений;

б) если $f(x)$ - гладкая выпуклая функция и $F(x) = f'(x)$, где $f'(x)$ - градиент функции f, то (2.2) превращается в соотношение $f'(x) \in K_M^*(x_0)$, что означает, что x_0 - точка минимума f на множестве M;

в) если $M = R^n_+$ - неотрицательный ортант пространства R^n, то нетрудно подсчитать, что $K_M^*(y) = \{q \geq 0: (y,q) = 0\}$. Поэтому (2.2) можно переписать в виде $x_0 \geq 0$, $F(x_0) \geq 0$, $(x_0, F(x_0)) = 0$, т.е. x_0 - решение задачи дополнительности;

г) пусть $\varphi(x,y)$ - гладкая выпукло-вогнутая функция $x \in R^n$, $y \in R^m$, а A и B - выпуклые множества в R^n и R^m. Точка (x_0, y_0) является седловой, если

$$\varphi(x, y_0) \geq \varphi(x_0, y_0) \geq \varphi(x_0, y),\ x \in A,\ y \in B,$$

что эквивалентно соотношениям $\varphi'_x(x_0,y_0) \in K_A^*(x_0)$; $-\varphi'_y(x_0,y_0) \in K_B^*(y_0)$.

Положим

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} \varphi'_x(x,y) \\ -\varphi'_y(x,y) \end{pmatrix} : R^{n+m} \longrightarrow R^{n+m}$$

$$M = A \times B \subseteq R^{n+m}$$

Теперь ясно, что условие седловой точки

$$F(x_o, y_o) \in K^*_M(x_o, y_o),$$

и ее поиск сводится к некоторой системе вариационных неравенств.

Перейдем к более конкретной постановке задачи. Предположим, что F - сильно монотонное дифференцируемое отображение, т.е.

$$(F(x) - F(y), x - y) \geq \mu\|x - y\|^2 , \mu > 0, \quad (2.3)$$

а матрица производных

$$F'(x) = \left\{\frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j}\right\}_{\substack{i=1,\dots,n, \\ j=1,\dots,n}}$$

удовлетворяет условию Липшица в любой компактной области. С учетом дифференцируемости F нетрудно показать, что неравенству (2.3) можно придать локальный вид

$$(F'(x)p, p) \geq \mu\|p\|^2 . \quad (2.4)$$

В данном виде это соотношение в основном и будет использовано.

Пусть теперь множество M задано системой неравенств

$$M = \{ x \in R^n : f_i(x) \leq 0, \; i=1,\dots,m\},$$

причем M - ограничено, и существует такая точка z, что $f_i(z) \leq -\gamma$, $\gamma > 0$ для всех $i=1,\dots,m$ - выпуклы, дважды дифференцируемы и их производные удовлетворяют условию Липшица. Градиенты функций f_i будем обозначать $f'(x)$, а матрицу вторых производных - $f''_i(x)$.

Основой предлагаемого в § 2.1 алгоритма служит следующая вспомогательная задача:

$$\varphi(x) = \min_{p\in R^n}\left\{(p,F(x)) + \frac{1}{2}\|p\|^2 : (f_i'(x),p) + f_i(x) \leqslant 0,\ i=1,\ldots,m\right\} \quad (2.5)$$

Так как в силу выпуклости $f_i - \gamma \geqslant f_i(z) \geqslant f_i(x) + (f_i'(x),z-x)$, $i=1,\ldots,m$, то ограничения задачи (2.5) всегда совместны, и она всегда имеет единственное решение $p(x)$.

В дальнейшем нам понадобятся две леммы.

Лемма 2.1. Точка x_o является решением вариационного неравенства тогда и только тогда, когда $p(x_o)= 0$.

Лемма 2.2. Справедлива оценка

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x) \leqslant \frac{1}{2\gamma}\|F(x) + (z-x)\|^2,$$

где λ_i - множители Куна - Таккера, соответствующие ограничениям вспомогательной задачи (2.5).

Положим теперь $m(x) = \max\{f_o(x),f_1(x),\ldots,f_m(x)\}$, $f_o(x)\equiv 0$. Сформулируем алгоритм. Пусть x_o - начальная точка, $c \geqslant m(x_o)$, а $N > 0$ выбрано достаточно большим (смысл последних слов будет разъяснен несколько ниже). Положим $\Phi_N(x) = \varphi(x) - Nm(x)$.

Пусть точка x_k, $m(x_k) \leqslant c$, уже построена. Решаем задачу квадратичного программирования (2.5) при $x=x_k$. Ее решение $p(x_k)$ обозначим p_k , а вектор множителей Куна - Таккера - λ^k. Выберем шаговый множитель α_k по следующему правилу: начиная с $\alpha=1$, делим его пополам до первого удовлетворения неравенств

$$\nu(x_k+\alpha p_k,\lambda^k) - Nm(x_k + \alpha p_k) \geqslant \Phi_N(x) + \alpha^2 K\|p_k\|^2, \quad (2.6)$$

$m(x_k + \alpha p_k) \leqslant c$, где $K > 0$ - некоторое число. Полученное α обозначим α_k и положим $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$. Итерация закончена.

Теорема 2.1 Построенная последовательность сходится к решению поставленной задачи о вариационных неравенствах, если число N удовлетворяет неравенству

$$N > \sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x), \qquad \forall\ x \in \{x:m(x)\leqslant c\}. \quad (2.7)$$

Предложенный алгоритм решает вариационные неравенства в общем виде, т.е когда целевая функция и ограничения носят нелинейный характер. Именно в этом случае следует ожидать наибольшего эффекта от применения данного метода. Однако его использование в линейном случае также не лишено смысла. В §2.2 получены результаты, соответствующие линейным вариационным неравенствам. Заметим, что линейные вариационные неравенства обладают своими специфическими особенностями, которые позволяют существенно упростить условия применения алгоритма и, следовательно, усилить конечные результаты. В частности, доказана сходимость за конечное число шагов.

Напомним, что если $F:R^n \longrightarrow R^n$ и M - выпуклое множество в R^n, то решение вариационного неравенства сводится к нахождению такой точки $x_* \in M$, что

$$(F(x_*), y - x_*) \geqslant 0, \qquad \forall\ y \in M . \tag{2.8}$$

В §2.2 рассматривается случай, когда

$$F(x) = F_o x + c,$$

$$M = \{ x : Ax - b \leqslant 0 \}, \tag{2.9}$$

где F_o - $n \times n$ матрица; A - $m \times n$ - матрица; $b \in R^n$.

Предложенная ниже модификация метода из §2.1 решает лишь часть из них, т.е. в которых выполнены условия регулярности. Точная формулировка этих условий будет дана ниже. Сделаем некоторые предположения.

<u>Предположение 2.I.</u> Матрица F_o сильно монотонна, т.е.

$$(F_o\ p,\ p) \geqslant \mu\|p\|^2,$$

где $(\cdot\ ,\cdot)$ - скалярное произведение; $\|\ \|$ - евклидова норма.

Согласно известным результатам теорий необходимых условий экстремума, в рассматриваемом случае соотношение (2.8) эквивалентно выполнению условий : существует такой вектор $\lambda^o \in R^m$, что

$$F(x_*) + A^*\lambda^0 = 0, \quad \lambda^0 \geqslant 0, \quad (\lambda^0, Ax_* - b) = 0, \tag{2.10}$$

$$Ax_* - b \leqslant 0.$$

Введем теперь следующие обозначения. Пусть $a_i \in R^n$, вектор-строка определяет i-е неравенство в (2.9), т.е.

$$(a_i, x) - b_i \leqslant 0 .$$

Если J - некоторое подмножество индексов из $[1,m]$, то A_J - матрица $|J| \times n$, где $|J|$ - число индексов в J, а матрица A_J составлена из строк a_i, $i \in J$.

Известно, что если выполнено предположение 2.I, то решение вариационного неравенства x_* единственно.
Пусть

$$J_* = \{ i: (a_i, x_*) - b_i = 0 \} .$$

Предположение 2.2. В соотношениях (2.IO) $\lambda_i^0 > 0$, $i \in J_*$ и все векторы линейно независимы.

Все последующее изложение без дополнительных оговорок предполагает выполнение предположений 2.I и 2.2 .

Перейдем теперь к построению численного метода решения задачи (2.8). Согласно изложенному в предыдущем параграфе, вспомогательная задача может быть сформулирована в следующем виде:

$$\min_p \{ (p, F(x)) + \tfrac{1}{2}\|p\|^2 : Ap + Ax - b \leqslant 0 \}. \tag{2.II}$$

Она имеет единственное решение $p(x)$, и пусть $J(x)$ - множество индексов i тех неравенств в задаче (2.II), которые выполняются как равенства $i \in J(x)$, если

$$(a_i, p(x) + x) - b_i = 0,$$

т.е. $$A_{J(x)}(x + p(x)) - b_{J(x)} = 0, \tag{2.I2}$$

Рассмотрим окрестность решения x_* и запишем для нее систему линейных уравнений:

$$p + F(x) + A^*_{J*}\lambda_{J*} = 0,$$

$$A_{J*}p + A_{J*}x - b_{J*} = 0, \qquad (2.13)$$

где λ_{J*} - вектор размерности $|J*|$.

Лемма 2.3. При сделанных предположениях существует такая окрестность решения системы вариационных неравенств, в которой вектор p, полученный из решения системы (2.13), есть решение вспомогательной задачи (2.11).

Сформулируем теперь предлагаемый алгоритм. Так как системы ограничений в задаче (2.9) линейны, то без ограничения общности можно считать, что начальная точка x_o удовлетворяет этой системе. Далее, если точка $x \in M$, а в силу (2.11) $x + p(x) \in M$, то

$$(1 - \alpha)x + \alpha(x + p(x)) = x + \alpha p(x) \in M$$

при $\alpha \in [0,1]$. Поэтому все построенные ниже точки последовательности $\{ x_k \}$ будут принадлежать допустимой области M. Это позволяет модифицировать предложенный в §2.1 алгоритм. Он приобретает следующий вид:

положим

$$\nu(x,\lambda) = - \frac{1}{2} \|F(x) + A^*\lambda\|^2 + (\lambda, Ax - b). \qquad (2.14)$$

Пусть точка $x \in M$ уже построена, $p(x)$ - соответствующее ей решение вспомогательной задачи, а $\lambda \in R^m$ - соответствующие множители Лагранжа. Вычислим индексное множество

$$J(x) = \{ i \in [1,m] : (a_i, x + p(x)) - b_i = 0 \}. \qquad (2.15)$$

Решаем систему линейных уравнений относительно $\tilde{x}$ и $\lambda_{J(x)}$:

$$F(\tilde{x}) + A^*_{J(x)}\lambda_{J(x)} = 0, \qquad (2.16)$$

$$A_{J(x)}\tilde{x} - b_{J(x)} = 0, \qquad (2.17)$$

если

$$A\tilde{x} - b \leqslant 0, \quad \lambda_{J(x)} \geqslant 0, \tag{2.18}$$

то $x = \tilde{x}$ - решение вариационных неравенств.

Если одно из условий (2.18) не выполнено, то переходим в следующую точку $x + \alpha p(x)$, где шаг α определяется по следующему правилу : начиная с единицы, дробим его пополам до первого удовлетворения неравенства

$$\nu(x + \alpha p(x),\lambda) \geqslant \varphi(x) + \alpha^2 K\|p(x)\|^2, \quad K > 0. \tag{2.19}$$

Если применить предложенный алгоритм, начиная с точки x_o, то мы получим некоторую последовательность точек x_k, $k = 0,1,\ldots$.

Теорема 2.2. Предложенный алгоритм сходится за конечное число шагов, т.е. найдется такое k, что x_k - решение системы вариационных неравенств (2.8).

В §2.3 результаты предыдущих разделов распространены на задачу дополнительности.

Как указывалось ранне, предлагаемая ниже задача дополнительности является частным случаем задачи вариационных неравенств.

Одной из особенностей задачи дополнительности является то, что область, на которой отыскивается решение, является неограниченной. Это затрудняет решение задачи. Однако при строгих ограничениях на отображение F , а именно в случае, когда F является сильно монотонным, возможно построение алгоритма и получение решения.

В данном разделе при этом условии построен алгоритм решения задачи дополнительности, доказана и обоснована сходимость.

Напомним, для заданной функции $F\colon R^n \longrightarrow R^n$ связанная с ней задача дополнительности заключается в нахождении такой точки $x \in R^n$, для которой

$$x \geqslant 0, \quad F(x) \geqslant 0 \ , \ x^T F(x) = 0 \ . \tag{2.20}$$

Заметим, что все требования для работы алгоритма , изложенного в §2.1, выполнены, кроме одного - область M неограничена Чтобы обойти эту трудность, анализируется вспомогательная задача, которая в данном случае имеет вид

$$\min_{p}\{F(x),\ p+\frac{1}{2}\ \|p\|^2 : x+p\geqslant 0\},\qquad (2.21)$$

и показана ограниченность последовательности x_k, что обосновывает сходимость алгоритма.

Сформулируем в явном виде получившийся алгоритм в задаче дополнительности.

Пусть $x_0\geqslant 0$ — начальная точка. Если точка $x_k\geqslant 0$ уже построена, то $x^j_{k+1}=x^j_k-\alpha_k\min\ (x^j_k,\ F^j(x_k))$, а α_k выбирается дроблением единицы до первого выполнения неравенства

$$\varphi(x_k+\alpha_k p_k)\ \geqslant\varphi(x_k)+\alpha_k^2 K\|p_k\|^2.$$

Таким образом, результаты предыдущих разделов распространены на задачу дополнительности. Аналогично §2.1, §2.2 обоснована и доказана сходимость предложенного алгоритма.

В последней главе приведены результаты числовых примеров задачи вариационных неравенств и нелинейной дополнительности, на которых был апробирован предложенный во 2-й главе алгоритм. Важность предложенного алгоритма эффективно продемонстрирована для вычисления экономического равновесия спроса и предложения и представлена числовым примером олигополии нескольких фирм в §3.1. Вопросы численной реализации алгоритма приведены на конкретных тестовых примерах в §3.2. Все расчеты выполнены на персональной ЭВМ, совместимой с IBM PC-XT. Алгоритм реализован на языке ФОРТРАН-77. Приведенные в §3.1, §3.2 примеры иллюстрируют тот факт, что предложенный в данной диссертационной работе алгоритм является достаточно эффективным средством решения практических задач, формулируемых в терминах вариационных неравенств и задачи дополнительности. Более того, алгоритм обладает глобальной сходимостью в том смысле, что сходится из любого начального приближения.

Основные результаты работы

1. Разработан новый алгоритм решения задачи вариационных неравенств, представляющий собой некоторую модификацию метода линеаризации Б. Н. Пшеничного.

2. Полученные результаты распространены на линейный случай задачи вариационных неравенств; доказана конечность предложенного алгоритма при условии сильной регулярности решения и сильной монотонности оператора.

3. Полученные результаты распространены на задачу дополнительности.

4. Основные положения работы проиллюстрированы на тестовых примерах задачи вариационных неравенств и задачи нелинейной дополнительности с результатами численных расчетов.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Пшеничный Б. Н., Калжанов М. У. Метод линеаризации для решения вариационных неравенств // Кибернетика и системный анализ. — 1992. — № 6. — С. 48—55.

2. Сосновский А. А., Калжанов М. У. Конечномерные вариационные неравенства и задачи нелинейной дополнительности: теория, алгоритмы и приложения. — Киев, 1993. — 24 с. — (Препр. / Ин-т кибернетики имени В. М. Глушкова АН Украины; 93-21).

3. Калжанов М. У. Численная реализация подхода, основанная на использовании вариационных неравенств для определения равновесия олигополии // Разработка и использование информационных технологий в системах управления. — Киев : Ин-т кибернетики имени В. М. Глушкова АН Украины, 1993. — С. 47—50.

Подп. в печ. 15.02.94. Формат 60×84/16. Бум. тип. № 2. Офс. печ. Усл. печ. л. 0,70. Усл. кр.-отт. 0,82. Уч.-изд. л. 1,0. Тираж 100 экз. Заказ 262.

Редакционно-издательский отдел с полиграфическим участком
Института кибернетики имени В. М. Глушкова АН Украины
252207, Киев 207, проспект Академика Глушкова, 40.