ЗАПОРОЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

на правах рукописи

БАКУРОВА АННА ВЛАДИМИРОВНА

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ И СЛОЖНОСТИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

05.13.16. - Применение вычислительной техники математического моделирования и математических методов в научных исследованиях.

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико - математических наук

Бакур

Запорожье - 1994

Работа выполнена в Запорожском государственном университете

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор ПЕРЕПЕЛИЦА В.А.

Официальные оппоненты: доктор физико - математических наук, МЕТЕЛЬСКИЙ Н.Н.

кандидат физико-математических наук, доцент ТУРЧИНА В.А.

Ведущая организация: Институт кибернетики им.В.М.Глушкова АН Украины

Защита диссертации состоится "18" февраля 1994 г. в 15[00] на заседании специализированного совета К 068.52.02 при Запорожском государственном университете по адресу: 330600, г.Запорожье, ул. Жуковского, 66 ауд. 55

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Запорожского государственного университета.

Автореферат разослан "18" января 1994 г.

Ученый секретарь
специализированного совета
к.т.н., доцент СЫСОЕВ Ю.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. В работе исследуются вычислительная сложность и свойство устойчивости решения векторных комбинаторных задач . Особенность векторных задач состоит в оценке качества решений по многим критериям. В условиях многокритериальности выбор наиболее целесообразного решения осуществляется из множества несравнимых альтернатив.

Необходимость в исследовании устойчивости таких задач возникает потому, что многим факторам, характеризующим реальные процессы, присуща неопределенность, а вычислениям - погрешность. При анализе устойчивости векторных задач выясняется величина диапазона изменения исходных данных, при которой оптимальное решение исследуемой задачи не изменяется. С другой стороны исследования устойчивости позволяют построить на базе определенной задачи путем вариации некоторых ее числовых параметров класс задач, анализ которого позволяет получить более точное и адекватное описание модели. То есть совокупность всех представителей этого класса отражает реальную ситуацию, послужившую прототипом исследуемой задачи. Это также способствует повышению эффективности решения трудно решаемых задач (таковыми являются большинство многокритериальных задач), т.к. по решению одной задачи можно получать решение континуума задач.

Изучение устойчивости тесно связано с многими математическими проблемами: двойственность задач векторной оптимизации, мощность множеств альтернатив, вычислительная сложность задач, оценки качества алгоритмов и др. Поскольку теория двойственности векторной комбинаторной оптимизации еще недостаточно разработана, в работе предлагается количественный подход к исследованию устойчивости таких задач. На основе оценок вычислительной сложности разрабатывается один из перспективных подходов к решению проблем дискретной оптимизации - статистический подход, - позволяющий получать оценки устойчивости задач в типичном случае.

Цель и задачи работы. Целью работы является исследование сложности и устойчивости векторных комбинаторных задач. Для достижения указанной цели необходимо было решить следующие задачи:

1. Исследовать условия ε-устойчивости векторных комбинаторных задач с различным составом критериев векторной целевой функции

(ВЦФ).

2. Построить алгоритм вычисления радиуса устойчивости исследуемых задач с ВЦФ, состоящей из минисуммных и минимаксных критериев в произвольной комбинации.

3. Исследовать вычислительную сложность некоторых наиболее известных задач векторной оптимизации на графах в типичном случае.

4. Исследовать поведение паретовского множества и полного множества альтернатив при увеличении числа критериев ВЦФ.

5. Провести вероятностно-статистический анализ устойчивости векторных задач на графах.

Методика исследований. В диссертационной работе использованы понятия и методы комбинаторного анализа, дискретной оптимизации, теории графов, теории вероятностей, векторной оптимизации.

Научная новизна. В диссертации разрабатываются направления исследования устойчивости задач дискретной оптимизации, порождающиеся в условиях многокритериальности: вычисление радиуса устойчивости для задач с варьируемым составом ВЦФ, влияние изменения числа критериев на мощность множеств альтернатив и на величину радиуса устойчивости. Полученные результаты обобщают часть известных результатов (В.К.Леонтьев, Э.Н.Гордеев) в области исследования устойчивости классических (однокритериальных) задач дискретной оптимизации. В работе показано как оценки вычислительной сложности позволяют использовать возможности статистического подхода к исследованию устойчивости.

Практическая ценность работы. Построенные методы позволяют более адекватно разрабатывать и анализировать многокритериальные математические модели в экономике и производстве, которые используют векторные задачи дискретной оптимизации. Построение и исследование таких моделей проводится, например, в ВЦ РАН, ИК АН Украины, Белорусском государственном университете.

Достоверность полученных результатов подтверждается их соответствием выводам других авторов (Л.Н.Козерацкая, Т.Т.Лебедева, Т.И.Сергиенко, В.К.Леонтьев, Э.Н.Гордеев), работающих над проблемой устойчивости задач дискретной оптимизации.

Публикации и апробация работы. По теме диссертационной работы опубликовано 12 печатных работ. Основные результаты диссертации докладывались на научной школе-семинаре молодых ученых по кибернетике, информатике и вычислительной технике (Киев, 1989-1990), на IV Всесоюзной школе-семинаре "Статистический и дискретный анализ данных и экспертное оценивание" (Одесса, 1991), на Всесоюзном семинаре "Дискретная оптимизация и исследование операций" (Новосибирск, 1992), на школе-семинаре "Комбинаторная оптимизация" (Полтава, Миргород, 1992), на семинарах Научного совета АН Украины по проблеме "Кибернетика" (1992-1993), на XX международной конференции САПР-93 (Гурзуф, 1993), на международной конференции "Теория приближений и задачи вычислительной математики" (Днепропетровск, 1993), на международной конференции по дискретной оптимизации (Минск-Магдебург, 1993), на международной конференции "Прикладное и имитационное моделирование-93" (Львов-Париж, 1993).

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованной литературы, содержащего 80 наименований. Содержание работы изложено на 100 страницах.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, сформулирована цель работы, указана ее новизна. Дан беглый обзор основных направлений исследования устойчивости и некоторых результатов в этой области по публикациям последних лет. Приведено краткое изложение основных результатов диссертационной работы.

Глава 1 посвящена исследованию ε-устойчивости в траекторных задачах векторной оптимизации. В параграфах 1 и 2 приведены необходимые для всего дальнейшего изложения определения и понятия; описана формальная схема, в которую вписываются все, рассматриваемые в работе задачи.

Система подмножеств (СП) есть пара $\mathbb{T}=(E,T)$, где E - конечное множество элементов, T - некоторая совокупность его непустых подмножеств t, называемых далее траекториями. Число $|t|$ - длина траектории $t\in T$. На множестве E задана векторная весовая функция

(ВВФ):

$$w(e) = (w_1(e), w_2(e), \ldots, w_N(e)),$$

где $w_\nu(e) \in \mathbb{R}$ $\forall \nu \in \{1,2,\ldots,N\}$ $\forall e \in E$. На множестве траекторий T определена векторная целевая функция (ВЦФ):

$$F(t) = (F_1(t), \ldots, F_\nu(t), \ldots, F_N(t)), \qquad (1)$$

состоящая из критериев двух видов:

$$\text{MINSUM} \quad F_\nu(t) = S_\nu(t,w) = w_\nu(t) = \sum_{e \in t} w_\nu(e) \to \min_T, \qquad (2)$$

$$\text{MINMAX} \quad F_\nu(t) = M_\nu(t,w) = \max_{e \in t} w_\nu(t) \to \min_T \qquad (3)$$

в любой комбинации. В области оптимизации эти критерии широко известны. Первый из них обычно называется линейным, а критерий (3) используется в качестве целевой функции в задачах на узкие места.

ВЦФ $F(t)$ определяет на T паретовское множество (ПМ) $\tilde{T}=\{\tilde{t} \in T: \nexists\ t^o \in T,\ F(\tilde{t}) \neq F(t^o),\ F(\tilde{t}) \geq F(t^o)\}$.

Говоря об N-критериальной задаче, будем подразумевать задачу нахождения и представления в явном виде ПМ $\tilde{T}$, а обозначать такую задачу будем через $Z^N=(T,w,F)=(E,T,w,F)$. При этом под задачей Z^N понимается массовая задача. Если ВЦФ (1) состоит только из критериев вида (2) или только вида (3), то задачу Z^N называем, соответственно, минисуммной или минимаксной.

Если занумеровать все элементы множества $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_Q\}$, то индивидуальную ВВФ $w(e)$ удобно трактовать как матрицу $W=\|w_{\nu k}\|$ размерности $N \times Q$, где $Q=|E|$. Меняя матрицу W, будем получать различные индивидуальные задачи. Индивидуальную задачу массовой задачи Z^N обозначаем через $z(W)=z^N(W)=(E,T,W,F)$, а ПМ такой задачи - через $\tilde{T}(W)$. Значение ν-го критерия $F_\nu(t)$ вида (2) и (3) в задаче $z(W)$ будем обозначать через $S_\nu(t,W)$ и $M_\nu(t,W)$ соответственно.

Индивидуальную задачу назовем q-однородной (однородной), если длина всех ее траекторий равна q (одинакова). Траекторная задача Z^N однородна, если любая ее индивидуальная задача однородна.

В пространстве $\mathbb{R}^{NQ}$ размерности N×Q задана норма. Под нормой матрицы $B=\|b_{\nu k}\|\in\mathbb{R}^{NQ}$ будем понимать число

$$\|B\|=\max\{\,|b_{\nu k}|:\nu=1,2,\ldots,N;\ k=1,2,\ldots,Q\}.$$

Через $\mathfrak{B}(\varepsilon)$ обозначим множество всех таких матриц B из $\mathbb{R}^{NQ}$, что норма $\|B\|\le\varepsilon$, $\varepsilon>0$.

Задачу $Z^N(W+B)$, полученную из исходной задачи $Z^N(W)$ при сложении матриц W и $B\in\mathfrak{B}(\varepsilon)$ будем называть возмущенной, а матрицу B - возмущающей. Величину ε назовем порядком возмущения.

В §2 изложены необходимые и достаточные условия ε-устойчивости в смысле определения 1, которое соответствует определению ε-устойчивости однокритериальных дискретных задач, введенному В.К.Леонтьевым.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Задачу $Z(W)$ назовем ε-устойчивой, если выполняются включения

$$\tilde{T}(W+B)\subseteq\tilde{T}(W)\ \forall B\in\mathfrak{B}(\varepsilon). \tag{4}$$

Очевидно, что в случае, когда $T=\tilde{T}(W)$, задача $Z^N(W)$ является ε-устойчивой при любом $\varepsilon>0$. Задачу $Z^N(W)$, для которой $\tilde{T}(W)'=T\setminus\tilde{T}(W)\neq\emptyset$, называем нетривиальной.

Для всякого $t^\circ\in\tilde{T}(W)'$ определим множество $\tilde{T}(W,t^\circ)=\{\tilde{t}\in\tilde{T}(W):\ \tau_\nu^v(t^\circ,\tilde{t})\ge0,\ \nu=1,2,\ldots,N\}$, где $\tau_\nu^v(t^\circ,\tilde{t})=F_\nu(t^\circ,W)-F_\nu(\tilde{t},W)$.

В формулировке достаточных условий ε-устойчивости в случае минисуммной задачи используем обозначение $\Omega(t^\circ,\tilde{t})=|t^\circ|+|\tilde{t}|-2|t^\circ\cap\tilde{t}|$, $t^\circ\in\tilde{T}(W)'$, $\tilde{t}\in\tilde{T}(W,t^\circ)$.

ТЕОРЕМА 1.1. Если в нетривиальной задаче $Z^N(W)$ для всякой траектории $t^0 \in \tilde{T}(W)'$ существует такая траектория $\tilde{t} \in \tilde{T}(W, t^0)$, что выполняются неравенства $\tau_\nu^\nu(t^0, \tilde{t}) > \varepsilon\Omega(t^0, \tilde{t})$, $\nu = 1, 2, \ldots N$, то она является ε-устойчивой.

Следующая теорема представляет необходимое условие ε-устойчивости минисуммных задач.

ТЕОРЕМА 1.2. Если нетривиальная задача $z^N(W)$ ε-устойчива, то для всякой траектории $t^0 \in \tilde{T}(W)'$ существует такая траектория $\tilde{t} \in \tilde{T}(W, t^0)$, что выполняются неравенства $\tau_\nu^\nu(t^0, \tilde{t}) \geq \varepsilon\Omega(t^0, \tilde{t})$, $\nu = 1, 2, \ldots N$.

Для однокритериальных задач получен критерий ε-устойчивости:

ТЕОРЕМА 1.3. Нетривиальная минисуммная задача $z^1(W) = (E, T, W, S_1)$ ε-устойчива тогда и только тогда, когда для всякой траектории $t \in T \setminus T^0(W)$ существует такая траектория $\tilde{t} \in T^0(W)$, что выполняется неравенство $S_1(t, W) - S_1(\tilde{t}, W) > \varepsilon\Omega(t, \tilde{t})$.

Радиусом устойчивости индивидуальной задачи $z(W)$ назовем число $\rho(W) = \sup\{\varepsilon: \tilde{T}(W+B) \subseteq \tilde{T}(W) \ \forall B \in \mathcal{B}(\varepsilon)\}$.

ТЕОРЕМА 1.4. Радиус устойчивости нетривиальной минисуммной задачи $z^N(W)$ выражается формулой

$$\rho(W) = \min_{t^0 \in \tilde{T}(W)'} \ \max_{\tilde{t} \in \tilde{T}(W, t^0)} \ \min_{\nu = 1, \ldots, N} \frac{\tau_\nu^\nu(t^0, \tilde{t})}{\Omega(t^0, \tilde{t})}. \tag{5}$$

Формула (5) представляет собой обобщение формулы В.К.Леонтьева для однокритериальной линейной задачи $z^1(W) = (E, T, W, S_1)$.

Результаты, представляющие собой достаточное условие, необходимое условие для минимаксных задач, а также критерий ε-устойчивости задачи на узкие места сформулированы, соответственно, в теоремах 1.5.-1.7. для случая, когда для всякой пары траекторий $t^0 \in \tilde{T}(W)'$ и $\tilde{t} \in \tilde{T}(W, t^0$ значения целевой функции достигаются не на общем ребре $e = t^o \cap \tilde{t}$.

ТЕОРЕМА 1.5. Если в нетривиальной минимаксной задаче $z^N(W)$ для всякой траектории $t^o \in \tilde{T}(W)/$ существует такая траектория $\tilde{t} \in T(W,t^o)$, что выполняются неравенства $\tau_{\nu}^{v}(t^o,\tilde{t}) > 2\varepsilon$, $\nu = 1,2,\ldots N$, то она является ε-устойчивой.

ТЕОРЕМА 1.6. Если нетривиальная минимаксная задача $z^N(W)$ ε-устойчива, то для всякой траектории $t^o \in \tilde{T}(W)/$ существует такая траектория $\tilde{t} \in \tilde{T}(W,t^o)$, что выполняются неравенства

$\tau_{\nu}^{v}(t^o,\tilde{t}) \geq 2\varepsilon$, $\nu = 1,2,\ldots N$.

ТЕОРЕМА 1.7. Нетривиальная минимаксная задача $z^1(W) = (E,T,W,M_1)$ ε-устойчива тогда и только тогда, когда для всякой траектории $t \in T \setminus T^o(W)$ существует такая траектория $\tilde{t} \in T^o(W)$, что выполняется неравенство $M_1(t,W) - M_1(\tilde{t},W) > 2\varepsilon$.

Для минимаксных задач также получена формула вычисления радиуса устойчивости

$$\rho(W) = \min_{t^o \in \tilde{T}(W)/} \; \max_{\tilde{t} \in \tilde{T}(W,t^o)} \; \min_{\nu = 1,\ldots,N} \tau_{\nu}^{v}(t^o,\tilde{t}) / 2. \qquad (6)$$

Формула (6) представляет собой обобщение формулы Э.Н.Гордеева для задач на узкие места на случай N критериев вида (3).

Условия ε-устойчивости и формула радиуса устойчивости для минимаксных задач в более общем случае представлены в теоремах 1.9 - 1.II. В их формулировке использованы следующие обозначения, которые введены рекуррентно:

$e_{\nu}(t^o \cap \tilde{t})$ - ребро $e \in t^o \cap \tilde{t}$, на котором $M_{\nu}(t^o,W) = M_{\nu}(\tilde{t},W)$;

$M_{\nu}^{1}(\tilde{t} \setminus e_{\nu}(t^o \cap \tilde{t}),W)$ - первый квазимаксимум траектории $\tilde{t} \in \tilde{T}(W,t^o)$;

$e_{\nu}^{i}(t^o \cap \tilde{t})$ - ребро $e \in t^o \cap \tilde{t}$, на котором равны i-тые квазимаксимумы траекторий t^o, $\tilde{t}$ и выполняется последовательность равенств и неравенств : $[M_{\nu}(t^o,W) - M_{\nu}(\tilde{t},W)] \neq [M_{\nu}^{1}(\tilde{t} \setminus e_{\nu}(t^o \cap \tilde{t}),$

$W) = M^1_\nu(t^\circ \setminus e_\nu(\tilde{t}\cap t^\circ), W)] \neq \ldots \neq [M^i_\nu(\tilde{t} \setminus E^i_\nu(\tilde{t}\cap t^\circ), W) = M^i_\nu(t^\circ \setminus E^i_\nu(\tilde{t}\cap t^\circ), W)]$, где $E^i_\nu(\tilde{t}\cap t^\circ) = \{e_\nu(t^\circ\cap\tilde{t}), e^1_\nu(t^\circ,\tilde{t}), \ldots, e^{i-1}_\nu(t^\circ,\tilde{t})\}$;

$J(t^\circ,\tilde{t})=\{\nu\in\{1,\ldots,N\}$: равенство $M_\nu(t^\circ,W)=M_\nu(\tilde{t},W)$ достигается на ребре $e_\nu(t^\circ\cap\tilde{t})$ и такое ребро единственно$\}$;

$J^1(t^\circ,\tilde{t}) = \{\nu \in J(t^\circ,\tilde{t})$: равенство $M^1_\nu(t^\circ\setminus e_\nu(t^\circ\cap\tilde{t}),W) = M^1_\nu(\tilde{t}\setminus e_\nu(t^\circ\cap\tilde{t}),W)$ достигается на ребре $e^1_\nu(t^\circ,\tilde{t})$ и такое ребро единственно$\}$.

$J^i(t^\circ,\tilde{t})=\{\nu \in J^{i-1}(t^\circ,\tilde{t})$: равенство $M^i_\nu(t^\circ\setminus E^i_\nu(\tilde{t}\cap t^\circ),W) = M^i_\nu(\tilde{t} \setminus E^i_\nu(\tilde{t}\cap t^\circ), W)$ достигается на ребре $e^i_\nu(t^\circ\cap\tilde{t})$ и такое ребро единственно$\}$.

ТЕОРЕМА I.9. Если в нетривиальной минимаксной задаче $z^N(W)$ для всякой траектории $t^\circ\in\tilde{T}(W)'$ существует такая траектория $\tilde{t}\in\tilde{T}(W,t^\circ)$, что выполняется система неравенств

$$\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}M_\nu(t^\circ,W)-M^i_\nu(\tilde{t} \setminus E^i_\nu(\tilde{t}\cap t^\circ), W) \ge 2\varepsilon,\\ M_\nu(t^\circ,W)-M^i_\nu(t^\circ\setminus E^i_\nu(\tilde{t}\cap t^\circ),W) \ge 2\varepsilon,\end{array}\right. \quad \forall\nu\in J^i(t^\circ,\tilde{t}) \subseteq J(t^\circ,\tilde{t}),\\ \tau^{\vee}_\nu(t^\circ,\tilde{t}) > 2\varepsilon,\ \forall\nu \in \{1,2,\ldots N\}\setminus J(t^\circ,\tilde{t}),\end{array}\right.$$

то она является ε-устойчивой.

ТЕОРЕМА 1.10. Если нетривиальная минимаксная задача $z^N(W)$ ε-устойчива, то для всякой траектории $t^\circ\in\tilde{T}(W)'$ существует такая траектория $\tilde{t}\in\tilde{T}(W,t^\circ)$, что выполняется система неравенств

$$\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}M_\nu(t^\circ,W)-M^{i+1}_\nu(\tilde{t} \setminus E^i_\nu(\tilde{t}\cap t^\circ), W) \ge 2\varepsilon,\\ M_\nu(t^\circ,W)-M^{i+1}_\nu(t^\circ\setminus E^i_\nu(\tilde{t}\cap t^\circ),W) \ge 2\varepsilon,\end{array}\right. \quad \forall\nu\in J^i(t^\circ,\tilde{t}) \subseteq J(t^\circ,\tilde{t}),\\ \tau^{\vee}_\nu(t^\circ,\tilde{t}) \ge 2\varepsilon,\ \forall\nu \in \{1,2,\ldots N\}\setminus J(t^\circ,\tilde{t}),\end{array}\right.$$

Если для всякой пары траекторий $t^\circ\in\tilde{T}(W)'$ и $\tilde{t}\in\tilde{T}(W,t^\circ)$ множество $J(t^\circ,\tilde{t})=\varnothing$, то из теорем 1.9 и 1.10 получаются, соответственно, формулировки теорем 1.5 и 1.6.

Для минимаксных задач в таком случае формула вычисления радиуса устойчивости имеет вид

$$\rho(W)= \min_{t^o \in \tilde{T}(W)'} \max_{\tilde{t} \in \tilde{T}(W,t^o)} \Big\{ \min_{\nu \in J^l(t^o,\tilde{t})} \{ 1/2(M_\nu(t^o,W)-M^{l+1}_\nu(\tilde{t} \setminus$$

$$\setminus E^l_\nu(\tilde{t} \cap t^o),W)),\ 1/2(M_\nu(t^o,W)-M^{l+1}_\nu(t^o \setminus E^l_\nu(\tilde{t} \cap t^o),W)) \},$$

$$\min_{\nu \in \{1,\dots,N\} \setminus J(t^o,\tilde{t})} \tau^W_\nu(t^o,\tilde{t}) / 2 \Big\}. \qquad (7)$$

Формула (7) не имеет аналога в однокритериальном случае, такое обобщение возникает только в условиях многокритериальности.

Для формулировки условий ε-устойчивости задач с произвольной комбинацией минисуммных и минимаксных (в частном случае, когда $J(t^o,\tilde{t})=\varnothing\ \forall t^o \in \tilde{T}(W)'$, $\tilde{t} \in \tilde{T}(W,t^o)$) критериев используем обозначение

$$\tau^{*W}_\nu(t^o,\tilde{t}) = \begin{cases} \tau^W_\nu(t^o,\tilde{t}) / 2, & \text{если } F_\nu(t) = M_\nu(t,w), \\ \tau^W_\nu(t^o,\tilde{t}) / \Omega(t^o,\tilde{t}), & \text{если } F_\nu(t) = S_\nu(t,w). \end{cases}$$

В теоремах 1.12. и 1.13 сформулированы, соответственно, достаточное и необходимое условия ε-устойчивости задач $z^N(W)$ с ВЦФ (I)-(3). Получена формула радиуса устойчивости нетривиальной задачи $z^N(W)$ с ВЦФ (I)-(3)

$$\rho(W)= \min_{t^o \in \tilde{T}(W)'} \max_{\tilde{t} \in \tilde{T}(W,t^o)} \min_{\nu=1,\dots,N} \tau^{*W}_\nu(t^o,\tilde{t}).$$

Индивидуальную задачу $z(W)$ называем локально неустойчивой, если $\rho(W)=0$. Для всякого $t^o \in \tilde{T}(W)'$ вводим множество траекторий, строго доминирующих траекторию t^o:

$$\tilde{T}(W,t^o)^* = \{ \tilde{t} \in \tilde{T}(W):\ \tau^{*W}_\nu(t^o,\tilde{t}) < 0,\ \nu=1,2,\dots,N \}. \qquad (8)$$

В следующей теореме сформулирован критерий локальной неустойчивости рассматриваемых задач (минимаксные критерии рассматриваются в частном случае).

ТЕОРЕМА 1.15. Всякая нетривиальная задача $z(W)$ с ВЦФ (1)-(3) локально неустойчива, тогда и только тогда, когда существует такая траектория $t^\circ \in \tilde{T}(W)'$, что $\tilde{T}(W,t^\circ)^* = \emptyset$.

Следующая теорема дает критерий локальной неустойчивости минимаксных задач в общем случае. В ее формулировке используем обозначение $\bar{\tilde{T}}(W,t^\circ) = \{ \tilde{t}\in\tilde{T}(W,t^\circ)\setminus\tilde{T}(W,t^\circ)^*: J(t^\circ,\tilde{t})=\emptyset \ \forall t^\circ\in \tilde{T}(W)',\ \tilde{t}\in\tilde{T}(W,t^\circ)\}$.

ТЕОРЕМА 1.16. Всякая нетривиальная минимаксная задача $z(W)$ локально неустойчива, тогда и только тогда, когда существует такая траектория $t^\circ \in \tilde{T}(W)'$, что $\tilde{T}(W,t^\circ)\setminus\bar{\tilde{T}}(W,t^\circ) = \emptyset$.

По формулам (7), (8) и критериям локальной неустойчивости построен алгоритм направленного перебора для вычисления радиуса устойчивости нетривиальной задачи $z(W)$ с ВЦФ (1)-(3).

Теоремы об условиях ε-устойчивости q-однородных задач для увеличивающих (уменьшающих возмущений) представлены в параграфе 3.

В § 4 рассматриваются следующие 2 варианта определения ε-устойчивости, аналоги которых для многокритериальных целочисленных задач встречаются в работах Козерацкой Л.Н., Лебедевой Т.Т. и Сергиенко Т.И. .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Задачу $z(W)$ назовем ε-устойчивой, если выполняются включения $\tilde{T}(W+B)\supseteq\tilde{T}(W)\ \forall B\in\mathcal{B}(\varepsilon)$.

Для формулировки достаточных и необходимых условий ε-устойчивости в смысле определения 2 минисуммных задач используем обозначения: $\Omega_1(t^\circ,\tilde{t})=|t^\circ|+|\tilde{t}|-|t^\circ\cap \tilde{t}|$, $t^\circ\in\tilde{T}(W)'$, $\tilde{t}\in\tilde{T}(W)$ и $\Omega_2(\tilde{t}_1,\tilde{t}_2)=|\tilde{t}_1|+|\tilde{t}_2|-|\tilde{t}_1\cap \tilde{t}_2|$, $\tilde{t}_1\in\tilde{T}(W)$, $\tilde{t}_2\in\tilde{T}(W)$.

ТЕОРЕМА 1.20. Если в нетривиальной минисуммной задаче $z^N(W)$ для всякой тройки траекторий $t^\circ\in\tilde{T}(W)'$, $\tilde{t}_1\in\tilde{T}(W,t^\circ)$ и

$\tilde{t}_2 \in \tilde{T}(W) \setminus \tilde{T}(W, t^\circ)$ выполняются условия

I) $\tau^{v}_{\underline{\nu}_i}(t^\circ, \tilde{t}_i) > \varepsilon\Omega_1(t^\circ, \tilde{t}_i)$, $\underline{\nu}_i \in \{I,\dots,N\}$, $i=I,2$,

2) $$\begin{cases} |\tau^{v}_{\nu_1}(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2)| > \varepsilon\Omega_2(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2) & \nu_1 \in \{I,\dots,N\}, \\ |\tau^{v}_{\nu_2}(\tilde{t}_2, \tilde{t}_1)| > \varepsilon\Omega_2(\tilde{t}_2, \tilde{t}_1) & \nu_2 \in \{I,\dots,N\}, \end{cases} \quad \nu_1 \neq \nu_2,$$

то задача ε-устойчива в смысле определения 2.

ТЕОРЕМА 1.21. Если нетривиальная минисуммная задача $z^N(W)$ ε-устойчива в смысле определения 2, то для всякой тройки траекторий $t^\circ \in \tilde{T}(W)'$, $\tilde{t}_1 \in \tilde{T}(W, t^\circ)$ и $\tilde{t}_2 \in \tilde{T}(W) \setminus \tilde{T}(W, t^\circ)$ одновременно выполняются условия

I) $\tau^{v}_{\underline{\nu}_i}(t^\circ, \tilde{t}_i) \geq \varepsilon\Omega_1(t^\circ, \tilde{t}_i)$, $\underline{\nu}_i \in \{I,\dots,N\}$, $i=I,2$,

2) $$\begin{cases} |\tau^{v}_{\nu_1}(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2)| \geq \varepsilon\Omega_2(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2) & \nu_1 \in \{I,\dots,N\}, \\ |\tau^{v}_{\nu_2}(\tilde{t}_2, \tilde{t}_1)| \geq \varepsilon\Omega_2(\tilde{t}_2, \tilde{t}_1) & \nu_2 \in \{I,\dots,N\}, \end{cases} \quad \nu_1 \neq \nu_2.$$

В следующих теоремах представлены достаточное и необходимое условия ε-устойчивости минимаксных задач для определения 2 (далее для простоты изложения рассмотрен только частный случай минимаксных задач).

ТЕОРЕМА 1.22. Если в нетривиальной минимаксной задаче $z^N(W)$ для всякой тройки траекторий $t^\circ \in \tilde{T}(W)'$, $\tilde{t}_1 \in \tilde{T}(W, t^\circ)$ и $\tilde{t}_2 \in \tilde{T}(W) \setminus \tilde{T}(W, t^\circ)$ одновременно выполняются условия

I) $\tau^{v}_{\underline{\nu}_i}(t^\circ, \tilde{t}_i) > 2\varepsilon$, $\underline{\nu}_i \in \{I,\dots,N\}$, $i=I,2$,

2) $$\begin{cases} |\tau^{v}_{\nu_1}(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2)| > 2\varepsilon & \nu_1 \in \{I,\dots,N\}, \\ |\tau^{v}_{\nu_2}(\tilde{t}_2, \tilde{t}_1)| > 2\varepsilon & \nu_2 \in \{I,\dots,N\}, \end{cases} \quad \nu_1 \neq \nu_2,$$

то задача ε-устойчива в смысле определения 2.

ТЕОРЕМА 1.23. Если нетривиальная минимаксная задача $z^N(W)$

ε-устойчива в смысле определения 2, то для всякой тройки траекторий $t^\circ \in \tilde{T}(W)'$, $\tilde{t}_1 \in \tilde{T}(W,t^\circ)$ и $\tilde{t}_2 \in \tilde{T}(W) \setminus \tilde{T}(W,t^\circ)$ одновременно выполняются условия

I) $\tau^{v}_{\underline{\nu}_i}(t^\circ,\tilde{t}_i) \geq 2\varepsilon$, $\underline{\nu}_i \in \{I,\ldots,N\}$, $i=I,2$,

$$2) \begin{cases} |\tau^{v}_{\nu_1}(\tilde{t}_1,\tilde{t}_2)| \geq 2\varepsilon & \nu_1 \in \{I,\ldots,N\}, \\ |\tau^{v}_{\nu_2}(\tilde{t}_2,\tilde{t}_1)| \geq 2\varepsilon & \nu_2 \in \{I,\ldots,N\}, \end{cases} \quad \nu_1 \neq \nu_2.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Задачу $z(W)$ назовем ε-устойчивой, если выполняются равенства

$$\tilde{T}(W+B) = \tilde{T}(W) \ \forall B \in \mathfrak{B}(\varepsilon).$$

Соответствующие определению 3 достаточное и необходимое условия ε-устойчивости для минисуммных (минимаксных) задач получены при объединении условий теорем 1.I и 1.20 (1.5 и 1.22) и, соответственно, теорем 1.2 и 1.21 (1.6 и 1.23). В виду аналогичности их формулировок, а также громоздкости, в диссертации сформулировано только достаточное условие минисуммной задачи.

ТЕОРЕМА 1.24. Если в нетривиальной минисуммной задаче $z^N(W)$ для всякой тройки траекторий $t^\circ \in \tilde{T}(W)'$, $\tilde{t}_1 \in \tilde{T}(W,t^\circ)$ и $\tilde{t}_2 \in \tilde{T}(W) \setminus \tilde{T}(W,t^\circ)$ одновременно выполняются условия

I) $\tau^{v}_{\underline{\nu}_i}(t^\circ,\tilde{t}_i) > \varepsilon\Omega_i(t^\circ,\tilde{t})$, $\underline{\nu}_i \in \{I,\ldots,N\}$, $i=I,2$,

$$2) \begin{cases} |\tau^{v}_{\nu_1}(\tilde{t}_1,\tilde{t}_2)| > \varepsilon\Omega_2 & \nu_1 \in \{I,\ldots,N\}, \\ |\tau^{v}_{\nu_2}(\tilde{t}_2,\tilde{t}_1)| > \varepsilon\Omega_2 & \nu_2 \in \{I,\ldots,N\}, \end{cases} \quad \nu_1 \neq \nu_2,$$

3) для всякой траектории $t^\circ \in \tilde{T}(W)'$ существует такая траектория $\tilde{t} \in \tilde{T}(W,t^\circ)$, что выполняются неравенства

$$\tau^{v}_{\nu}(t^\circ,\tilde{t}) > \varepsilon\Omega(t^\circ,\tilde{t}), \quad \nu = 1,2,\ldots N,$$

$$\tau^{v}_{\nu}(t^\circ,\tilde{t}) > \varepsilon\Omega(t^\circ,\tilde{t}), \quad \nu = 1,2,\ldots N,$$

то задача ε-устойчива в смысле определения 3.

В работе показано как результат, сформулированный в виде теорем 1.15, 1.20 -1.23, согласуется с соответствующими критериями устойчивости, полученными Л.Н.Козерацкой, Т.Т.Лебедевой и Т.И.Сергиенко для многокритериальных задач целочисленного линейного программирования (ЦЛП).

Глава 2 посвящена исследованию вычислительной сложности в типичном случае наиболее известных векторных задач на графах: о совершенных паросочетаниях, о коммивояжере, об остовных деревьях.

В постановке задач на графах используем дополнительные обозначения, которые введены в §5.

$\mathcal{G}_n$ - множество всех n-вершинных графов $G = (V,E)$;

$I = \{ w^i : w^i \in \mathbb{R}_+, i=1,\ldots,r, w^1 < w^2 < \ldots < w^r \}$

$\mathcal{G}(n,N,r)$ - множество всех графов $G \in \mathcal{G}_n$, у которых на множестве ребер E задана целочисленная ВВФ вида

$w(e)=(w_1(e),\ldots,w_\nu(e),\ldots,w_N(e))$, где $w_\nu(e) \in I$, $\nu=1,\ldots,N$;

$T=\{t\}$ - множество всех допустимых решений (МДР), или траекторий, длина которых равна q. При определенном виде траектории t имеем следующие задачи:

Z_1^N- задача коммивояжера; t - гамильтонов цикл; q=n;

Z_2^N- задача об остовных деревьях; t - остовное дерево; q=n-1;

Z_3^N- задача о совершенных паросочетаниях; t - совершенное паросочетание; q=n/2, n - четное;

В главах 2 и 3 под искомым решением задачи наряду с ПМ $\tilde{T}$ подразумевается полное множество альтернатив (ПМА) $\hat{T}$. ПМА определяется как подмножество ПМ минимальной мощности такое, что $F(T^*) = \{ F(t): t \in T^* \}$ $\forall T^* \leq T$.

Всякий граф $G \in \mathcal{G}(n,N,r)$ однозначно определяет собой некоторую индивидуальную задачу $z(W)$. Поэтому далее наряду с термином "задача $z(W)$" условимся использовать термин "задача z на графе G".

В § 6 введено понятие идеальной задачи, которое состоит в следующем. Индивидуальная задача $z(W)$ обладает свойством λ, если найдется хотя бы одно решение $t=(V,E_t)$ такое, что каждое ребро $e \in E_t$ взвешено N-мерным вектором вида

$$(w^1,\dots,w^1) \in \mathbb{R}^N.$$

При этом указанное решение t также обладает свойством λ. Множество таких траекторий обозначим через T_λ; $\{z\}_\lambda$ - множество индивидуальных задач, обладающих свойством λ. Такие задачи называем идеальными.

Пусть определена функция $\varphi=\varphi(n)=o(\sqrt{n})\to\infty$ при $n\to\infty$.

ТЕОРЕМА 2.1. Если выполняется неравенство $(r^N+1)\le n/(\ln n+\ln\ln n+\varphi)$, то для почти всех графов $G\in\mathfrak{G}(n,N,r)$ векторные задачи о коммивояжере , о совершенных паросочтаниях, о минимальном остовном дереве с ВЦФ (I)-(3) являются идеальными.

В § 7 на основе свойства идеальности получены оценки сложности исследуемых задач в "типичном" случае.

В работах В.А.Емеличева, В.А.Перепелицы для исследуемых задач было устновлено, что максимальная мощность ПМ и ПМА растет экспоненциально с ростом размерности задачи, если ВЦФ (I) содержит хотя бы два критерия весового вида (2) и значение $r=r(n)$ растет достаточно быстро с ростом n. Однако оставался открытым вопрос о том, для какой доли графов $G\in\mathfrak{G}(n,N,r)$ мощность ПМ и ПМА ограничена снизу экспоненциальной функцией от n. Ответ на этот вопрос дают следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 2.2. Если $r^N\le \sqrt{n}/\varphi$, то для векторной задачи коммивояжера с ВЦФ (I)-(3) на почти всех графах $G\in\mathfrak{G}(n,N,r)$ мощность ПМА $|\hat{T}|=I$ и мощность ПМ $\tilde{T}$ ограничена снизу функцией

$\phi(n)=o((\varphi_2\sqrt{n})^r)$, экспоненциально растущей от n.

ТЕОРЕМА 2.3. Если $r^N\leq\sqrt{n}/\varphi$, то для задачи об остовных деревьях с ВЦФ (I)-(3) на почти всех графах $G\in\mathfrak{Z}(n,N,r)$ мощность ПМА $|\hat{T}|=I$ и мощность ПМ $\tilde{T}$ ограничена снизу функцией $\phi(n)=o((\varphi_2\sqrt{n})^{n+1})$, экспоненциально растущей от n.

ТЕОРЕМА 2.4. Если $r^N\leq\sqrt{n}/\varphi$, то для задачи о совершенных паросочетаниях с ВЦФ (I)-(3) на почти всех графах $G\in\mathfrak{Z}(n,N,r)$ мощность ПМА $|\hat{T}|=I$ и мощность ПМ $\tilde{T}$ ограничена снизу функцией $\phi(n)=o((\sqrt{n}\varphi)^{n^o})$, экспоненциально растущей от n.

Поскольку вычислительная сложность оценивается относительно длины входа количеством элементарных операций, затрачиваемых на нахождение и представление в явном виде решения, то нижней оценкой сложности проблемы нахождения ПМ (ПМА) может служить мощность множества $\tilde{T}$ ($\hat{T}$). Согласно теоремам 2.2-2.4 проблема нахождения ПМ рассматриваемых задач (имеющих ПМ экспоненциальной мощности) является труднорешаемой. Однако, проблема нахождения ПМА почти для всех графов сводится к нахождению одного ПО.

<u>В главе 3</u> рассмотрены следующие вопросы: I) поведение ПМ и ПМА при увеличении числа критериев ВЦФ; 2) вероятностный анализ устойчивости решения задач Z_s^N, s = I,2,3; 3) вероятностный анализ мощности ядра устойчивости для одного класса локально неустойчивых задач.

В параграфе 8 показано, что существовавшее до настоящего времени мнение о расширении ПМ при увеличении числа критериев ВЦФ вообще говоря, является неточным. Обозначим через Δ_1 начальную систему критериев ВЦФ, т.е. $\Delta_1=\{F_1(t),\ldots,F_{N_1}(t)\}$. Новая задача будет получаться из исходной путем замены системы критериев Δ_1 на систему $\Delta_2=\Delta_1\cup\{F_{N_1+1}(t),\ldots, F_{N_2}(t)\}$. Действительно, в определенных случаях имеет место совпадение множеств $\tilde{T}(\Delta_1)$ и $\tilde{T}(\Delta_2)$. Например, для так называемых полных задач, когда выполняется равенство : $T = \tilde{T} = \hat{T}$. Ясно, что в этом случае не существует элементов $t \in T$, за счет которых может расшириться ПМ или ПМА.

В настоящей работе показано, что расширение ПМ происходит только в случае строго эффективных задач , т. е. задач, у которых $\tilde{T} = \hat{T}$. Следующая теорема доказывает, что число таких задач очень мало.

ТЕОРЕМА 3.I. Если $r^N \le n/(\ln n+\ln\ln n/\varphi)$, то почти все индивидуальные задачи $z^N(W)\in Z_s$, s=I,2,3 на графах $G\in\mathfrak{G}(n,N,r)$ не являются строго эффективными .

В случае, когда $\tilde{T}\neq\hat{T}$ справедлива теорема о "немонотонности" паретовского множества .

ТЕОРЕМА 3.2. Существуют индивидуальные задачи $z\in Z_s$, s=I,2,3, у которых при замене системы критериев Δ_1 на систему критериев Δ_2, где $\Delta_1\subset\Delta_2$, выполняется включение

$$\tilde{T}(\Delta_1) \supset \tilde{T}(\Delta_2).$$

Исследование поведения ПМ при изменении числа критериев ВЦФ в некотором смысле аналогично исследованию устойчивости решения при возмущении параметров ВЦФ на некоторый порядок $\varepsilon > 0$.

Обозначим через $z(W,\Delta_1)$ исходную индивидуальную задачу с ВЦФ $F^{\Delta_1}(t)$, а через $z(W,\Delta_2)$ - задачу с ВЦФ $F^{\Delta_2}(t)$. Возмущающее множество $\mathcal{B}(\varepsilon, N_1)$ определим как множество матриц $B=\|b_{\nu k}\|$, где

$$b_{\nu k} = \begin{cases} 0, \text{ если } \nu \in \{1,\dots,N_1\}, \\ \varepsilon_0\le\varepsilon, \text{ если } \nu \in \{N_1+1,\dots,N_2\}. \end{cases}$$

Для строго эффективных задач и описанного возмущающего множества с N_1 стабильными элементами справедливы следующие утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ I. Задача $z(W,\Delta_1)$ является локально неустойчивой для возмущений $B \in \mathfrak{B}(\varepsilon, N_1)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Задача $z(W,\Delta_1)$ является ε-устойчивой в смысле определения 2 для $\forall\, \varepsilon > 0$.

В параграфе 9 исследуем ε-устойчивость в типичном случае, когда рассматривается массовая задача.

Будем считать, что индивидуальная задача $z^N(W)$ на графе $G\in\mathfrak{G}(n,N,r)$ обладает свойством ω_1 (ω_2, ω_3), если она является ε-устойчивой в смысле определений I (соответственно, определений 2 и 3). $\mathfrak{G}^{\omega_i}(n,N,r)$, i=I,2,3 - множество графов, определяющих МДР ε-устойчивых в смысле определения I (2,3) задач $z^N(W)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Задача Z^N_s является ε-устойчивой в смысле определения I (соответственно, определений 2 и 3) на почти всех графах $G \in \mathfrak{G}(n,N,r)$, если выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\mathfrak{G}^{\omega_i}(n,N,r)|}{|\mathfrak{G}(n,N,r)|} = I).$$

ТЕОРЕМА 3.3. Если $r^N \le n/(\ln n+\ln\ln n/\varphi)$, то задача Z^N_s, s=I,2,3 не является ε-устойчивой в смысле определений 2 и 3 на почти всех графах $G\in\mathfrak{G}(n,N,r)$ для $\forall\varepsilon>0$.

В теореме 3.4 обоснованы нижние оценки радиуса устойчивости для задач Z^N_s, s=I,2,3 с ВЦФ (I)-(3).

ТЕОРЕМА 3.4. Если $r^N \le n/(\ln n+\ln\ln n/\varphi)$, где $\varphi=\varphi(n)\to\infty$, $n\to\infty$, то для задач Z^N_s, s=I,2,3 на почти всех графах $G\in\mathfrak{G}(n,N,r)$ радиус устойчивости либо равен нулю, либо удовлетворяют неравенству

$$\rho(W) \ge \begin{cases} (w^1-w^2), & \text{если } F_\nu(t)=M_\nu(t),\ \nu=I,\ldots,N, \\ (w^1-w^2)/q & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 3.5. Если $r^N \le n/(\ln n+\ln\ln n/\varphi)$, где $\varphi=\varphi(n)\to\infty$, $n\to\infty$, то для минимаксных задач Z^N_s, s=I,2,3 на почти всех графах $G\in\mathfrak{G}(n,N,r)$

радиус устойчивости вычисляется по формуле

$$\rho(W) = \min_{t^0 \in \tilde{T}(W)/} \; \min_{\nu=1,\dots,N} \tau_{\nu}^{W}(t^0, \tilde{t}) / 2, \text{ где } \tilde{t} \in \hat{T}(W).$$

<u>В заключении</u> сформулированы основные результаты работы, которые состоят в следующем:

I. Предложен количественный подход в исследовании устойчивости векторных комбинаторных задач. Обоснованы необходимые и достаточные условия векторных комбинаторных задач с критериями вида MINSUM, MINMAX в любой комбинации для трех вариантов определения ε-устойчивости. Для однокритериальных траекторных задач с функционалами линейным и узкого места получены критерии ε-устойчивости.

2. Получен ряд формул для вычисления радиуса устойчивости исследуемых задач для определенного состава ВЦФ и конкретного вида возмущений (увеличивающего, уменьшающего, смешанного). На основании обобщенной формулы и полученного критерия локальной неустойчивости построен алгоритм вычисления радиуса устойчивости.

3. Обоснованы оценки вычислительной сложности в типичном случае для векторных задач о коммивояжере, об остовных деревьях, о совершенных паросочетания с критериями вида MINSUM, MINMAX в любой комбинации.

4. Сформулировано новое направление исследования устойчивости при изменении числа критериев ВЦФ, скорректировано существовавшее мнение о неубывании паретовского множества при добавлении новых критериев.

5. Предложен вероятностно-статистический подход к исследованию устойчивости и сформулированы соответствующие теоремы о достаточных условиях.

<u>Основные положения диссертации опубликованы в следующих работах</u> :

I. Бакурова А.В. К исследованию устойчивости экстремальных задач на графах.// Методы и программные средства оптимизации, моделирования и создания вычислительных систем : Сб.науч.трудов.- Киев: Ин-т кибернетики им.В.М.Глушкова АН УССР, 1990. - С.16-19.

2. Бакурова А.В., Баранник Ю.Л., Максишко Н.К. Об одном

алгоритме решения задачи землепользования. -Запорожье, 1989.- 14с.- Деп. в УкрНИИНТИ 27.09.89. № 2106-Ук89.

3. Бакурова А.В., Емеличев В.А., Перепелица В.А. К проблеме устойчивости векторных задач на графах // Информационный бюллетень Ассоциации мат.прогр. - Вып.4. - Екатеринбург. - Институт математики и механики УрО РАН - 1993 - с.19.

4. Бакурова А.В., Кувайцева С.А. Векторная задача о лесах: оценки вычислительной сложности, разрешимость с помощью АЛС, устойчивость // Тези доповідей наук.конф. викл.та студ. університету (Вип.II).- Запоріжжя - ЗДУ - 1992 - с.12-13.

5. Бакурова А.В., Максишко Н.К., Перепелица В.А., Оценки сложности и устойчивости дискретных многокритериальных задач // Материалы IV Всесоюзной школы-семинара "Статистический и дискретный анализ данных и экспертное оценивание".- Одесса.- 1991.- С.276-278.

6. Бакурова А.В., Перепелица В.А. Вероятностный анализ устойчивости экстремальных задач на графах // Математическое программирование и приложения : Тезисы докладов.- Свердловск : УрО АН СССР, 1991.- С.12-13.

7. Бакурова А.В., Перепелица В.А. Исследование устой - чивости и сложности векторных задач на графах. Деп. в УкрНИЭНТИ 14.10.1992, N 1577-УК92. - 30с.

8. Бакурова А.В., Перепелица В.А. Исследование устойчивости векторных задач на графах // САПР-93: Новые информ ационные технологии в науке, образовании и бизнесе. Тезисы докладов XX международной конференции. - 4-13.05.93.- Гурзуф. - с.86-88.

9. Бакурова А.В., Перепелица В.А. О методах вычисления радиуса устойчивости векторных задач на графах. Тезисы международной конференции "Теория приближений и задачи вычислительной математики ", Днепропетровск, 1993г. - С.15.

10. Bakurova A.V., Emelichev V.A., Perepelitsa V.A. Stability's conditions of combinatorial problems of vector optimization // Workshop on Discrete Optimization. Abstracts. - May, 1993. - Minsk-Magdeburg. - P.3.

11. Bakurova A., Perepelitsa V. About Power of Sets Alternatives by Increasing Number Criteria Vector Objective Function // Applied Modelling & Simulation. - International 93

Lviv Conference. - Sept.30-Oct.2, 1993 - Paris - P.9-10.

12. Бакурова Г.В., Перепелиця В.О. Імовірностний аналіз складності і стійкості векторної задачі комівояжера // ДАН України. - 1993. - № II. - С. .

Подписано к печати 27.XII.1993

Мн. уч-к ЗОМНТЭ Зн. 3 - 100.

Lviv Conference. - Sept.30-Oct.2, 1993 - Paris - P.9-10.

12. Закурова Г.З., [illegible] [illegible] Енергетичний аналіз складності і стійкості [illegible] [illegible] [illegible] // ДАН України. - 1993. - № 11. - С.