Академія наук України
Інститут математики

На правах рукопису

ТРОФИМЧУК Сергій Іванович

ДОСЛІДЖЕННЯ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ІМПУЛЬСНИХ СИСТЕМ

01.01.02 - диференціальні рівняння

А в т о р е ф е р а т

дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ - 1994

Робота виконана в Інституті математики АН України

Науковий консультант - член-кореспондент АН України, доктор фізико-математичних наук, професор САМОЙЛЕНКО А.М.

Дисертація є рукопис.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор ЖИКОВ В.В.

доктор фізико-математичних наук, професор ПАНКОВ О.А.

доктор фізико-математичних наук, професор СЛЮСАРЧУК В.Ю.

Провідна організація: Інститут математики та механіки Уральского відділення Російської Академії наук.

Захист відбудеться: "15" березня 1994 р. о 14 годині на засіданні спеціалізованої Ради Д 016.50.02 при Інституті математики АН України за адресою: 252601, Київ-4, ГСП, вул. Терещенківська, 3

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Інституту

Автореферат розіслано "14" лютого 1994 р.

Вчений секретар
спеціалізованої Ради,
доктор фізико-математичних наук А.Ю.Лучка

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Останні роки відмічені значною кількістю статей і монографій, присвячених дослідженню динамічних систем з розривними траєкторіями (імпульсним системам у широкому розумінні).

Актуальність вивчення систем з "поштовхами" цілком може бути пояснена кількістю та різноманітністю реальних об'єктів, які допускають коректний математичний опис в межах теорії імпульсних диференціальних рівнянь. Зауважимо, що такі досить прості за формою системи можуть мати траєкторії з "хаотичною" поведінкою.

Проглядаючи нові монографії С.Т. Завалищина, А.Н. Сесекіна (1991 р.), V. Lakshmikantham'a, D. Bainov'a, P.S. Simeonov'a (1989 р.), S. Schwabik'a (1985-1989 рр.), А.Ф. Філіпова (1985 р.), S. G. Pandit'a, S. G. Deo (1982 р.), А. Халаная та Д. Векслера (1971 р.), можна впевнитись у багатстві підходів до вивчення імпульсних систем. В дисертації ми будемо дотримуватися традицій Київської школи імпульсних систем, які відображені, зокрема, у монографії А.М.Самойленка та М.О. Перестюка "Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием". - Київ: Вища шк., 1987. - 288 с.

Як і в теорії звичайних диференціальних рівнянь (нелінійних коливань), однією з найважливіших в теорії імпульсних систем є проблема майже періодичних (м.п.) (або умовно періодичних) розв'язків ("розривних" тороїдних многовидів) і, окремо, періодичних розв'язків. Відзначимо, що методами топологічної динаміки аналіз диференціального рівняння з майже періодичними коефіцієнтами зводиться до вивчення деякої півгрупи - розширення компактного мінімального ізометричного потоку і труднощі переходу від періодичних до властиво майже періодичних систем пояснюються ускладненням базового простору розширення; для майже періодичних імпульсних систем навіть досить простого вигляду відповідної неперервної півгрупи може не існувати. Питання - коли її можна побудувати і що робити, якщо така побудова неможлива - потребує вирішення і є однією з центральних у дисертації.

Природнім орієнтиром тут є теорія майже періодичних диференціальних рівнянь (розширень динамічних систем), що отримала значний розвиток за останні роки у працях багатьох математиків (зокрема українських: В.Л. Кулика, О.Б. Ликової, В.А. Марченка, Ю.О. Митропольского, О.А. Панкова та ін.). Вплив чудових робіт В.В. Жикова та А.М. Самойленка, де багато проблем м.п. теорії отримало кінцеве, "класичне" формулювання, можна прослідити протягом всієї цієї роботи.

Властиво майже періодичні розв'язки імпульсних систем вивчалися раніше у працях М.У. Ахметова, Д. Векслера, О.А. Панкова, М.О. Перестюка, В.Ф. Рожко, А.М. Самойленка, В.Ю. Слюсарчука, В.І. Ткаченка. Всі вони грунтувалися на даному Д. Векслером означенні розривної майже періодичної функції та торкалися лише спеціального вигляду майже періодичних імпульсних рівнянь. (Наприклад, від моментів імпульсної дії t_i вимагалась рівностайна майже періодичність послідовностей $(t_n^j = t_{n+j} - t_n)_n$ (часто з додатковою вимогою $\inf\limits_n t_n^1 > 0$), що значно звужувало клас досліджуваних систем. Зрозуміло, що більш натуральною була б вимога майже періодичності розподілу, породжуваного їх правими частинами).

Дослідження об'єктів з розподіленими характеристиками, які "миттєво" змінюються в деякі моменти часу, потребує розгляду імпульсних систем з нескінченновимірним фазовим простором і необмеженими, взагалі кажучи, операторами в їх правих частинах. Народження цього нового напрямку теорії розривних динамічних систем пов'язано, зокрема, з роботами М. Ілолова, П.П. Забрейко, С.І. Костадінова, О.Д. Мишкіса, Нгуєн Ван Міня, О.А. Панкова, В.Ю. Слюсарчука, Ю.В. Теплинського, автора і Ю.В. Роговченка. Зауважимо, що імпульсна дія (особливо на нефіксованих поверхнях) суттєво ускладнює теорію абстрактних диференціальних рівнянь, внаслідок чого тут виникає багато нових цікавих (і нетривіальних!) задач.

Природно, що вивчення м.п. імпульсних систем йшло поруч з побудовою теорії кусково-неперервних (к.н.) м.п. функцій. За основу тут бралося означення Д.Векслера. Базові його моменти вперше були виділені та взяті за аксіоми теорії к.н.м.п. функцій в роботах М.У Ахметова, М.О. Перестюка, А.М. Самойленка. Але взагалі можна говорити лише про численність означень к.н.м.п. функцій і відносно малу кількість результатів, що торкаються їх властивостей (наприклад, у цитованій вище монографії А.М. Самойленка та М.О. Перестюка не доведено замкненість множини к.н.м.п. функцій відносно операції додавання).

Зрозуміло, що подолання цих труднощів і розробка цілісної теорії майже періодичних імпульсних систем є досить важливою і актуальною задачею.

Мета роботи:

- розвинути теорію загальних майже періодичних та періодичних імпульсних (розривних динамічних) систем, розглянутих як в скінченновимірному так і в нескінченновимірному просторі. Для цього, зокрема, провести грунтовний аналіз систем з довільним розташуванням моментів імпульсної дії;
- розвинути теорію кусково-неперервних майже періодичних функцій та майже періодичних множин на прямій;
- дослідити питання про звідність систем з імпульсною структурою до неперервних еволюційних систем (породжуваних, зокрема, звичайними диференціальними рівняннями та топологічними півгрупами).

Методи дослідження. Основні результати роботи одержані з допомогою апарата і методів теорії диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням, методів теорії узагальнених функцій та топологічної динаміки. Використовується значна частина методів, які є у розпорядженні теорії диференціальних рівнянь з майже періодичними коефіцієнтами та теорії нелінійних коливань.

Наукова новизна визначається наступними результатами, приведеними у дисертації:

- У скінченновимірному випадку вперше розглянуті і досліджені загальні майже періодичні імпульсні системи, знайдені умови існування майже періодичних за Степановим, Векслером або Левітаном розв'язків; встановлено, що для більшості таких систем досить сподіватися лише існування майже періодичних за Левітаном режимів; з'ясовані причини цього явища. Попередньо розроблено: а) теорію лінійних імпульсних розширень; б) базові положення теорії узагальнених імпульсних систем. Вивчені зв'язки таких систем з узагальненими диференціальними рівняннями Курцвейля-Швабіка.
- Розвинуто теорію Фаварівського типу для деяких типів абстрактних імпульсних систем, розглянутих у рефлексивному банаховому просторі. В доведених тут теоремах вперше приведені умови існування сильно майже періодичних за Векслером розв'язків деяких класів рівнянь в частинних похідних.

- Вперше роглянуті півлінійні диференціальні рівняння параболічного типу з необмеженими операторами імпульсного збурення на поверхнях та запропоновані методи їх конструктивного та якісного аналізу. Детально досліджена періодична задача для таких систем.
- Запропонована класифікація імпульсних систем з нефіксованими моментами поштовхів та приведені аналітичні умови належності досліджуваної системи до того чи іншого класу. Ретельно досліджено явище "биття" в таких системах.
- Запропоновано конструктивні методи, за допомогою яких вивчення розривної динамічної системи зводиться до аналізу звичайного диференціального рівняння (динамічної системи).
- Побудована загальна теорія просторів кусково-неперервних майже періодичних функцій з рівномірною метризованою топологією, з'ясовано зв'язок цих просторів з деякими іншими класами м.п. функцій. Детально вивчені м. періодичні множини Д. Векслера на прямій та структура його інтегрально та N-інтегрально м.п. функцій.

Практична та теоретична цінність. Робота має теоретичний характер. Розроблені в дисертації методи можуть бути використані для подальшого розвитку загальної теорії майже періодичних диференціальних систем, яка складає важливу з різних точок зору частину аналізу. Результати дисертації також покладені в основу спецкурса з дослідження коливних режимів у віброударних системах та спецкурса з елементів теорії майже періодичних систем. Практична цінність дослідження насамперед обумовлюється необхідністю всебічного вивчення коливних процесів у системах з нерегулярною структурою, які природньо виникають при математичному моделюванні різноманітних природних явищ.

Апробація роботи. Результати дисертаційних досліджень доповідались і обговорювались на різних наукових конференціях та семінарах, зокрема:

- на семінарі з теорії звичайних диференціальних рівнянь в Інституті математики АН Украини (керівник - член-кореспондент АН України А.М.Самойленко, м. Київ, 1990-1993 р.);

- на семінарі з диференціальних та інтегральних рівнянь у Київському університеті (керівник - доктор фіз.-мат. наук, професор М.О. Перестюк, м. Київ, 1987 р.);

- на семінарі з теорії звичайних диференціальних рівнянь в Інституті математики при Воронезькому державному университеті (керівник доктор фіз.-мат. наук, професор Ю.В. Покорний, м.Воронеж,1993 р.);
- на семінарі з диференціальних та функціональних рівнянь у Білоруському державному університеті (керівник - доктор фіз.-мат. наук, професор А.Б. Антоневич, 1993 р.).

Доповіді з теми дисертації представлялись також

- на засіданні Вченої Ради Інститута математики АН України (м. Київ, 1991 р.);
- на засіданні Київського математичного товариства (м. Київ, 1993 р.);
- на XI міжнародній конференції з нелінійних коливань (м. Будапешт, 1987 р.)
- на Всесоюзній конференції з нелінійних проблем диференціальних рівнянь і математичної фізики (м. Тернопіль, 1989 р.).
- на конференції з нелінійних проблем диференціальних рівнянь і математичної фізики (другі Боголюбовські читання), м. Київ, 28 вересня - 1 жовтня 1993 р.
- на наукових конференціях з циклу "Розривні динамічні системи" (м. Київ, 16-18 травня 1989 р.
  м. Івано-Франківськ, 11-14 вересня 1990 р.,
  м. Ужгород, 17-20 вересня 1991 р.)
- під час роботи школи "Сучасні методи у теорії крайових задач" в м. Воронеж, 4-8 травня 1992 г.
- на першій українсько-американській математичній школі "Диференціальні рівняння та їх застосування",м. Судак,1-10 червня 1993 р.
- на чехо-словацькій конференції з диференціальних рівнянь та їх застосувань *EQUADIFF 8*, м. Братислава (Словаччина), 24-28 серпня 1993 р..

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в 25 наукових роботах, список яких наводиться в кінці автореферату. З публікацій, виконаних у співавторстві, в автореферат і дисертацію включені тільки ті результати, які належать автору.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається із вступу, трьох глав та списку літератури із 146 найменувань. Об'єм роботи складає 201 сторінку машинописного тексту.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтовується актуальність вибраного напрямку досліджень, дається огляд основних праць, що відносяться до теми дисертації та наводиться анотація основних одержаних результатів.

Перша глава має підготовчий характер та, в основному, присвячена вивченню узагальнених розв'язків диференціальних рівнянь

$$dx/dt = f(t,x), \tag{I}$$

розглянутих у області Ω з R^n з імпульсним збуренням

$$\Delta x|_{t_i} \overset{def}{=} x(t_i+) - x(t_i-) = h_i(x(t_i-)) \tag{2}$$

у фіксовані (2) чи нефіксовані (на поверхні $\Gamma = \{(t,x)\colon t=t(x)\}$)

$$\Delta x|_{t=t(x)} = h(x) \tag{3}$$

моменти часу. Неперервна зліва функція $\bar{x}(t):[t_0,t_\omega) \to \Omega$ є узагальненим розв'язком системи (1,3), якщо $d\bar{x}(t)/dt = f(t,\bar{x}(t))$, коли $t \neq t(\bar{x}(t))$ та $\bar{x}(t^* + 0) = \bar{x}(t^*) + h(\bar{x}(t^*)) \overset{def}{=} H(\bar{x}(t^*))$ коли $t^* = t(\bar{x}(t^*))$. Система (1,3) є скінченноударною, якщо кожна її інтегральна крива φ скінченне число разів $k(\varphi)$ перетинає Γ. Якщо $\sup\limits_{\varphi} k(\varphi) = n \in N$ [$= +\infty$], то система є n-ударною [відповідно умовно скінченноударною]. Покладемо $D^\infty = \{x\colon H^n(x) \in \Omega \ \forall\ n \geqslant 0\}$, $\theta(x) = t(x) - t(H(x))$; $W^\pm = \{(t,x) \in W\colon \pm t > \pm t(x)\}$.

Теорема I. Нехай $\bar{x}(t):[t_0,t_\omega) \to \Omega$ є обмежений розв'язок системи (1,3), відокремлений від $\partial\Omega$ (якщо $\partial\Omega \neq \emptyset$); через φ позначимо відповідну інтегральну криву. Тоді А) якщо $\lim\limits_{t\to t_\omega-0} \bar{x}(t)$ не існує, то φ на $(t_\omega - \varepsilon, t_\omega)$ злічене число разів перетинає Γ і множина рівня $B = \{x \in \Omega\colon t(x) = t_\omega\}$ містить інваріантну підмножину Λ півгрупи перетворень (H, D^∞), відмінну від точки покою: причому або Λ містить нетривіальну траєкторію, або Λ - властивий континуум нерухомих точок (H, D^∞); Б) якщо φ при $t \to t_\omega$ злічене число разів перетинає Γ і існує $\lim\limits_{t\to t_\omega-0} \bar{x}(t) = c$, то $h(c) = 0$.

Наступна теорема стверджує, що умовно скінченноударні системи в деякій мірі можна вважати двоїстими до нескінченноударних.

Теорема 2. Припустимо, що система (1,3) умовно скінченноударна на множині визначення $[a,b] \times \mathrm{Cl}\,\Omega$. Тоді, якщо область Ω обмежена, то множина $S(t) = \{x \in \mathrm{Cl}\,\Omega: \hat{t}(x) = t\}$ при деякому t з $[a,b]$ містить інваріантну відносно (H, D^{∞}) підмножину M.

Аналіз зліченної множини T моментів імпульсної дії містить

Теорема 3. $T = \{t_i\}_{i=0}^{i<\sigma}$ є зростаючою трансфінітною послідовністю. Якщо для усіх $t_0 = t(x_0) = t(H(x_0))$ є вірною нерівність $\langle \partial t(H(x_0))/\partial x,\ f(t_0,H(x_0))\rangle \neq 1$, то гранична множина $T' = \{q_n\} \subseteq T \cup \{b\}$, причому або а) $T' = \{q_1,\ldots,q_d\}$, $q_d \leqslant t_\sigma \leqslant b$; або b) $T' = \{q_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $b = \infty$, $q_n \to \infty$; або ж c) $T' = \{q_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $b < +\infty$, $q_n \to t_\sigma = b$.

Наступна теорема дає умови одноударності системи (I,3).

Теорема 4. Нехай $(-1)^i\theta(x) \geqslant 0\ \forall\, x \in D(\theta)$ та імпульсна система (1,3) має розв'язки, що б'ються. Тоді для кожної трійки натуральних чисел i, p, s з парною сумою $i + p + s$ є необхідним існування хоч однієї точки $(t_0,x_0) \in \Gamma$ такої, що інтегральна крива (1), проведена через неї, знаходилась би в області $W^{(-1)^p}$ в деякий момент часу $t\ (-1)^s < t_0(-1)^s$.

Приведені деякі наслідки з цих теорем, які дозволяють визначити тип системи за її правою частиною.

У слідуючих двох параграфах дисертації розглянуті класичні розв'язки та розв'язки Каратеодорі узагальнених імпульсних систем (I,2). В цьому випадку зліченна послідовність $T = \{t_i\}$ є довільною. (За єдиним обмеженням: $t_i \neq t_j$. Але, зважаючи на необхідність в теорії м.п. систем одночасно з вихідною системою розглядати і її оболонку, іноді ми будемо припускати можливість рівності $t_i = t_j$ при $i \neq j$).

Нехай $\sup\limits_{\Omega}|h_i(x)| \overset{\mathrm{def}}{=} h_i \in (0,+\infty)$ та $\mu(b) \overset{\mathrm{def}}{=} b + \sum\limits_{a<t_i<b} h_i < +\infty$, неперервна зліва [μ - абсолютно неперервна] функція $x(t)$ є класичним розв'язком [розв'язком Каратеодорі] (1,2), якщо $x(t)$ [μ-майже] всюди задовільняє (1,2). У другому параграфі доводиться коректність постановки задачі Коші для узагальнених систем та приведені умови існування (єдності) розв'язків.

Виявляється, що точки розривів "класичних" узагальнених розв'язків не розташовані як завгодно, а утворюють розріджені множини (що, до речі, узгоджується з теоремою 3). Крім того, з'ясовується, що розріджені множини є досить підходящим носієм дискретної частини імпульсних систем. Це твердження є центральним в § 3:

Теорема 5. Нехай множина T і послідовність $\{h_i\}_{i=1}^{+\infty}$ задовільняють умові $\sum\limits_{|t_i-t|<\varepsilon} h_i = o(\varepsilon)$, де $\varepsilon \to 0+$ і $t \notin T$. Тоді множина T є розрідженою. Навпаки, кожна розріджена множина T є носієм дискретної частини деякої узагальненої системи (1,2) з $h_i \neq 0 \ \forall \ i$.

В 4 параграфі пропонується спосіб вивчення імпульсних систем, що грунтується на зведенні їх до систем звичайних диференціальних рівнянь кусково-гладкою заміною. Застосування цього методу виправдовується значними досягненнями теорії диференціальних рівнянь Каратеодорі. Тут приведена схема обгрунтування теорем про усереднення систем в стандартній по М.М.Боголюбову формі.Зауважимо, ця методика була успішно застосована в ряді досліджень.

Друга глава присвячена дослідженню властивостей м.п. кусково-неперервних функцій, якраз до цього класу належать м.п. розв'язки імпульсних систем. Простори цих функцій за деяких умов вкладаються у В-простір м.п. функцій Степанова APS, причому мають сильнішу топологію, ніж нормована топологія APS. Цим фактом в значній мірі пояснюється наш інтерес до них. Спочатку в § 5 досліджується допоміжна проблема про характеристики, взагалі кажучи, необмежених неперервних функцій $F(t)$: $R \to R$ з м.п. за Бором різницями $\phi_y(t) = F(t + y) - F(t) \ \forall \ y \in R$ ($\overset{def}{\equiv}$ $\phi_y(t) \in AP(R) \ \forall \ y$).

Теорема 6. Якщо для кожного $N > 0$ функції $\phi_y(t)$ м.п. за Бором рівномірно по $|y| \leq N$, то $F(t)$ рівномірно неперервна і існує послідовність $f_n(t) \in AP(R)$ така,що $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^t f_n(t)dt = F(t)-F(a)$ (•)

рівномірно по $t, a \in R$. Крім того, рівномірно з a існує границя $\lim\limits_{T\to+\infty} T^{-1}(F(T+a) - F(a)) = \langle F\rangle \in R$. Навпаки, якщо для $f_n(t)$ з $AP(R)$ має місце (*) рівномірно по t при деякому a, то сім'я $\{\phi_y(t),\ y \in K,\ K$ - компакт$\}$ рівномірно м.п.

Функції $\phi_y(t)$ м.п. рівномірно по $y \in R$ в тому і лише в тому випадку, коли $F(t) = mt + f(t)$, $m \in R$, $f(t) \in AP(R)$.

Цікаво, що в останньому випадку функції $F(t)$ можуть також бути охарактеризовані як нормальні відносно симетричної операції зсуву (див.: Марченко В.А. "О функциях, нормальных относительно симметрической операции сдвига// Записки НИИ математики и механики Харьковского гос. университета, т. XX, 1950. - с. 33-42).

Наслідок. Нехай послідовності

$(t_n^j) = (t_{n+j} - t_n)_{n\in Z}$ рівностепенево по $j \in Z$ м.п. $\qquad (A)$

Тоді $t_n = an + c_n$, де $(c_n)_{n\in Z}$ - м.п. послідовність, a - деяке дійсне число ($a \overset{def}{=}$ показник зростання T).

Наступна теорема та її наслідок дає відповідь на природне запитання, наскільки необхідна в теоремі 6 вимога рівномірної на компактах майже періодичності сім'ї функцій $F_y(t)$:

Теорема 7. Якщо $\phi_a(t)$ рівномірно неперервна і обмежена на R $\forall a \in R$, то з неперервності функції $F(t)$ випливає її рівномірна неперервність.

Наслідок. Нехай функція $F(t)$ неперервна і при кожному $a \in R$ різниця $\phi_a(t) \in AP(R)$. Тоді для кожної обмеженої на R множини B сім'я функцій $(\phi_a(t),\ a \in B)$ рівномірно м.п.

Зауважимо, що теореми 6, 7 та їх наслідки дозволяють повністю описати запропоновані Д.Векслером інтегрально та N-інтегрально м.п. функції.

Нехай T - злічення множина дійсних чисел, причому існують як завгодно великі від'ємні та додатні числа - елементи T та для будь якого $m > 0$ множина $\{t \in T: |t| \leq m\}$ скінченна. Сукупність усіх таких множин позначимо як $\mathfrak{U}$. З означення випливає, що число

$t \in T$ входить до складу T лише скінченне число разів ($\stackrel{def}{=}$ кратності t). Величина $\rho(T_1,T_2) = \inf\limits_{\varphi} \sup\limits_{t\in T_1} |\varphi(t) - t|$, де нижня грань береться по всім біекціям $\varphi\colon T_1 \to T_2; T_1, T_2 \in \mathfrak{A}$, визначає повну метріку в $\mathfrak{A}$. В 6 параграфі продовжено дослідження м.п. множин на прямій за допомогою методів топологічної динаміки, коли ці множини розглядаються як точки фазового простору $\mathfrak{A}$ неперервної ізометричної динамічної системи $\theta_s\colon \mathfrak{A} \times R \to \mathfrak{A}$ зсувів: $\theta_s(T) = T + s$. Це дозволяє стандартним чином означити м.п. за Бохнером (або Бором) числові множини.

Множина $T \in \mathfrak{A}$ є сильно м.п., якщо її елементи можна так занумеровати ($T = \{t_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$), що має місце ($\mathcal{A}$). Таку нумерацію елементів T будемо називати м.п. представленням T.

Теорема 8. Майже періодичність множини за Бором (Бохнером) еквівалентна її сильній майже періодичності. М.п. представлення м.п. множини можна отримати, занумерувавши її елементи за зростанням (з урахуванням кратності).

Наслідок 1. Якщо $T_1,\ldots,T_n$ - м.п. множини с показниками зростання відповідно $a_1,\ldots,a_n$. то вільне об'єднання $T = T_1 \sqcup \ldots \sqcup T_n$ - також є м.п. множиною з показником зростання a, де $1/a = 1/a_1 + \ldots + 1/a_n$.

Наслідок 2. Якщо T - м.п. множина с м.п. представленням $T = \{ai + c_i\}$, то $S \in H(T)$ саме тоді, коли існує м.п. представлення $S = \{ai + d_i + \theta\}$, де $\theta \in [0,a)$, $\{d_i\} \in H(\{c_i\})$.

В 7 параграфі розглянута більш загальна конструкція: нехай $T \in \mathfrak{A}$ і $s(T)$ - його носій (множина дійсних чисел, що складають T). Нехай $\mathfrak{S}$ - така підмножина $\mathfrak{A}$, що $\mathfrak{S} \supset s(\mathfrak{A})$, $\theta_s(\mathfrak{S}) = \mathfrak{S}\ \forall s$ та δ - метрика на $\mathfrak{S}$ з властивостями 1) $\delta(\theta_s(T),\theta_s(Q))=\delta(T,Q)\ \forall s$; 2) $\mathcal{X}(T,Q) \leqslant \delta(T,Q)$ ($\mathcal{X}$-метрика Хаусдорфа);3) $\delta(\theta_s(Q),Q)\leqslant|s|\ \forall s,Q$. В $\mathfrak{S}$ визначемо комутативну бінарну операцію (суму множин) $\dot{\sqcup}$ з властивостями: 1) $(T \dot{\sqcup} P) + a = (T + a) \dot{\sqcup} (P + a)$; 2) $s(T \dot{\sqcup} P) = s(T) \cup s(P)$;2) $\delta(T_1 \dot{\sqcup} T_2, P_1 \dot{\sqcup} P_2) \leqslant \max\,(\delta(T_1,P_1),\delta(T_2,P_2))$.

Фіксуємо простір $(\mathfrak{S},\delta,\dot{\sqcup},\theta_s)$ і розглянемо множину $\mathfrak{M}$ кусково-неперервних та неперервних зліва функцій $x(t)$: $R \to R$ з розривами 1 роду на множині $T \in \mathfrak{S}$. Пару $X = (x(t),T)$ назвемо б.м.п. за Бором функцією, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться відносно щільна множина Ω_ε чисел τ таких, що $\delta(T,T+\tau) < \varepsilon$ та

$$|x(t+\tau) - x(t)| < \varepsilon \ \forall\ t \in R\setminus(F_\varepsilon(s(T)) \cup F_\varepsilon(s(T-\tau))), \qquad (8)$$

(де $F_\varepsilon(T)$ - замкнений ε - окіл T). Множину всіх таких функцій позначимо як $AP(\mathfrak{S},\delta)$.

Теорема 9. Простір $AP(\mathfrak{S},\delta)$ є R-алгеброю. Якщо $X = (x(t),T) \in AP(\mathfrak{S},\delta)$, $x(t) \neq 0\ \forall\ t$ і $\forall\ a > 0\ \exists\ \mu > 0$ таке, що $|x(t)| \geq \mu$ $\forall\ t \in R\setminus F_a(s(T))$, то $X^{-1} = (1/x(t),\ T) \in AP(\mathfrak{S},\delta)$. Далі, $\forall\ \varepsilon > 0$ $\exists\ M(\varepsilon) > 0$ таке, що $|x(t)| \leq M(\varepsilon)\ \forall\ t \in R\setminus F_\varepsilon(s(T))$ (слабка обмеженість X). Припустимо, що $|x(t)| \leq m\ \forall\ t \in R$ та $\operatorname{mes}(F_\varepsilon(s(T)) \cap [t,t+1)) \to 0$ при $\varepsilon \to 0+$ рівномірно з $t \in R$. Тоді $x(t)$ є S-м.п. функцією Степанова.

В просторі $\mathfrak{M} \supset AP(\mathfrak{S},\delta)$ можна ввести рівномірну топологію $\mathcal{U}$ із зліченною базою. Згідно теореми Александрова - Урисона рівномірний простір $(\mathfrak{M},\mathcal{U})$ є метризованим. $X \in AP_h(\mathfrak{S},\delta)$, якщо будь яка послідовність зсувів $\theta_{s_n}(X) \overset{def}{=} (x(t+s_n),T-s_n)$ передкомпактна в $(\mathfrak{M},\mathcal{U})$ (зауважимо, що це є означення м.п. за Бохнером).

Через $APH(R)$ $[(\mathfrak{N},\mathcal{U})]$ позначимо підпростір $AP(\mathfrak{U},\rho)$ $[(\mathfrak{M},\mathcal{U})]$, який складають функції X: $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 : |x(t') - x(t'')| < \varepsilon$ $\forall\ t',t'' \in R$: $|t' - t''| < \delta(\varepsilon)$, $[t',t''] \cap T = \emptyset$.

Теорема 10. $X \in AP_h(\mathfrak{S},\delta)$ тоді і тільки тоді, коли множина $H(X) = \mathrm{Cl}\ \theta(R)X$ компактна в $(\mathfrak{M},\mathcal{U})$. При цьому $\forall\ Y \in H(X)$ маємо $H(X) = H(Y) \subset AP_h(\mathfrak{S},\delta) \subset AP(\mathfrak{S},\delta)$.

Теорема 11. $APH(R) = AP(\mathfrak{U},\rho) \cap \mathfrak{N} = AP_h(\mathfrak{U},\rho) \cap \mathfrak{N}$. Функція X з $APH(R)$ є слабко обмеженою. Існують необмежені функції в $APH(R)$. Простір $APH(R)$ є замкнений відносно додавання та множення на скаляр, і не є замкненим відносно добутку. Якщо $A,B \in APH(R)$ та обмежені, то $AB \in APH(R)$. Якщо $A \in APH(R)$, $|a(t)| \geq \mu > 0$, то $A^{-1} \in APH(R)$. В $APH(R)$ не всі функції мають середнє.

Іноді можна знехтувати м.п. структурою множини розривів к.н. м.п. функції $f:R \to M$, (тут (M,ρ)- повний метричний простір) та розглядати лише умову (B). Такі функції будемо називати м.п. за Векслером (V - м.п.). Зауважимо, що це поняття має сенс лише тоді, коли точки (t_i) розташовані не дуже щільно (наприклад, коли

$$\zeta = \sup_{a \in R} \mathrm{Card} \left[(t_i) \cap (\alpha, \alpha + 1) \right] < +\infty).$$

Взаємні зв'язки між V - м.п. функціями та м. п. траєкторіями в р.д.с. - головний об'єкт вивчення в 8 параграфі, при цьому особлива увага придається опису образу точок розривів м.п. функції при природньому вкладенні сім'ї її зсувів у фазовий простір асоційованої р.д.с. Одним з важливих інструментів дослідження при цьому є введені тут поняття точки локального перерізу д.с. (M, φ_t), особливої точки д.с. та перерізу д.с.

Теорема 12. Нехай $Y = (y(t),(t_i)) \in APH(R,M)$, та $\inf_n t_n^1 > 0$. Розглянемо функцію $s:H(X) \to M$, $s(Y) = y(0)$ і множину $L \subset H(X)$, яку складають всі функції $Y = (y(t), T)$ з $T \ni 0$. Тоді L є диз'юнктним об'єднанням зв'язних компактних перерізів $L_1, \ldots L_n$ д.с. зсувів $(H(X),\theta_s)$ (див. теорему 10). Множина $H(X) \setminus L$ розпадається на n відкритих компонент $H_1^+, \ldots, H_n^+$, причому можна вважати:

$$L_{(i+1)(\mathrm{mod}\ n)} = \left\{ Y = \nu(s)Z \in L:\ Z \in L_i,\ \nu((0,s))Z \cap L = \emptyset \right\},$$

$$H_i^+ = \left\{ Y : \exists\ s > 0\ \wedge\ Z \in L_i : Y = \nu(s)Z,\ \nu((0,s])Z \cap L = \emptyset \right\}.$$

Функція $s(Y)$ неперервна і обмежена на $H_i^+ \cup L_{(i+1)(\mathrm{mod}\ n)}$; якщо $Y_m \in H_i^+$ і $Y_m \to Y_0 \in L_i$, то існує границя $\lim_{m\to\infty} s(Y_m) = y(0+)$.

Задача відшукання інваріантної множини імпульсного розширення (і.р.) розривної динамічної системи аналізується в § 9. Зауважимо, що суттєва перешкода побудові теорії, аналогічної теорії розширень д.с. у неперервному випадку, полягає в некомутації відображень $H_i(x) = x + h_i(x)$ між собою. Приведені нижче теореми узагальнюють та доповнюють результати досліджень, проведених, зокрема, М. У. Ахметовим, М.О. Перестюком, В.І. Ткаченко в деяких частинних випадках. Нехай $\varphi_t(m)$ є неперервна д. с. на зв'язному метричному компакті (M,ρ); P- гомеоморфізм компакта $\Gamma \subset M$, $\mathrm{Int}\ \Gamma =$

$= \emptyset$; (M, θ_t, R) - р.д.с., побудована по $(M, \varphi_t, F, \Gamma, R)$, та рівняння

$$dx/dt = A(\theta_t(m))x + f(\theta_t(m)) \quad \text{коли } \theta_t(m) \notin \Gamma;$$

$$\Delta x|_s = B(\theta_s(m))x + h(\theta_s(m)) \quad \text{коли } \theta_s(m) \in \Gamma \quad .$$

мають неперервні відповідно на M та Γ коефіцієнти і є експоненціально дихотомічними для кожного фіксованого m. Нехай $(m_0, x_0) \in (M \setminus \Gamma) \times R^n$, $m_k \to m_0$ і

$$\forall\, T > 0,\ \varepsilon > 0\ \exists\, n(\varepsilon, T) \in \mathbb{N}: \forall\, n \geqslant n(\varepsilon, T) \Rightarrow \qquad (4)$$
$$|x(t, x_0, m_k) - x(t, x_0, m_0)| < \varepsilon \quad \forall\, t \in [0, T] \setminus F_\varepsilon(T(m_0)).$$

Теорема 13. За приведених умов і.р. має інтегральну множину, що визначається функцією $u = u(m) \in C(M \setminus \Gamma, R^n)$. Якщо $F(m) \equiv m$, то для виконання (4) достатньо однієї з умов:

I. Γ - переріз р.д.с.; II. $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_i$, де Γ_i - переріз р.д.с. На Γ_i визначені і неперервні функції $B_i(m)$, $h_i(m)$. Якщо $A(m)$ є така максимальна підмножина $\{1,..,n\}$, що $m \in \bigcap_{i \in A(m)} \Gamma_i$, то припустимо, що $\forall\, i, j \in A(m): i \neq j$ $B_i(m)B_j(m) = B_j(m)B_i(m)$ і

$$B(m)h(m) = B(m)h(m), \text{ де } B(m) = \prod_{i \in A(m)} (E + B_i(m)) - E,\ h(m) =$$
$$= \sum_{i \in A(m)} h_i(m) + \sum_{\substack{i, j \in A(m) \\ i \neq j}} B_i(m)h_j(m) + .. + \sum_j \prod_{\substack{i \in A(m) \\ i \neq j}} B_i(m)h_j(m).$$

III. $B(\gamma) = 0$, $h(\gamma) = 0$ в кожній особливій точці $\gamma \in \Gamma$; в кожній неособливій точці, що не є точкою перерізу р.д.с., $B^2(\gamma) = - B(\gamma)$; $B(\gamma)h(\gamma) = -h(\gamma)$.

Для слабко нелінійних і.р. в роботі доведено аналогічне твердження. Зауважимо, що 1) у випадку I функція F може бути довільною; 2) взагалі, в порівнянні з іншими той випадок, коли множина поштовхів Γ є перерізом д.с., удається дослідити значно краще. Цей факт ілюструють, зокрема, приведені нижче теореми.

Теорема 14. Нехай Γ - переріз р.д.с., яка має м.п. траєкторію $\{\theta(t)\gamma,\ t \in R\}$. Тоді замикання H цієї траєкторії в M складається з м.п. траєкторій, щільних в H. Якщо ж функція $u(m): M \to R^n$ неперервна в точках $M \setminus \Gamma$, то $(\theta(t)m, T(m)) \in APH(R)$, $(u(\theta(t)m), T(m)) \in APH(R)$ $\forall\, m \in H$.

У 8 та 10 параграфах ми пропонуємо метод факторізації р.д.с. (M,φ_t,Γ,F), який дозволяє замість неї досліджувати звичайну неперервну д.с. Приведемо декілька теорем з цього циклу (коли маємо для р.д.с. вказані в кінці с.12 умови, а Γ - переріз д.с.).

Теорема 15. Існує метричний компакт (M^*,ρ^*) і (неперервна) д.с. (M^*,λ_t), спряжена (ізоморфна) з (M,θ_t) за допомогою біекції $B: M^* \to M$ такої, що B^{-1} неперервна на $M \setminus \Gamma$.

Теорема 16. Якщо існує гомотопія $\mathcal{F}(x,t): \Gamma \times [0,1] \to \Gamma$ така, що для кожного $s \in [0,1]$ $\mathcal{F}(x,s)$ - гомеоморфізм Γ; $\mathcal{F}(x,0) = F$, $\mathcal{F}(x,1) = \mathrm{Id}$, то в теоремі 15 можна вибрати: $M^* = M$.

У третій главі дисертації з'ясовуються умови, за яких імпульсна система (1,2), розглянута, взагалі кажучи у нескінченновимірному просторі, має там V- м.п. розв'язки або розв'язки м.п. за Левітаном. (Тут і далі K позначатиме компактну підмножину Ω).

Спочатку природньо вирішити, що слід розуміти під м.п. імпульсною системою. Це питання вирішується у 11 параграфі. Щодо $f(t,x)$ припускається, що вона 1) є при м.в. $t \in R$ неперервною з x і при кожному $x \in \Omega$ вимірною з t; 2) S- м.п. рівномірно з $x \in K$; 3) $\forall K \subset \Omega\ \exists$ S- м.п. функція $\mu_{K,f}$: $\sup\limits_{x\in K} |f(t,x)| \leq \mu_{K,f}(t)$.

Фіксуємо компакт $K \subset \Omega$; нехай простір Q_1 складається з звужень усіх функцій, задовільняючих попереднім вимогам, на множину $R \times K$ і $\rho(f,g) = \sup\limits_{x\in K} |f(\cdot,x) - g(\cdot,x)|_S$, $f,g \in Q_1$.

Лема. Множина $H(f) = \mathrm{Cl}\left\{\tau_s f = f(t+s,x),\ s \in R\right\} \subset Q_1$ є компактною в метричному просторі (Q_1,ρ) і $(H(f),\tau_s)$ є мінімальна ізометрична д.с.

Далі в цьому параграфі знаходяться умови рівномірної з $a \in A$ (A - метричний компакт) м.п. дискретної міри $h(a)=\sum\limits_i h_i(a)\delta(t-t_i)$, $h_i(a) \in C(A)\ \forall i$, розглянутої як оператор із значеннями в деякому лінійному топологічному просторі (W,τ). Ми припускаємо, що: 1) τ породжується деякою не більш ніж зліченною множиною відокремлюючих точки півнорм $|\cdot|_i$, а отже метризується деякою метрикою d; 2) в W можна також ввести структуру B-простору $(W, |\cdot|_w)$; 3) топологія норми мажорує τ; 4) метрика d є повною на кулях $\{|x|_w \leq q\}$. Нехай $\mathcal{D}^m_{L_1}$- B-простір m-1 раз неперервно диференційовних функцій $\varphi: R \to R$ з абсолютно неперервною (m-1)-ою похідною, причому $D^j\varphi(t) \in L_1(R)$, $0 \leq j \leq m$. В $\mathcal{L}_m(W) = \mathcal{L}(\mathcal{D}^m_{L_1}, W)$ розглянемо операторну норму $|\cdot|_{\mathcal{L}_m}$ та метрику $\sigma(h_1,h_2) = \sup\limits_{|\varphi|_m=1} d(h_1\varphi, h_2\varphi)$. Розподіли $g(a) \in \mathcal{L}^a_m(W)$, $a \in A$ назвемо (рівномірно) m-м.п., якщо функція $\tau_s g(\alpha): R \to \mathcal{L}^a_m(W)$ є (рівномірно з $\alpha \in A$) м.п. по Бору. Це позначимо як $g(a) \in AP_m(W)$.

Теорема I7. Нехай

$$\sup_{t\in R}\sup_{a\in A}\sum_{t_i\in[t,t+1]}|h_i(a)|_w \leq C \tag{5}$$

для деякого $C > 0$. Тоді $h(a) \in \mathcal{L}^{2C}_1(W) \subset \mathcal{L}^{2C}_2(W)$, причому розподіл $h(a)$ буде рівномірно 2-м.п. в тому і тільки в тому випадку, коли вектор-функція $h(t,a) = h(a) * \varphi = \sum\limits_i h_i(a)\ \varphi(t-t_i): R \to W$ буде рівномірно м.п. по кожній з півнорм $|\cdot|_i$ для довільної $\varphi(t)$ з $\mathcal{D}^2_{L_1}$.

Наслідок. Припустимо

(C)
- (C1) $t_n = an + c_n$, де $a \neq 0$ і (c_n) - м.п. послідовність;
- (C2) послідовності $(h_i(a))$ рівномірно м.п. за Бором з кожної $|\cdot|_i$ і $\sup\limits_i \sup\limits_{a\in K} |h_i(a)|_w \leq C$.

Тоді сім'я розподілів $h(a) = \sum\limits_i h_i(a)\delta(t - t_i) \in AP_2(W)$ рівномірно з $a \in A$ майже періодична.

Розглянемо простір $F(K,\mathcal{L}^a_2)$ всіх рівномірно м.п. розподілів $g(a): K \to \mathcal{L}^a_2$ з метрикою $\sup\limits_{a\in K} \sigma(g(a),h(a))$ і множину $Cl(\tau_s h(a),\ s \in R) = H(h) \subset F(K,\mathcal{L}^a_2)$.

Лема. Припустимо (5) та рівномірну м.п. $h(a)$. Функція $\tau_s h$ неперервна за сукупністю змінних на $H(h)$, тому $(H(h),\tau_s h)$ є компактною мінімальною ізометричною динамічною системою.

Приведені далі твердження виділяють de facto найважливіші класи м.п. систем (I,2).

Лема. Припустимо (C). Якщо $g(a) \in H(h(a))$, то $g(a) = \sum_i g_i(a)\delta(t-p_i)$ для деяких $\{g_i(a)\}$, $\{p_i\}$ з властивостями (C). З збіжності $\tau_{\mu_n} h(a)$ до $g(a)$ в $H(h(a))$ випливає існування послідовності $\{\alpha(n),\ n \geqslant 0\}$ такої, що рівномірно по цілим i та $a \in A$

$$\lim_{n\to\infty} h_{i+a(n)}(a) \overset{\rho}{=} g_i(a), \quad \lim_{n\to\infty} (t_{i+a(n)} - \mu_i) = p_i.$$

Нехай $T(B,g) \overset{def}{=} \operatorname{supp} g \cap (-B,B)$ та для рівномірно м.п. міри h вірно (5) і

$$t_{i+1} - t_i \geqslant \delta > 0 \quad \forall\, i \in Z; \qquad (6)$$

(зауважимо, що при цьому умови (C) можуть не виконуватися).

Лема. Якщо $g(a) \in H(h(a))$, то $g(a) = \sum_i g_i(a)\delta(t-s_i)$ з $s_{i+1} - s_i \geqslant \delta$. Нехай $h^n(a) \to g(a)$ в $H(h(a))$, $A > 0$ і $T(A,g(a)) = \{p_1,\dots,p_N\}$. Тоді множину $T(A,h^k(a))$ можна занумерувати таким чином: $\{p_1^k,\dots,p_N^k,\dots,p_M^k\}$, що $\lim_{k\to\infty} p_i^k = p_i$ і рівномірно з $a \in K$ $h_i^k(a) \overset{\rho}{\to} g_i(a)$ $\forall\, 1 \leqslant i \leqslant N$; $h_j^k(a) \overset{\rho}{\to} 0$ коли $k \to \infty$, $j > N$ (якщо при деякому j послідовність $h_j^k(a)$ скінченна, доповнимо її нулями).

Відмітимо, що розглянуті вище класи м.п. розподілів не замкнені відносно додавання.

Нехай тепер X - рефлексивний сепарабельний банахів простір, підмножина $\{f_i\}$ є всюди щільною в X^*. Викладену вище схему ми застосуємо до розподілу h коли: а) $W = X$; $|h_j|_i = |\langle h_j, f_i\rangle|$; б) $W = \mathcal{L}(X^*)$; $|h_j|_i = \|h_j f_i\|_{X^*}$; в) W є простір $\mathcal{L}(X)$ з рівномірною операторною топологією; г) W є простір X з топологією норми.

Розподіл h ми будемо називати слабко, сильно або рівномірно м.п., якщо за простір W виберемо відповідно а); або б); або в), г).

Лема: Припустимо (5). Для слабкої [сильної] 2-м.п. h необхідна і достатня [сильна] майже періодичність функцій $a(t) = \sum_i h_i f\, \varphi(t - t_i)$ для довільних $\varphi(t) \in \mathcal{D}^2_{L_1}$ з компактним носієм та $\forall f \in X^*$. Розподіл h рівномірно 2-м.п. тоді і тільки тоді, коли функція $a_1(t) = \sum_i h_i \varphi(t - t_i)$ м.п. за нормою W $\forall \varphi(t) \in \mathcal{D}^2_{L_1}$ з компактним носієм.

В §§ II,I3 ми знову повертаємось до обговорення зв'язків між S- м.п. та V- м.п. функціями, але, взагалі, за умов, коли вони є розв'язками м.п. імпульсних систем. Важливо, що не обмежуючи загальності, в ряді випадків можна працювати з простішими просторами Степанова.

Теорема I8. Для того, щоб функція $x(t): R \to X$, рівномірно неперервна $\forall \varepsilon > 0$ на множині $\{t: |t - t_j| \geq \varepsilon\ \forall j\} \subset R$ була S - м.п. [була S-N- м.п.], є необхідною [є необхідним], а при $\zeta < \infty$ та $\sup_{t \in R} |x(t)| < \infty$ і достатньою її V-м.п. [і достатнім виконання приведених нижче умов α, β:

α) $\forall \varepsilon > 0,\ N > 0\ \exists$ відносно щільна множина $\mathfrak{M}_{\varepsilon,N}$ така, що $\forall \tau \in \mathfrak{M}_{\varepsilon,N}\ |x(t + \tau) - x(t)| < \varepsilon\ \forall t \in R: |t| \leq N,\ |t - t_k| > \varepsilon$;

β) $\forall \delta > 0,\ N > 0\ \exists \varepsilon > 0: \mathfrak{M}_{\varepsilon,N} \pm \mathfrak{M}_{\varepsilon,N} \subset \mathfrak{M}_{\delta,N}$.].

У I2 параграфі з'ясовується, коли імпульсна система (I,2), визначена в області $\mathcal{F} = R \times \Omega \subset R^{n+1}$, має там обмежені м.п. розв'язки чи розв'язки м.п. за Левітаном. При цьому припускаємо, що для $f(t,x)$ та h справджуються умови § 11. У випадку коли h має структуру, описану в одній з лем на с. I6, для м.п. систем можна довести принципи Жикова-Левітана:

Теорема 19. Нехай всі визначені в області $K \times R$ розв'язки $\{x(t,\alpha,G),\ t \in R,\ \alpha \in A\}$ системи G з оболонки $H(F)$ системи $F = $ (I,2) розділені між собою:

$$\inf_{t \in R} \int_t^{t+1} |x(u,\alpha_1,G) - x(u,\alpha_2,G)|\,du > 0 \quad \forall \alpha_1 \neq \alpha_2\ \forall G \in H(F);$$

причому для деяких $G \in H(F)$, $s \in R$ множина $M = \{x(s,\alpha,G), \alpha \in A\} \subset R^n$ є нульвимірною. Тоді обмежені розв'язки кожної з систем $(1,2)_G$, $G \in H(F)$ будуть S - м.п. (V - м.п.).

Наслідок. Нехай $x(t)$ - обмежений, рівномірно стійкий за Ляпуновим розв'язок м.п. системи (I,2). Нехай, крім того, він буде асимптотично стійким. Тоді цей розв'язок S-м.п. (V - м.п.).

Теорема 20. Припустимо, що в області $K \times R$ м.п. система (1,2) має лише єдиний обмежений розв'язок. Тоді він буде S-N-м.п.

Приведений в I2 параграфі приклад лінійної м. періодичної та експоненціально дихотомічної скалярної системи з єдиним обмеженим розв'язком $x(t)$ ($0 < x(t) < 2$, $c_i = \cos(i)/4$):

$$dx/dt = 0, \ \Delta x|_{t_i = i} = -x/2 + 1, \ \Delta x|_{\tau_i = i + c_i} = -x/2, \qquad (7)$$

показує,що при умовах, лише трохи відмінних від розглянутих,принцип Жикова (теорема I9) може вже не справджуватися. Система (7) не має S- м.п. розв'язків, не зважаючи на те, що носій міри h - - множина $T = \{t_i, \tau_i\}$ є сильно м.п.

Як ми бачимо, структура міри $h(x)$ відіграє дуже важливу роль при дослідженні питання про м.п. розв'язки (I,2); аналізуючи цю структуру, ми вводимо у § I2 означення простої міри: м.п. міра $h(x)$ є простою, якщо $\forall A > 0$ та $\tau_{s_k} h(x) \to h(x)$ в $H(h)$ $\exists k_0 \in N$: $\forall k \geq k_0$ множину $T(A, \tau_{s_k} h(x))$ можна занумерувати таким чином: $\{p_1^k, .., p_N^k, ..., p_{m(k)}^k\}$, що $p_i^k \to p_i$ $\forall i = \overline{1,N}$ та $\lim\limits_{k \to \infty} \sum\limits_{j > N}^{m(k)} \sup\limits_{x \in K} |h_j^k(x)| = 0$, де $T(A,h) = \{p_1 < .. < p_N\}$, $\tau_{s_k} h(x) = \sum\limits_{i \in Z} h_i^k(x) \delta(t - p_i^k)$, $h(x) = \sum\limits_{i \in Z} h_i(x) \delta(t - p_i)$.

Зауважимо, що за умови (6) або ((CI)+ $t_i < t_{i+1}$ $\forall i$) міра $h(x)$ проста. Розглянемо тепер нескінченну суму $h = \sum\limits_{k \geq 1} h^k(x)$ простих мір $h^k(x) = \sum\limits_{i \in Z} h_i^k(x) \delta(t - t_i^k)$ (зауважимо, носій h може мати скінченні граничні точки), задовільняючих наступній умові (D):

$$t_1^k \neq t_s^j \ \forall\ k \neq j, \ \sup_{t\in R} \sum_{\substack{t_1^k \in [t,\,t+1] \\ k \geq d}} \sup_{x\in K} |h_1^k(x)|^{\nu} = \mu(d) \xrightarrow{d\to\infty} 0. \qquad (D)$$

Наступна теорема дозволяє пояснити приведений на попередній сторінці приклад.

Теорема 21. Нехай $\sup\limits_{t\in R} \sum\limits_{t_1\in[t,\,t+1]} \sup\limits_{x\in K} |h_1(x)| = \nu < \infty$ та справедлива умова (D) (чи $h_1(x) \equiv h_1$ не залежить від x). Тоді, якщо система (I,2) має єдиний обмежений розв'язок, то він буде S-N-м.п. за Левітаном.

Якщо h не залежить від x, то систему (I,2) можна дослідити значно повніше завдяки комутації операторів H_1:

Теорема 22. Розглянемо лінійну імпульсну систему

$$dx/dt = A(t)x + g(t),$$

$$\Delta x|_{t_1} = h_1, \ 1 \in Z, \ t \in R, \ x \in R^n,$$

де $A(t)$, $g(t)$ – локально сумовні функції, $A(t)$ – S -м.п. функція, міра $h = g(t)+\sum\limits_1 h_1\delta(t - t_1)$ 2 - м.п. і функція $\sum\limits_{t_1\in[t,\,t+1]} |h_1| + \int\limits_t^{t+1}|g(u)|du$ обмежена на R. Ця система має обмежений S-м.п. розв'язок $x(t)$ (до того ж і V- м.п., якщо $\zeta < +\infty$ і функція $\int\limits_0^t g(u)du$ рівномірно неперервна на R), якщо виконується одна з умов 1), 2):

1) перше рівняння системи експоненціально дихотомичне (тоді $x(t)$ буде і єдиним обмеженим розв'язком);

2) імпульсна система має обмежений при $t \geq 0$ розв'язок та $\forall\ t,\tau$ $\|U(t,\tau)\| \leq C$, де $U(t,\tau)$ є функцією Коші першого рівняння системи.

В 13 параграфі розглянута м.п. задача для лінійної системи

$$dx/dt = A(t)x + f(t), \qquad (8)$$

$$\Delta x|_{t_1} = B_1 x + h_1, \ 1 \in Z, \ t \in R. \qquad (9)$$

де $(X,|\cdot|)$ – рефлексивний сепарабельний банахів простір, $B_1 \in \mathcal{L}(X)$; B- простір D – щільно та неперервно вкладений в X; $A(t)$ – сім'я замкнених операторів з областю визначення $D(A(t)) = D$. Досліджені як слабо м.п., так і компактні м.п. розв'язки цієї системи. В окремому випадку подібна задача вивчалась О.А. Панковим. Запропоновані нами методи дозволяють проаналізувати більш загальний випадок і, зокрема, відповісти на деякі поставлені раніше запитання.

Отже, нехай зростаюча послідовність $(t_i)_{i\in Z}$ задовільняє вимозі $(\mathcal{C})$, (або замість неї нерівності (6)) та виконані основні припущення $(\mathcal{E})$ $\mathcal{E}$ 0: Система (8,9) має обмежений при $t \geqslant 0$ розв'язок. $\mathcal{E}$ 1. Для деякого $C \geqslant 0$ $\sup\limits_{t\in R} \sum\limits_{t_i\in[t,t+1]} (|h_i| + \|B_i\|_{\mathcal{L}(X)}) \leqslant C$, розподіли $h = \sum\limits_i h_i\delta(t - t_i)$ та $B^* = \sum\limits_i B_i^*\delta(t - t_i)$ відповідно слабко та сильно 2-м.п. $\mathcal{E}$ 2. $A(t):R \to Z_1$ та $f(t):R \to Z_2$ є неперервні м.п. функції з значеннями в деяких повних метричних просторах Z_1, Z_2. $\mathcal{E}$ 3. Нехай $d = (A(t), f(t))$, рівняння (8) позначимо як $(8)_d$. Розглянемо замикання траєкторії $\{(A(t + s), f(t + s)),\ s \in R\}$ в $C(R,Z_1) \times C(R,Z_2)$. Кожному елементу e з цього замикання $H(d)$ відповідає рівняння типу (8), на $H(d)$ визначена мінімальна ізометрична динамічна система зсувів $\tau_s(e)$. Припустимо, що початкова задача $x(0) = x$ для цього рівняння має при $t \geqslant 0$ єдиний сильно неперервний розв'язок $S_e(t)x$. Функцію $S_e(t)x$ будемо вважати неперервною з e, x при фіксованому t, якщо X наділити слабкою топологією.

Зв'язок між скалярно м.п. за Степановим та скалярно м.п. за Векслером розв'язками імпульсної системи описує слідуюча

Лема. Нехай розв'язок $x(t)$ системи (8,9) є рівномірно по t обмеженим, виконується умова $\mathcal{E}3$ та $\zeta < +\infty$. Тоді скалярна S-м.п. функції $x(t)$ еквівалентна її скалярній V-м.п.

Використовуючи методи теорії Фавара, розвинуті В.В. Жиковим, доводимо наступний результат:

Теорема 23. Нехай будь-який ненульовий обмежений розв'язок $x = x(s)$ кожної з однорідних імпульсних систем G_{hom} є піввідокремленим від нуля:

$$\varliminf_{t\to -\infty} \int_t^{t+1} \|x(s)\| ds > 0,\ \theta > 0 \quad \forall\, G_{hom}$$

Тоді існує скалярно S-м.п. (V-м.п.) розв'язок (8,9).

Щоб отримати умови існування сильно м.п. розв'язків (8,9), потрібно накладати більш строгі, ніж в $\mathcal{E}3$, вимоги неперервності:

$\mathcal{E}$ 4. Нехай означена в $\mathcal{E}3$ функція $S_e(t)$ є сильно неперервною за сукупністю змінних та рівномірно з е виконується нерівність

$$\|S_e(t)x\| \leqslant \lambda_1(t)\|x\| + r_1(t)$$

з неспадними додатніми функціями $\lambda_1(t)$, $r_1(t)$.

Зауважимо, що $\mathcal{E}4$ виконується, якщо $f(t)$ м.п. функція і I) $A(t) = A + B(t)$, де A є генератором сильно неперервної півгрупи, а $B(t):R \to \mathcal{L}(X)$ рівномірно м.п. або II) функція $A(t):R \to \mathcal{L}(D,X)$ є м.п., а задача Коші для (8) є рівномірно коректна на будь-якому відрізку, причому еволюційний оператор (8) за нормами $\mathcal{L}(X)$ та $\mathcal{L}(D)$ підпорядковується умові експоненціального зростання.

Спочатку в роботі ми досліджуємо деяку неперервну півгрупу $S^t(e,x) = (h(t)e,\ S_e(t)x)$, що є розширенням (не обов'язково лінійним) компактної мінімальної динамічної системи $(H,h(t))$ і задовільняє умову

($\mathcal{F}$) функція $S_e(t)x$ неперервна з е при будь-яких фіксованих t, x і неперервна з $t \geqslant 0$ при довільних фіксованих e, x. Крім того, припустимо, що функція $\mu_r(a) = \sup\limits_{B} \|S_e(t)x - S_e(t)y\|$, де $B = \{t \geqslant 0, e \in H, x,y \in U_r(0): \|x - y\| \leqslant a\}$ скінченна і монотонно спадає до 0, коли а спадає до 0.

Наступне твердження послаблює потрібну в лемі про компактність В.В. Жикова (див. Левитан Б.М., Жиков В.В. "Почти периодические функции и дифференциальные уравнения." М.,1978. - 208 с.) рівномірну неперервність з е функції $S_e(t)x$ при фіксованому t рівномірно з x, що належать обмеженим підмножинам X.

Лема. Нехай є справедливою умова ($\mathcal{F}$) і слабко неперервна на H функція $u(e):H \to X$ задає інваріантну множину півгрупи S^t. Тоді $u(e)$ є сильно неперервною.

Наслідок. Нехай виконується ($\mathcal{F}$) та $(H,h(t))$ є мінімальною ізометричною д.с. Тоді слабко рекурентна за Біркгофом траєкторія $(h(t)e,\ x(t))$ півгрупи S^t буде компактною.

Наслідок. Нехай $\mathcal{E}0$, $\mathcal{E}3$ справджуються для (8) (коли $B_1 = 0$, $h_1 = 0$), причому функція $S_e(t)x$ є сильно неперервною при будь-якому фіксованому t. Нехай також для однорідного рівняння (8) його еволюційний оператор $\mathcal{U}(t,\tau)$ є рівномірно обмеженим за нормою в півплощині $t \geq \tau$. Тоді у (8) існує не менше одного м.п. розв'язку.

Зауважимо, що приведені вище результати дозволяють підсилити теореми дискретного аналогу теорії Фавара, доведені О.А. Панковим в роботі "К теории Фавара для импульсных эволюционных уравнений" //Rev. roum. math. pures et appl.,1982,t. XXV, № 3, P.385-401.

Теорема 24. Нехай розподіли B та h відповідно сильно та рівномірно м.п.,мають місце умови $\mathcal{E}0$ - $\mathcal{E}4$ і існує $l > 0$ таке, що для будь-якого розв'язку однорідної імпульсної системи, що виходить з (8,9), є вірною нерівність $|x(t)| \leq l|x(t_0)|$ $\forall\ t \geq t_0$. Тоді неоднорідна система (8,9) має не менше, ніж один S-м.п. розв'язок.

Теорема 25. Нехай справджуються умови теореми 23 і $(D, \|\cdot\|)$ є компактно вкладеним в X простором Банаха, причому рівномірно з е $\|S_e(t)x\| < C_1(t)|x| + C_2(t)$ $\forall\ t > 0$. Тоді існує S - м.п. розв'язок (8,9).

В § 14 досліджуються одноударні імпульсні T-періодичні системи у банаховому просторі $(X, |\cdot|)$:

$$
\begin{aligned}
&dx/dt = - Ax + f(t,x),\\
&\Delta x|_{t_1(x)} = B_1 x + g_1(x),
\end{aligned}
\tag{10}
$$

де A - секторіальний оператор (причому $\mathrm{Re}\,\sigma(A) > a > 0$) і оператори B_1, взагалі кажучи, необмежені. Розглянемо для $\alpha \geq 0$ простори $X^\alpha = D(A^\alpha)$ в нормою $|x|_\alpha = |A^\alpha x|$, нехай $U^\alpha_\rho = \{x: |x|_\alpha \leq \rho\}$.

Теорема 26. Нехай $B_1 \in \mathcal{L}(X^\gamma, X^\beta)$, де $1 \geq \gamma \geq \beta \geq \alpha$. Припустимо, що: $\delta = 0$, якщо $\gamma < 1$ чи $B_1 = 0\ \forall\ 1$; $\delta > 0$, якщо $\gamma = 1$; в області $W = U^\alpha_\rho \times R$ функції $f(t,x)$: $W \to X^\delta$; $g_1(x): U^\alpha_\rho \to X^\alpha$ і $t_1(x): U^\alpha_\rho \to R$ задовільняють умовам:

1) $|t_1(x) - t_1(y)| \leq n\ |x - y|_\alpha$;

2) $\exists\ M > 0,\ \theta \in (0,1)$: $\|f(t,x) - f(s,x)\| \leq m|t - s|^\theta$;

3) $\exists\, p,q > 0$: $|f(t,x) - f(t,y)|_\theta \leqslant p\, |x - y|_\alpha \;\forall\, t$;

$|g_i(x) - g_i(y)|_\alpha \leqslant q\, |x - y|_\alpha \;\forall\, i$;

4) $|f(t,0)|_\theta \leqslant M$, $|g_i(0)|_\alpha \leqslant Q \;\forall\, t, i$.

Якщо спектр $\sigma(X(T))$ оператора Пуанкаре лінійної частини

$$dx/dt + Ax = 0, \qquad \Delta x|_{t_i(0)} = B_i x$$

системи (10) не містить одиниці, то при достатньо малих M, Q, q, p ця система має в деякому околі нуля T - періодичний розв'язок.

Якщо ж до того маємо α) $n = 0$; або β) число m є достатньо малим, $\theta = 1$, а функції $g_i(x)$ обмежені в деякому околі 0 за нормою $|\cdot|_æ$, $æ > \alpha$; то цей розв'язок буде і єдиним. Для його експоненціальної стійкості в цьому випадку достатньо, щоб $\sigma(X(T))$ належав внутрішності одиничного круга.

Основні положення дисертації опубліковані в наступних роботах:

1. Трофимчук С.И. Линейные расширения динамических систем на компактных пространствах. Некоторые вопросы приводимости/ Препринт 85.66, Изд-во ИМ АН УССР, 1985 г.
2. Трофимчук С.И. Достаточные условия отсутствия "биений" в импульсных системах // Дифференциальные уравнения с параметром. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. - С. 133-139.
3. Трофимчук С.И. Достаточные условия отсутствия "биений" в импульсных системах/Тез. докл. школы-семинара. - В кн. "Разр. динамические системы" - Киев, Ин-т математики АН УССР, 1989. - С. 56-57.
4. Трофимчук С.И. Кусочно-непрерывные почти периодические функции и разрывные динамические системы //Нелинейные проблемы теории дифференциальных уравнений. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. С. 16-20.
5. Трофимчук С.И. Импульсные линейные расширения //Асимптотические решения нелинейных уравнений с малым параметром. - Киев: Ин-т ма- матики АН УССР, 1991. С. 124-131.
6. Трофимчук С.И., Трофимчук Е.П. Импульсные системы с фиксированными моментами толчков общего расположения: существование, единственность решения и корректность задачи Коши// Укр. мат. журн. - 1990. - 42, n. 2. - С. 230-237.

7. Трофимчук С.И., Трофимчук Е.П. Импульсные системы с фиксированными моментами толчков общего расположения: структура множества моментов толчков // Укр. мат. журн. - 1990. - 42, п. 3. - С. 378-383.

8. Трофимчук С.И. Факторизация разрывных динамических систем/ Тез. докл. научной школы - семинара. - В кн.: Разрывные динамические системы. - Киев: Общество "Знание" Украины, 1991. - С. 68.

9. Трофимчук С.И. Необграниченные функции с ограниченными и равномерно непрерывными на R разностями// Доклады АН Украины, с А, 1993, № 5, С. 24-25.

10. Trofimchuk S. Abstract impulsive systems and their almost periodic solutions// Abstracts of first Ukrainian-American Mathematical School "Differential equations and their applications" (Ukraine, Crimea, Sudak, June 1-10, 1993), P. 55.

11. Trofimchuk S. Almost periodic solutions of the abstract impulsive systems // Abstracts of International Mieeting on Ordinary Differential Equations and their Applications. - Firenze, Italy, September 20-24, 1993. - P. 155.

12. Samoilenko A., Trofimchuk S. Almost periodic generalized impulsive systems//Abstracts, EQUADIFF 8, Czecho-slovak conference on differential equations and their applications, August 24-28,1993, Comenius University, Bratislava,Slovak

13. Самойленко А.М., Трофимчук С.И. Неограниченные функции с почти периодическими разностями// Укр. мат. журн. - 1991. - 43, № 10. - С. 1409 - 1413.

14. Самойленко А.М.,Трофимчук С.И. О пространствах кусочно непрерывных почти периодических функций и почти периодических множеств на прямой .I//Укр.мат.журн. - 1991.-43,№12.- 1613-1619.

15. Самойленко А.М.,Трофимчук С.И. О пространствах кусочно непрерывных почти периодических функций и почти периодических множеств на прямой .II//Укр.мат.журн. - 1992. -44,№3.-С. 412-423.

16. Самойленко А.М.,Трофимчук С.И. О теории Фавара для п.п. импульсных систем//Тезисы докладов школы в кн. "Современные методы в теории краевых задач", г. Воронеж, 4-8 мая 1992 г.

17. Самойленко А.М.,Трофимчук С.И. Почти периодические импульсные системы//Дифференц. уравнения. - 1993.- т. 29, № 5. С. 799-808.

18. Самойленко А.М., Перестюк Н.А., Трофимчук С.И. Проблема "биений" в импульсных системах. - Киев, 1990. - 47 с. -(Препр./ АН УССР. Ин-т математики).

19. Самойленко А.М., Перестюк Н.А., Трофимчук С.И. Обобщенные решения импульсных систем и явление биений//Укр.мат.журн. - 1991. -43, №5.- С. 657-663.

20. Роговченко Ю.В., Трофимчук С.И. Периодические решения слабо нелинейных уравнений в частных производных параболического типа с импульсным воздействием и их устойчивость.-Киев, 1986. -44 с.- (Препр./ АН УССР. Ин-т математики; 86.65).

21. Роговченко Ю.В., Трофимчук С.И. Ограниченные и периодические решения слабо нелинейных импульсных эволюционных систем//Укр. мат.журн.-1987.-39,№ 2.С.260-264.

22. Роговченко Ю.В., Трофимчук С.И. Исследование регулярных импульсных систем// Abstracts of invited lectures and short commun. of the XI Int. conference on nonlinear oscillations 1987.

23. Роговченко Ю.В., Трофимчук С.И. О некоторых достаточных условиях отсутствия "биений" в импульсных системах//Применение асимптотических методов в теории нелинейных дифференциальных уравнений - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. - С. 78-84.

24. Роговченко Ю.В., Трофимчук С.И. Периодические решения слабо нелинейных систем с импульсным воздействием// Укр.мат.журн.- 1989. - 41, №5. С.622-626.

25. Роговченко Ю.В., Трофимчук С.И. Ограниченные решения слабонелинейных импульсных систем //Вопросы устойчивости интегральных многообразий в уравнениях математической физики - - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. С 69-73.

Підп. до руку 10.01.94 . Формат 60×84I16. Папір друк. Офс. друк.
У . др. к. арк. 1,39 . Ум. фарбо-відб. 1,39 Обл.-вид. арк. 1,2
Тираж I00 пр. Зам. 34 Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики АН України
252601 Київ 4, ГСП, вул. Терещенківська, 3