

ОДЕССКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. И. И. МЕЧНИКОВА

На правах рукописи

ГРИБОВА ВИКТОРИЯ ВЛАДИМИРОВНА

ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИИ ПЛАСТИН  
ПРИ НАЛИЧИИ ТОНКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ И ОПОР

01.02.04 - механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Диссертация является рукописью.

Работа выполнена на кафедре методов математической физики Одесского государственного университета.

Научные руководители: доктор физико-математических наук  
Гнучий Ю.В.,  
доктор физико-математических наук,  
профессор О.В.Онишук.

Официальные оппоненты: доктор технических наук,  
профессор Гришин В.А.,  
кандидат физико-математических наук,  
доцент Грибняк С.Т.

Ведущая организация: Львовский институт прикладных проблем  
механики и математики АН Украины.

Защита диссертации состоится 22 апреля 1994 г.  
в 16 часов на заседании специализированного совета, шифр  
К 05.01.02, по физико-математическим наукам /математика/ в  
Одесском государственном университете /270100, г.Одесса,  
ул.Петра Великого 2/.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке  
университета /270100, г.Одесса, ул.Советской Армии, 24 /.

Автореферат разослан 18 марта 1994 г.

Ученый секретарь  
специализированного совета

А.И.Третьяк

ЛНБ ім. В. Стефаніка  
АН України

ОПЗ РМ. 80X 85-100 11.03.94

ЛНБ України ім.В.Стефаніка



00801537 (0)

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Широкое использование конструкций в виде пластин и оболочек в машиностроении, кораблестроении, приборостроении и других отраслях народного хозяйства делает актуальным исследование на прочность и жесткость элементов этих конструкций. Наличие в конструкциях подкрепляющих отержней, опор, прямолинейных дефектов типа трещин и включений или других неоднородностей значительно усложняет их расчет, так как перечисленные элементы в конструкциях являются концентраторами напряжений и линия контакта пластины с опорой либо ребром жесткости является линейным дефектом, при переходе через который наблюдается разрыв непрерывности основных величин, характеризующих напряженно-деформированное состояние пластины. Этим определяется актуальность темы диссертации, посвященной разработке эффективных методов расчета пластин при наличии в области линейного дефекта и решению на основе этих методов ряда новых задач.

Тема диссертации является составной частью научной тематики "Краевые задачи математической физики с усложненными граничными условиями и дефектами типа разрезов и тонких включений", которой кафедра методов математической физики Одесского госуниверситета занимается в соответствии с планом фундаментальных исследований в области естественных и общественных наук АН Украины, № госрегистрации 01860083955.

Обзор состояния проблемы. Традиционным методом при решении краевых задач для бигармонического уравнения, описывающего изгиб пластин, содержащих дефекты типа тонких включений, является метод, основанный на сведении задач к интегральным уравнениям относительно контактных усилий с последующим их решением в классе функций с неинтегрируемыми особенностями с привлечением аппарата регуляризации расходящихся интегралов. Исследования в этом направлении были начаты В.М.Толкачевым, развиты О.В.Онищуком, Г.Я.Поповым и продолжены в работах С.Т.Грибняка, Ю.С.Процорова, В.В.Реута, П.Г.Фаршайта и некоторых других авторов. К интегральным уравнениям относительно вспомогательной функции с интегрируемыми особенностями задачи для бесконечных пластин с включениями сводились в работах Д.В.Грилицкого, М.С.Драгана, В.К.Опанасовича, И.П.Шацкого и других. Сведение задачи к интегральным уравнениям возможно в тех случаях, когда удается построить функцию Грина для заданных областей и граничных условий. Без учета степенных

особенностей в решении задачи для пластин с включениями решались методом конечных элементов Ю.Б.Гнучим, Л.В.Масловой, А.П.Филипповичем и другими.

Целью работы является: 1) дальнейшая разработка и детализация методов решения задач упругого равновесия пластин с линейным включением либо опорой, один или оба конца которых находятся внутри пластины; 2) решение ряда новых задач для пластин с линейными дефектами.

Методика решения краевых задач, используемая в диссертации, состоит в следующем: минуя стадию сведения задачи к интегральному уравнению относительно контактных усилий и решения этого уравнения, прогибы пластины  $w(x,y)$  записываются в виде линейной комбинации решений уравнения  $\Delta^2 w = 0$  в области  $\Omega$ , занимаемой пластиной :

$$w(x,y) = w_q(x,y) + \sum_{i=1}^N a_i u_i(x,y) \quad (1)$$

$w_q(x,y)$  - частное решение уравнения  $\Delta^2 w = q$ ,  $u_i(x,y)$  ( $i=\overline{1, N}$ ) - полная система решений уравнения  $\Delta^2 w = 0$  в области  $\Omega$ , коэффициенты  $a_i$  ( $i=\overline{1, N}$ ) находятся при удовлетворении граничным условиям.

Таким образом, решение краевых задач распадается на два этапа :

- 1) построение функций  $u_i(x,y)$  ( $i=\overline{1, N}$ );
- 2) нахождение коэффициентов  $a_i$  ( $i=\overline{1, N}$ );

В диссертации новые подходы используются для реализации обоих этих этапов.

Научная новизна и основные результаты, выносимые на защиту.

1. Получена система решений бигармонического уравнения в области с тонким линейным включением на отрезке.

2. Получена система решений бигармонического уравнения в области с тонкой линейной опорой на отрезке, выходящем на защемленную границу.

3. Сформулирован новый метод удовлетворения граничным условиям для пластин, защемленных по контуру либо с нагруженными

аями, основанный на идее минимизации погрешности по энергии.

4. На основе полученных результатов решен ряд задач: задача об изгибе прямоугольной пластины с линейным включением, защемленной по внешнему контуру (данная задача решена, по-видимому, впервые), а также, пластины с условиями шарнирного опирания на внешней границе. Исследовано влияние геометрических параметров пластины и включения на величину проседания пластины.

5. Решен ряд новых задач об изгибе пластин с линейной опорой, одним концом выходящей на защемленную границу. Проведен сравнительный анализ поведения основных физических величин: прогибов, изгибающих моментов, обобщенных перерезывающих сил для пластин с различными граничными условиями и при различных соотношениях геометрических параметров пластины и длины опоры.

Практическая ценность. Полученные результаты могут быть использованы в инженерной практике для расчета элементов машиностроительных конструкций, подкрепленных ребрами жесткости.

Апробация работы и публикации. Результаты диссертационной работы докладывались на республиканской научной конференции Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения, Одесса, ОГУ, 1987; на II Республиканской научно-технической конференции Механика машиностроения. Секция мех. деф. тверд. тела. Брежнев, 1987, на IV Всесоюзной конференции Смешанные задачи механики деформируемого тела. Одесса, 1989; на Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Казань: КГУ, 1990; на семинаре по методам математической физики ОГУ (руководитель проф. Попов Г.Я.), на семинаре кафедры высшей математики №2 ОГПУ (руководитель проф. Усов А.В.).

По теме диссертации опубликовано восемь научных работ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, приложения и списка литературы, содержащего 255 наименований и занимает 120 страниц машинописного текста, 2 таблицы и 14 рисунков.

#### ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность проблемы и дан краткий обзор работ, посвященных решению задач, близких к рассмотренным в диссертации. Сделана краткая аннотация глав, сформулированы основные научные положения, которые выносятся на защиту.

Первая глава посвящена изложению методов удовлетворения дифференциальному уравнению и граничным условиям краевых задач, рассматриваемых в диссертации. В §1 главы приведены необходимые сведения о полных системах решений дифференциального уравнения, рассматриваемого в некоторой области  $\Omega$ , в частности приведены примеры полных систем решений гармонического и бигармонического уравнений в односвязной области  $\Omega$ . В §2 описан новый метод удовлетворения граничным условиям краевой задачи, названный методом минимизации погрешности по энергии. Данный метод решения краевых задач может быть применен для уравнения изгиба пластин

$$\Delta^2 w(x,y) = q(x,y) \quad ((x,y) \in \Omega) \quad (2)$$

в случае защемления пластины по границе :

$$w|_{\Gamma} = f_0(s), \quad \frac{\partial w}{\partial n}|_{\Gamma} = f_1(s) \quad ((x,y) \in \Gamma = \partial\Omega) \quad (3)$$

либо задания на границе изгибающих моментов  $Mw$  и обобщенных перерезывающих сил  $Vw$  :

$$Mw|_{\Gamma} = f_2(s), \quad Vw|_{\Gamma} = f_3(s) \quad ((x,y) \in \Gamma = \partial\Omega) \quad (4)$$

Пусть  $w(x,y)$  - точное,  $w_N(x,y)$  - приближенное решение задач (2), (3) или (2), (4). Согласно изложенному в §1 главы I,  $w_N(x,y)$  можно представить в виде :

$$w_N(x,y) = \sum_{t=1}^N c_t u_t(x,y) + w_q(x,y) \quad (5)$$

где  $w_q(x,y)$  - частное решение уравнения (2),

$u_t(x,y)$  ( $t=1, \dots, N$ ) - полная система решений бигармонического уравнения в области  $\Omega$ .

Неизвестные коэффициенты  $c_t$  ( $t=1, N$ ) используются для наилучшего (в указанном ниже смысле) удовлетворения краевым условиям (3) или (4).

В основе метода минимизации погрешности по энергии лежит тождество :

$$E_{\Omega}(u, v) = E_{\Gamma}(u, v) \quad (6)$$

$$E_{\Omega}(u, v) = \iint_{\Omega} \left[ \Delta u \Delta v + (1-\nu) \left( 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right] d\Omega$$

$$E_{\Gamma}(u, v) = \oint_{\Gamma} \left( \frac{\partial u}{\partial n} Mv - uVv \right) ds + \iint_{\Omega} u \Delta^2 v d\Omega$$

позволяющее вычислить  $E_{\Omega}(u, v)$  для неизвестного точного решения  $u(x, y)$  и известной бигармонической функции  $v(x, y)$  ( $\Delta^2 v = 0$ ). При этом

$$E_{\Omega}(u, u) = W(u). \quad (7)$$

$W(u)$  пропорционально потенциальной энергии изгиба тонкой пластины

$$\iint_{\Omega} \left( (\Delta u)^2 - 2(1-\nu) \left( u''_{xx} u''_{yy} - (u''_{xy})^2 \right) \right) d\Omega \quad (8)$$

$u$  - прогиб пластины,  $\nu$  - коэффициент Пуассона.

Неизвестные коэффициенты  $c$  ( $n=1, N$ ) найдутся из условия минимума функционала энергии погрешности

$$F(c_1, \dots, c_n) = E(w - w_N, w - w_N) \quad (9)$$

где  $w$  - неизвестное точное,  $w_N$  - приближенное решение задач (2), (3) или (2), (4).

В §3 главы I описан другой известный метод удовлетворения граничным условиям - метод граничной коллокации, применимый для самых разных областей, занимаемых пластинами и типов граничных условий.

Методы удовлетворения граничным условиям, описанные в I главе, могут быть применены для пластин с включением. Для этого необходимо построить систему решений бигармонического уравнения, учитывающую особенности контактных усилий на концах включения. Такая система функций построена в главе II на основе интеграль-

ного представления прогиба, полученного в работах Полова Г.Я. и Онищука О.В.. Методика, предложенная во II главе, позволяет легко находить прогибы, изгибающие моменты, обобщенные перерезывающие силы по всей области, занимаемой пластиной.

Построения, проведенные в §§1,2 этой главы, могут быть сформулированы в виде следующего утверждения:

Теорема 1. Пусть:

1).  $\Omega$  - ограниченная двусвязная область с разрезом  $y=0$ ,  $-c < x < c$  на плоскости  $(x, y)$ .

2). функция  $w(x, y)$  удовлетворяет бигармоническому уравнению  $\Delta^2 w = 0$  в области  $\Omega$ , кроме точек разреза  $y=0$ ,  $-c < x < c$ .

3). функция  $w(x, y)$  ограничена вместе с производными до третьего порядка включительно в  $\bar{\Omega}$ , кроме окрестностей точек  $y=0$ ,  $x = \pm c$ , где имеют место оценки

$$\left| \frac{\partial^3 w}{\partial x^t \partial y^{3-t}} \right| \leq \frac{C_{1,2}}{((x \mp c)^2 + y^2)^{3/2}} \quad (t=0, 3)$$

Тогда:

$$w(x, y) = w_\psi(x, y) + w_\chi(x, y) + w_0(x, y) \quad (10)$$

$$w_\psi(x, y) = \psi_0 \operatorname{Re} \left\{ (z\bar{z} + \frac{1}{2}) \ln(z + (z^2 - 1)^{1/2}) - \right. \\ \left. - \frac{3}{2} z(z^2 - 1)^{1/2} + 2ty(z^2 - 1)^{1/2} \right\} \\ + \psi \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \ln(z + (z^2 - 1)^{1/2}) - (z^2 - 1)^{1/2} \right\} + \\ + \psi_2 \operatorname{Re} \left\{ \ln(z + (z^2 - 1)^{1/2}) - z(z^2 - 1)^{1/2} + 2ty(z^2 - 1)^{1/2} \right\} +$$

$$+ \sum_{n=3}^{\infty} \psi_n \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2(n-2)} (z^2-1)^{\frac{3}{2}} P_{n-3}^{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}}(z) - ty(z^2-1)^{\frac{1}{2}} P_{n-2}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(z) \right]$$

$$w_{\chi}(x, y) = \chi_0 \operatorname{Re} \left\{ -(1+\nu)(\ln(z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}) - z(z^2-1)^{\frac{1}{2}} + (1-\nu)2ty(z^2-1)^{\frac{1}{2}} \right\} +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi_n \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2n} (1+\nu)(z^2-1)^{\frac{3}{2}} P_{n-1}^{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}}(z) + (1-\nu)ty(z^2-1)^{\frac{1}{2}} P_n^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(z) \right\}$$

$$w_0(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( a_n \operatorname{Re}(z^n) + b_n \operatorname{Re}(\bar{z}z^{n+1}) \right), \quad z=x+iy, \quad \bar{z}=x-iy$$

Заменяя многочлены Якоби соответствующими степенями  $z$ , получаем более простое для вычислений представление бигармонической функции в области с включением на отрезке  $y = 0, -1 < x < 1$ :

$$w(x, y) = \sum_{n=0}^N a_n u_n(x, y) \quad (11)$$

$$u_0(x, y) = \operatorname{Re} \left( \ln(z + (z^2-1)^{\frac{1}{2}}) - z(z^2-1)^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$u_1(x, y) = \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \ln(z + (z^2-1)^{\frac{1}{2}}) \right)$$

$$u_2(x, y) = \operatorname{Re} \left( (\bar{z}z - 1) \ln(z + (z^2-1)^{\frac{1}{2}}) \right)$$

$$u_{4n-1}(x, y) = \operatorname{Re} \left( z^{n-1} (z^2-1)^{\frac{3}{2}} \right), \quad (n = \overline{1, N})$$

$$u_{4n+4}(x, y) = \operatorname{Re} \left( 2t y z^n (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \right), \quad (n = 0, \overline{N})$$

$$u_{4n+1}(x, y) = \operatorname{Re} z^{n-1}, \quad (n = \overline{1, N})$$

$$u_{4n+2}(x, y) = \operatorname{Re} z z^{-n}, \quad (n = \overline{1, N})$$

§3 гл. II посвящен решению задачи об изгибе прямоугольной, заземленной по контуру, пластины с тонким линейным включением на отрезке  $y=0, -1 < x < 1$ . Данная задача решена, по-видимому, впервые. Прогибы разыскиваются в виде (11). Неизвестные коэффициенты  $A_k (k=1, N)$  отыскивались двумя способами: 1) методом минимизации погрешности по энергии; 2) методом граничной коллокации.

Расчеты были проведены для квадратных пластин ( $a=b$ ) при относительной длине включения  $\varepsilon=c/a$ , равной  $0,66; 0,5; 0,2; 0,1$ .

Полученные значения прогибов, изгибающих моментов, перерезывающих сил, а также, значение равнодействующей скачка перерезывающих сил на включении, вычисленные двумя способами, практически совпали. Вычислены также коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) около концов включения.

На рис. 1 приведено распределение прогибов для пластины с размерами  $a=b=2, \varepsilon=c/a=0,5$ . Прогибы максимальны на включении, где они равны  $W_0 = 1$ , и уменьшаются до нуля на контуре пластины, что свидетельствует о хорошем удовлетворении граничным условиям задачи обоими методами.

Графики изгибающих моментов  $M_x, M_y$  вдоль линии  $y=+0, 0 < x < a$  приведены на рис. 2. При  $(x, y) \rightarrow (1, 0)$   $M_x, M_y$  стремятся к бесконечности как  $r^{-1/2}$ ,  $r = ((x-1)^2 + y^2)^{1/2}$ . На рис. 3, 4 приведены эпюры КИН  $K_x, K_y$ . Качественная картина аналогична результатам

работы Бережницкого Л.Т., Делявского М.В., Панасюка В.В., где рассматривались бесконечные пластины.

Отметим, что данная задача является новой и не может быть решена методом, использованным в работах Попова Г.Я., Онищука О.В., поскольку функцию Грина для условий заземления в явном виде построить не удается.

В §4 гл. II решена задача об изгибе прямоугольной, шарнирно-

опертой по внешнему контуру, пластины с линейным включением на отрезке  $y=0, -1 < x < 1$ .

Прогибы разыскивались в виде (10) и (11), неизвестные коэффициенты  $A_k$  отыскивались методом граничной коллокации.

Расчеты были проведены для квадратных пластин ( $a=b$ ) при относительной длине включения  $\varepsilon=c/a$ , равной  $0,66; 0,5; 0,2; 0,1$ . Результаты, полученные с помощью представлений (10) и (11) хорошо согласуются между собой.

Распределение прогибов для пластины с размерами  $a=b=2, \varepsilon=0,5$  показано на рис.5. Прогибы максимальны на включении, где они равны  $W_0 = 1$ , и уменьшаются до нуля на контуре пластины. Как и следовало ожидать, при одинаковой равнодействующей включение в защемленной пластине проседает на значительно меньшую величину, чем в шарнирно-опертой. Графики изгибающих моментов  $M_x, M_y$  вдоль линии  $y=0, 0 < x < a$  приведены на рис.6, КИН - на рис.7,8. Значения равнодействующей совпали с результатами работы Онищука О.В., Попова Г.Я., где методом интегральных преобразований аналогичная задача была сведена к интегральному уравнению.

Глава III посвящена решению задачи об изгибе пластины с тонким включением (опорой), выходящим одним концом на защемленную границу. На этом конце поведение перерезывающих сил меняется с неинтегрируемой особенностью порядка  $-3/2$  на довольно сложную асимптотику, характерную для задач с пересекающимися дефектами и дефектами, выходящими на границу области. Решению задач такого типа посвящено большое число работ. Рассмотренные в диссертации задачи решаются впервые (исключение составляет задача В, которая при некоторых ограничениях на параметры была решена в работе Онищука О.В., Попова Г.Я., Фаршайта П.Г. методом сведения к интегральному уравнению).

Глава состоит из четырех параграфов.

В §1 дана постановка рассматриваемых задач. Рассматриваются задачи об изгибе прямоугольной пластины с линейной опорой, одним концом выходящей на защемленную границу. Второй край пластины, параллельный защемленному, свободен. На линии продолжения опоры действует сосредоточенная сила  $P$ . Фактически поставлены четыре задачи, различающиеся условиями на сторонах, параллельных опоре и названные задачами А, В, С, D.

Приближенное решение задач разыскивается в виде:

$$w(x,y) = w_0(x,y) + w_1(x,y) + w_q(x,y) \quad (12)$$

$$w_0(x,y) = \sum_{k=1}^N a_k \operatorname{Re}(z-z_0)^{k-1} + b_k \operatorname{Re}(\overline{z-z_0})(z-z_0)^k \quad (13)$$

$$w_1(x,y) = \sum_{k=1}^N c_k w_k(z), \quad z = x+iy = r e^{i\theta}, \quad \bar{z} = x-iy, \quad z_0 = a/2 \quad (14)$$

$w(x,y)$  - четное по  $y$  частное решение уравнения  $\Delta^2 w(x,y) = q(x,y)$

Слагаемые в (13) являются бигармоническими многочленами. Они обычно используются при решении бигармонических задач для областей с гладкими границами.

С целью одновременного учета асимптотики в точке выхода на границу и неинтегрируемой особенности перерезывающих сил на конце опоры в §2 строится система функций  $w_k(x,y)$  ( $k=1, \infty$ ) из (14), являющихся решениями задач об изгибе пластин, занимающих полуплоскость с защемленной границей и опорой, одним концом выходящей на защемленную границу.

$$\Delta_k^2 w_k = 0 \quad (-\infty < y < \infty, x \geq 0, \text{ кроме } y=0, 0 < x < c)$$

$$w_k(0,y) = w'_{k,x}(0,y) = 0 \quad (-\infty < y < \infty, k=1,2,\dots) \quad (15)$$

$$w_k(x,0) = x^{k+1}, w'_{k,y}(x,0) = 0 \quad (0 < x < c, k=1,2,\dots)$$

Задача (15) интегральным преобразованием Меллина сведена к задаче Римана относительно трансформанты Меллина, которая решается методом факторизации. После обращения преобразованием Меллина и применения теоремы о вычетах получаем  $w_k(x,y)$ :

$$w_k(z) = \begin{cases} U_k(z) + V_k(z), & r < 1, |\theta| \leq \pi/2 \\ W_k(z), & r \geq 1, |\theta| \leq \pi/2 \end{cases} \quad (16)$$

$$U_k(z) = \begin{cases} \operatorname{Re} z z^k, & (k=1,3,5,\dots) \\ \frac{1}{2} \operatorname{Re} ((k-1)z^{k+1} + (k+1)\bar{z}z^k) k^{-1}, & (k=2,4,6,\dots) \end{cases} \quad (17)$$

$$V_k(z) = \frac{1}{G^+(-k)} \sum_{n=1}^{\infty} (v_k(z, p_n, -1) + v_k(z, q_n, 1)) \quad (18)$$

$$v_k(z, p, d) = \frac{cG^+(p)}{(4\pi c + 8d)(p+k)} \left[ 2 \operatorname{tcdy} \left( z^{-p} - \bar{z}^{-p} \right) - \right. \\ \left. - t(p+1) \left( z^{1-p} - \bar{z}^{1-p} \right) + t(p-1) \left( \bar{z}z^{-p} - z\bar{z}^{-p} \right) \right], \quad c = c(p) = \cos \frac{1}{2}\pi p \quad (19)$$

$$W_k(z) = \frac{1}{2\pi G^+(-k)} \sum_{n=1}^{\infty} W_{kn}(z) \quad (20)$$

$$W_{kn}(z) = \left[ \frac{1}{G^-(2n)(k+2n)} \operatorname{Re} \left( \frac{\bar{z}z^{-2n}}{2n+1} + \frac{z^{1-2n}}{2n-1} \right) - \right. \\ \left. - \frac{2x}{G^-(2n-1)(k+2n-1)} \operatorname{Re} \frac{z^{1-2n}}{2n-1} \right]$$

$p_n, q_n (n=1,2,\dots)$  находятся как корни трансцендентных уравнений:

$$\sin \frac{1}{2}\pi p = p, \quad \sin \frac{1}{2}\pi q = -q \quad (21)$$

$\operatorname{Re} p < 0, \operatorname{Re} q < 0, \operatorname{Im} p > 0, \operatorname{Im} q > 0$

При  $r \neq 1$  ряды (18) и (20) сходятся со скоростью геометрической прогрессии и функции  $V_k$  и  $W_k$  являются бесконечно дифференцируемыми. При  $r=1$  ряд (20) сходится медленно, ряды из производных

(при вычислении моментов и перерезывающих сил) будут расходиться. Выделяя медленно сходящиеся части ряда (20), получаем представление для функций  $W_k(z)$ :

$$\begin{aligned}
 W_k(z) = & \frac{1}{2\pi G^+(-k)} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{2\Gamma(n+1)}{K^-(2n)\Gamma(n+\frac{1}{2})(k+2n)} - \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)} \right) \operatorname{Re} \frac{z^{-2n}}{z} \right. \\
 & + \left( \frac{2(2n+1)\Gamma(n+1)}{(k+2n)\Gamma(n+\frac{1}{2})K^-(2n)} - \frac{(2n-1)\Gamma(n+\frac{3}{2})}{\Gamma(n+2)} \right) \operatorname{Re} \frac{z^{1-2n}}{2n-1} + \quad (22) \\
 & \left. - \left( \frac{2n\Gamma(n-\frac{1}{2})}{K^-(2n-1)\Gamma(n)(k+2n-1)} - \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)} \right) 2x \operatorname{Re} z^{1-2n} \right] \\
 & + \frac{\pi^{-\frac{1}{2}}}{2G^+(-k)} \operatorname{Re} \left[ (z^2-1)^{\frac{1}{2}} z(z+1)^{-\frac{1}{2}} + (1-\bar{z})z \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\
 & \left. + (z-1)(\bar{z}-z^2) - \frac{1}{2}z \right]
 \end{aligned}$$

из которого вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. Функции  $\frac{\partial^3 W_k(z)}{\partial x^t \partial y^{3-t}}$  ( $t=0,3$ ) ведут себя как

$(z^2-1)^{-\frac{3}{2}}$  при  $z \rightarrow 1$ .

Таким образом, на конце опоры, расположенном внутри пластины, особенность контактных усилий совпадает с особенностью, полученной для задач об изгибе пластин с тонкими включениями главы II.

§3 посвящен численной реализации поставленных задач. Незвестные коэффициенты  $A$  разускаиваются методом граничной коллокации.

В §4 приведены результаты расчета по задачам A, B, C, D при

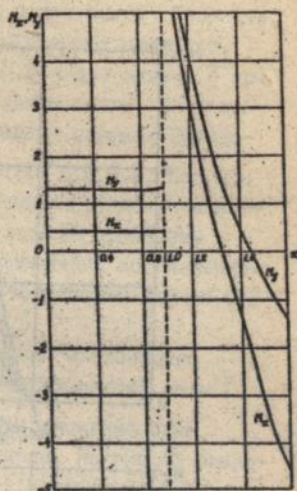
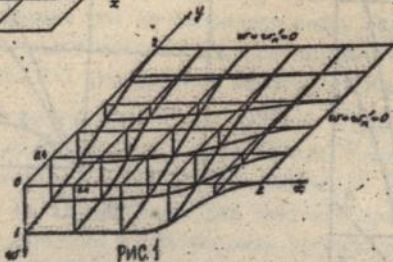
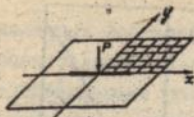


Рис. 2

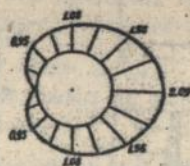
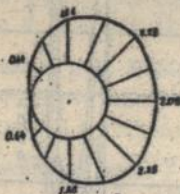


Рис. 3

Рис. 4

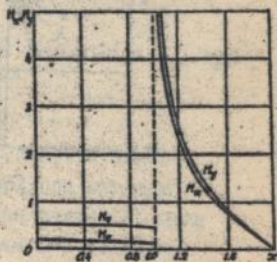
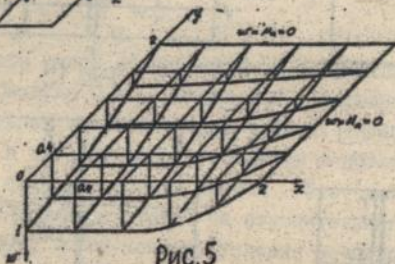
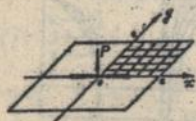


Рис. 6

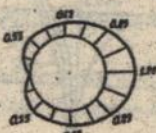
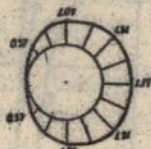


Рис. 7

Рис. 8

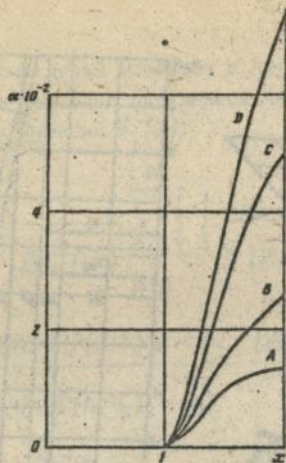


Рис.9

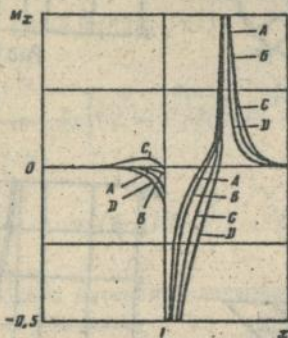


Рис.11

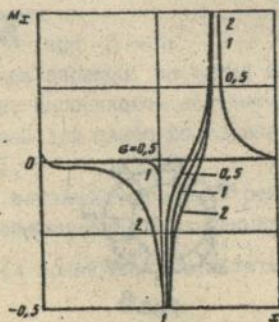


Рис.13

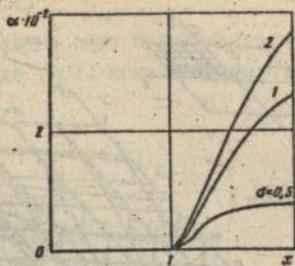


Рис.10

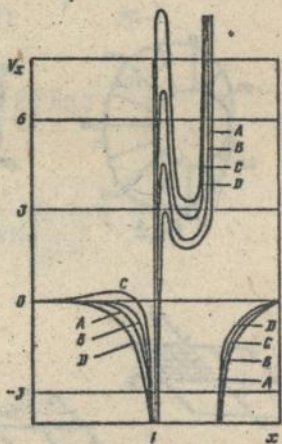


Рис.12

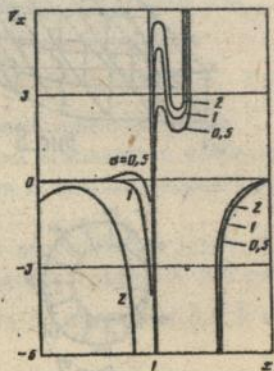


Рис.14

различных соотношениях размеров пластины и длины опоры. Проведен сравнительный анализ поведения прогибов, изгибающих моментов, перерезывающих сил на опоре для задач  $A, B, C, D$  и для задачи  $B$  при различных соотношениях размеров пластин и длины опоры. На рис. 9 для случая  $\sigma=1$  (квадратная пластинка) приведены графики безразмерной величины  $\alpha(x) = w(x,0)DP^{-1} \cdot a^{-2}$  для задач  $A, B, C, D$ . Прогибы равны нулю на опоре и растут за ней. Наименьшие прогибы соответствуют задаче  $A$ , наибольшие - задаче  $D$ . На рис. 10 приведены графики  $\alpha(x)$ , полученные для задачи  $B$  при различных соотношениях размеров пластины  $\sigma$ . Наибольшие прогибы соответствуют случаю  $\sigma=2$  (вытянутая по  $y$  пластина), наименьшие -  $\sigma=0,5$ .

На рис. 11 для случая  $\sigma=2$  приведены графики изгибающего момента  $M_x$ , на рис. 12 графики обобщенной перерезывающей силы  $V_x$  вдоль линии  $y=0, 0 \leq x < a$  для задач  $A, B, C, D$ . Расположение букв соответствует расположению кривых по вертикали. На рис. 13 приведены графики изгибающего момента  $M_x$ , на рис. 14 графики обобщенной перерезывающей силы  $V_x$  вдоль линии  $y=0, 0 \leq x < a$  для задачи  $B$  при различных  $\sigma$ . Расположение значений  $\sigma$  соответствует расположению кривых по вертикали. При  $r \rightarrow c+0$   $M_x = O((r-c)^{-1/2})$ ,  $V_x = O((r-c)^{-3/2})$ , при  $r \rightarrow d \pm 0$   $M_x = O(\ln|r-d|)$ ,  $V_x = O((r-d)^{-1})$ , при  $r \rightarrow a$   $M_x \rightarrow 0$ ,  $V_x \rightarrow 0$ .

Результаты счета сравниваются с результатами, полученными в работе Онищука О.В., Попова Г.Я., Фаршайта П.Г., где методом интегральных преобразований задача, аналогичная задаче  $B$ , была сведена к интегральному уравнению с последующим его решением методом базисных правых частей. Этот метод накладывает существенные ограничения на относительные размеры и форму пластины, а также краевые условия на сторонах пластины. Используемый в диссертации подход снимает эти ограничения и применим для самых разных пластин и краевых условий.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Грибова В.В., Онищук О.В. Решение задачи об изгибе пластинки с тонким жестким включением методом граничной коллокации

ции / Одес. ун-т. - Одесса, 1983. - 20 с. - Деп. в УкрНИИТИ  
01.12.83, № 1351 Ук 83.

2. Грибова В.В., Онишук О.В. Расчет защемленной пластинки  
стонким включением методом граничной коллокации // Гидроавро-  
механика и теория упругости. - 1985. - № 33. - С. 71-75.

3. Грибова В.В., Онишук О.В., Попов Г.Я. Расчет пластин с  
тонкими включениями на основе специальной системы бигармони-  
ческих функций // II Респ. научн.-техн. конф. Механика машино-  
строения. Секция мех. деф. тверд. тела. Тезисы докл. -  
Брежнев, 1987. - С. 11.

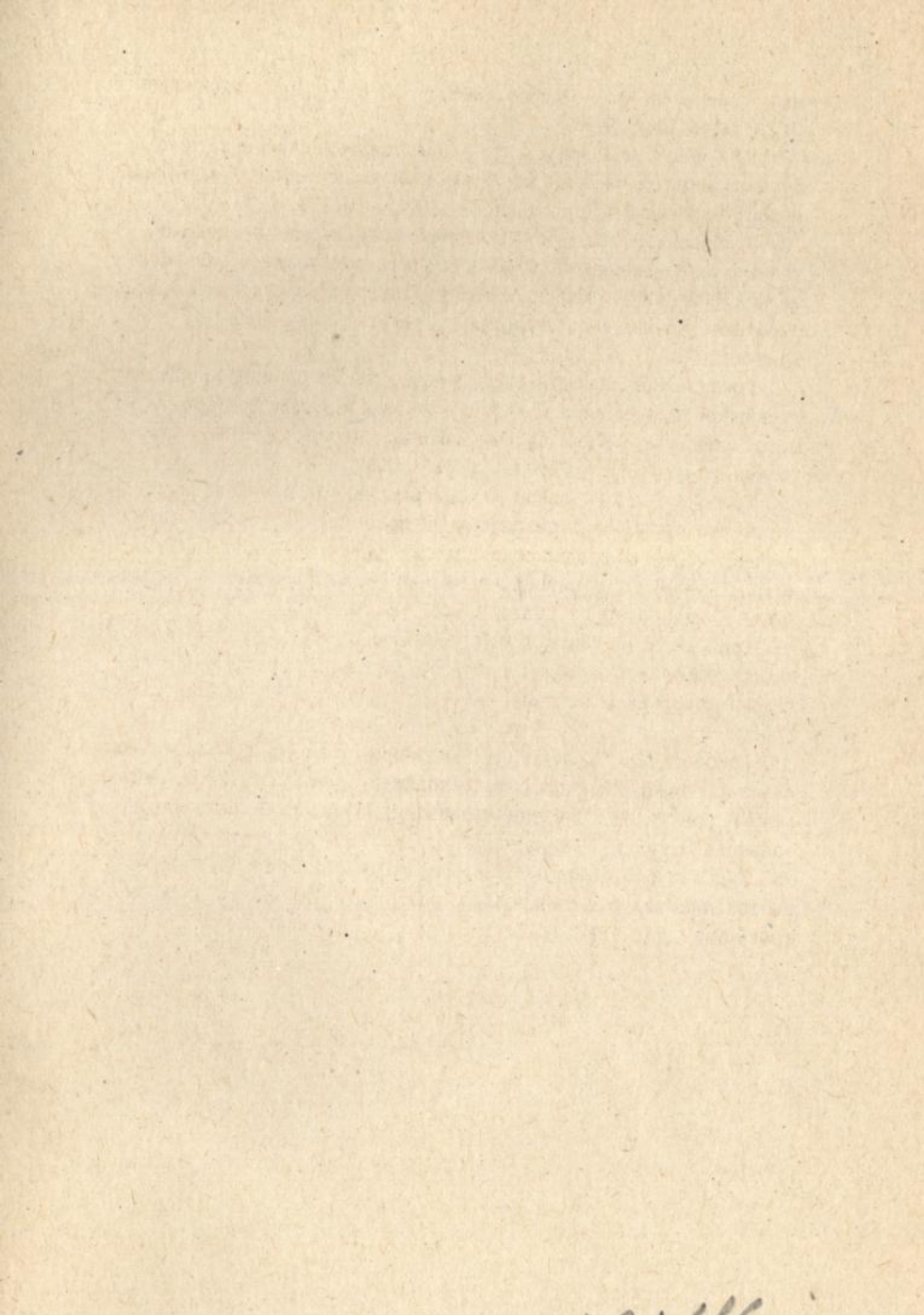
4. Грибова В.В., Онишук О.В. Решение задач об изгибе пластин с  
линейными включениями модифицированным методом Треффца // IV  
Восес. конф. Смешанные задачи механики деформируемого тела.  
Тезисы докл. Ч.1. - Одесса, 1989. - С. 97.

5. Грибова В.В. Об одном методе решения бигармонических  
задач для областей с разрезами, основанном на использовании  
специальной системы бигармонических функций // Респ. научн.  
конф. Дифференц. и интегр. уравнения и их приложения: Тез.  
докл. - Одесса: ОГУ, 1987. - Ч.2. - С. 74-75.

6. Грибова В.В., Онишук О.В. Решение задач об изгибе пластин  
модифицированным методом Треффца // Труды XV Всес. конф. по  
теории оболочек и пластин. - Т.1. - Казань: КГУ, 1990. - с. 506-  
510.

7. Грибова В.В., Онишук О.В. Задача о контакте прямоугольной  
пластины с линейной опорой, выходящей одним концом на защем-  
ленную границу // Современные проблемы механики контактных  
взаимодействий. - Днепропетровск: ДГУ, 1990. - С. 57-58.

8. Грибова В.В., Онишук О.В., Попов Г.Я. Решение задач об  
изгибе пластин с линейными опорами, выходящими на защемленную  
границу // Изв. РАН. МТТ. 1992. №5. С. 156-164.



AB 29.445