

А К А Д Е М И Я Н А У К У К Р А И Н Ы
О Р Д Е Н А Т Р У Д О В О Г О К Р А С Н О Г О З Н А М Е Н И
И Н С Т И Т У Т М А Т Е М А Т И К И

На правах рукописи
УДК 519.2

ГАМКРЕЛИДЗЕ Николай Георгиевич

И С С Л Е Д О В А Н И Я П О Р Е Ш Е Т Ч А Т Ы М

Р А С П Р Е Д Е Л Е Н И Я М

Т Е О Р И И В Е Р О Я Т Н О С Т Е Й

(ОІ.ОІ.О5 - теория вероятностей
и математическая статистика)

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Киев - 1994

1152272

Работа выполнена в отделе теории вероятностей и математической статистики Математического института им. А. М. Размадзе АН Грузии

Официальные оппоненты: академик РАН Ю. В. Прохоров;

доктор физико-математических наук,

профессор А. В. Иванов;

доктор физико-математических наук,

профессор В. М. Максимов.

Ведущая организация - Киевский политехнический институт.

Защита состоится 26 апреля 1994 г. в 15.00 часов на заседании специализированного совета Д. 016.50.01 по присуждению учёной степени доктора физико-математических наук при Институте математики АН Украины по адресу:

252 601 Киев 4,

ул. Терещенковская, 3.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Автореферат разослан 25 марта 1994 г.

Ваш отзыв в двух экземплярах, заверенный гербовой печатью просим выслать по адресу учёного совета.

ЛНБ ім. В. Стефаніка
АН України

Учёный секретарь
специализированного
совета Д. 016.50.01

д. ф.-м. н.

Д. В. Гусак

ЛНБ України ім. В. Стефаніка



00801530 (H)

Настоящая работа посвящена предельным теоремам решётчатых распределений и, в основном, изучению локальных теорем для схемы суммирования целочисленных независимых случайных величин или векторов.

Как хорошо известно, первые результаты по локальной аппроксимации распределений касались биномиальных вероятностей и были получены А.Муавром (1733 г.), П.Лапласом (1812 г.), С.Пуассоном (1837 г.), а также Николаем (1713 г.) и Даниилом (1770 г.) Бернулли ещё на заре формирования теории вероятностей. Дальнейшее развитие тематика локальных предельных теорем получила в работах Р.Мизеса (1934 г.), А.Хинчина (1943 г.), А.Колмогорова (1949 г.) и многих других современных исследователей.

В предположении, что слагаемые одинаково распределены, позже были получены необходимые и достаточные условия (Б.В.Гнеденко (1948 г.) – одномерный случай; Д.Г.Мейзлер, О.С.Парасюк, Е.Л.Рвачёва (1949 г.) – многомерный). А.Я.Хинчин применил эти и аналогичные результаты в своих работах по статистической физике (см. Хинчин А.Я. Математические основания квантовой статистики. – М.; Л.: Гостехиздат, 1951). Со временем были даны другие интересные применения локальных теорем, например в теории случайных отображений (см. Колчин В.Ф. Случайные отображения. – М.: Наука, 1984).

Для различно распределённых слагаемых необходимые и достаточные условия локальной предельной теоремы для равномерно ограниченных слагаемых были получены Ю.В.Прохоровым (ДАН СССР. – 1954. – Т. 98, № 4. – С. 535–538).

Дальнейшее развитие тематика локальных теорем получила у

В.А.Статулявичуса, А.Г.Постникова, С.Х.Сираждинова, их учеников и последователей. Были приведены глубокие теоретико-числовые методы и соображения. Кроме перечисленных авторов вопросами локальной теоремы занимался целый ряд исследователей, среди которых следует назвать В.В.Петрова, Ч.Стоуна, В.Феллера.

Настоящая диссертация основана на работах автора, опубликованных в период 1964-1993 г.г. (всего 22 работы), и примыкает к перечисленным исследованиям.

Цель работы - установить ряд важных свойств решётчатых распределений и в особенности локальной, а отчасти и интегральной аппроксимации распределений сумм независимых случайных величин и векторов нормальным распределением.

Основные результаты.

1. Получены неулучшаемые оценки максимальной вероятности значений сумм случайных величин при заданной максимальной вероятности значений слагаемых для определённого класса случайных величин. Тем самым дано частичное подтверждение гипотезы Б.В.Прохорова о форме асимптотически правильной оценки функции концентрации.

2. Построены примеры, показывающие, что необходимые условия выполнения локальной теоремы к суммам независимых целочисленных случайных величин: применимость интегральной теоремы, асимптотическая равномерная распределённость сумм по любому модулю, равномерная бесконечная малость слагаемых - не являются достаточными для локальной теоремы.

3. Дано новое (аналитическое) необходимое условие применимости локальной теоремы в форме так называемого "третьего интеграла" и предложен способ оценки снизу скорости сходимости в локальной теореме.

4. Введена количественная характеристика "гладкости" распределений целочисленных случайных величин или векторов - функция

гладкости и изучены её свойства.

5. Предложены способы оценки остаточного члена в локальной теореме, основанные на приёме "предварительного сглаживания" распределений с использованием функции гладкости.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на заседании Комиссии по теории вероятностей и математической статистике (Тбилиси, 1986 г.), на семинарах в Московском и Санкт-Петербургском государственных университетах, Математическом институте им. В.А. Стеклова, в Институте математики и кибернетики АН Литвы, в Институтах математики АН Украины (г. Киев) и СО РАН (г. Новосибирск), в Математическом институте им. А.М. Размадзе АН Грузии, на Международных Вильнюсских конференциях по теории вероятностей и математической статистике (1981, 1985, 1989 г.г.), на IY Советско-Японском симпозиуме по теории вероятностей и математической статистике (Тбилиси, 1982 г.), на Первом Всемирном конгрессе Общества математической статистики и теории вероятностей им. Я. Бернулли (Ташкент, 1986 г.).

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав и комментариев. Список литературы состоит из 110 наименований, причём работы автора по теме диссертации выделены отдельно и обозначены Н1, Н2 и т.д. Общий объём 140 с.

Обзор содержания по главам. Всюду в дальнейшем

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots \quad (I)$$

означает (если явно не оговорено противное) последовательность независимых целочисленных случайных величин и

$$S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n.$$

В первой главе даны оценки для $\max_x P(S_n = x)$

Назовём распределение целочисленной случайной величины ξ унимодальным, если существует такое целое m_0 , что при целых

$m \leq m_0$ вероятность $P(\xi = m)$ не убывает, а при целых $m \geq m_0$ - не возрастает.

Теорема. Если случайные величины (I) имеют унимодальные распределения и $\max_x P(\xi_j = x) = p_j$, то справедливо неравенство

$$\max_x P(S_n = x) \leq \sqrt{\frac{6}{\pi}} \left\{ \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{p_j^2} - 1 \right) \right\}^{-1/2} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}} \right).$$

Неравенство по существу неулучшаемо. Действительно: пусть $\xi_j, (j=1, \dots, n)$ принимает все целые значения от $-N$ до N с вероятностью $1/(2N+1)$ и $\sigma^2 = D\xi_j$. По локальной теореме получаем, что

$$\max_x P(S_n = x) \leq P(S_n = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n \sigma^2}} = \sqrt{\frac{6}{\pi}} \frac{p_1}{\sqrt{n(1-p_1^2)}}.$$

Это неравенство было первым, хотя и частным подтверждением одной гипотезы Ю.В.Прохорова (Прохоров Ю.В. Экстремальные задачи в предельных теоремах // Тр.УИ Всесоюз.совещ.по теории вероятностей и математической статистике, Вильнюс, 1962).

При отказе от унимодальности со свойством симметричности и одинаковой распределённости слагаемых справедливо следующее неравенство

$$\max_x P(S_n = x) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{(n+1)q_1}} + \frac{1}{(n+1)q_1} \right),$$

где $q_1 = 1 - p_1$, а $P(\xi_j = 0) = p_1 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$

Следующая часть работы посвящена анализу необходимых условий применимости локальной теоремы с целью получить ответ насколько они близки к достаточным. Предварительно введём обозначения и определения. Предположим, что случайные величины (I) имеют конечные вторые моменты и пусть $A_n = ES_n$, $B_n^2 = DS_n$ и $P_n(m) = P(S_n = m)$.

Последовательность (I) удовлетворяет по определению локаль-

ной предельной теореме (л.т.), если равномерно по m , $-\infty < m < \infty$ при $n \rightarrow \infty$

$$P_n(m) = (2\pi)^{-1/2} B_n^{-1} \exp\left\{-\frac{(m-A_n)^2}{2B_n^2}\right\} + o(B_n^{-1}).$$

Как известно, из л.т. вытекает, что распределения нормированных сумм $(S_n - A_n)/B_n$ сходятся к стандартному нормальному распределению, т.е. применимость центральной предельной теоремы (в интегральной форме) является необходимым условием л.т. Ю.В. Прохоровым было отмечено, что необходимым условием л.т. является также и асимптотическая равномерная распределённость (а.р.р.) сумм S_n по любому фиксированному модулю $l > 0$, т.е. соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n \equiv j \pmod{l}) = \frac{1}{l}, \quad j = 0, 1, \dots, l-1, \quad l = 2, 3, \dots$$

К этим известным необходимым условиям автором было добавлено необходимое условие аналитического характера. В упрощённой форме это условие состоит в следующем: для применимости л.т. необходимо существование такой последовательности $\varepsilon_n \rightarrow 0$, что при $n \rightarrow \infty$

$$J_n = B_n \int_{\varepsilon_n \leq t \leq 2\pi - \varepsilon_n} \prod_{j=1}^n |f(t, \xi_j)|^2 dt \rightarrow 0. \quad (2)$$

Здесь $f(t, \xi_j)$ характеристическая функция сл. величины ξ_j

Результаты цитированной выше работы Ю.В. Прохорова позволяют поставить вопрос не является ли условие ц.п.т. и а.р.р. без всяких дополнительных условий достаточным для локальной теоремы. Ответ отрицательный. Контрпример построить сравнительно просто, если не требовать бесконечной малости слагаемых в нормированной сумме.

Пример [Н1]. Пусть случайные величины с нечётными индекса-

ми $n = 2k - 1$ распределены по симметризованному закону Пуассона с характеристической функцией $f(t, \xi_{2k-1}) = \exp\{\Lambda_k(\cosh h_k - 1)\}$. Параметр Λ_k и шаг распределения h_k равны $k^{1/2}$, $2[e^{k^2} k^{-1/4}]$ соответственно. Случайные величины с чётными индексами ξ_{2k} принимают значения $-k, \dots, -1, 1, \dots, k$ с вероятностью $1/2k$ каждая.

Проверка требуемых свойств распределений сумм S_n (применимость интегральной теоремы и а.р.р. и отсутствие л.т.) оказывается не очень трудной (по сравнению со следующим примером), и мы на ней здесь останавливаться не будем.

При дополнительном условии бесконечной малости слагаемых в нормированной сумме, гипотеза также неверна, т.е. удаётся построить довольно сложный пример, в котором слагаемые в нормированной сумме бесконечно малы, суммы S_n а.р.р. и удовлетворяют ц.п.т., но, тем не менее, для S_n не имеет места л.т.

Пример [НЗ]. Построение последовательности происходит следующим образом. Пусть $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$. Запишем α в виде цепной дроби $\{1; 1, \dots, 1\}$. Числители p_j и знаменатели q_j соответствующих подходящих дробей представим в виде следующей таблицы

j	1	2	3	4	5	
p_j	3	5	8	13	21	...
q_j	2	3	5	8	13	...

Числители образуют ряд Фибоначчи $p_j = p_{j-1} + p_{j-2} \quad (j \geq 3)$

Причём $q_j = p_{j-1} \quad (j \geq 2)$.

Рассмотрим последовательность независимых величин, которую удобнее выписать в виде следующей таблицы

$$\xi_1, \dots, \xi_{n_1},$$

$$\xi_{n_1+1}, \dots, \xi_{n_1+n_2},$$

$$\dots$$

$$\xi_{n_1+\dots+n_{j-1}+1}, \dots, \xi_{n_1+\dots+n_{j-1}+n_j}$$

(3)

где величины ξ_j j -ой строки распределены одинаково и принимают значения $0, q_j, p_j$ с вероятностями $(p_j-2)/p_j, 1/p_j, 1/p_j$ соответственно, а количество случайных величин в строке выбирается как $n_j = [p_j^{1/2}] + 1$ ($[a]$ означает целую часть числа a).

Характер рассуждений, принимаемых при анализе этого примера, можно в сжатой форме описать следующим образом.

Условие бесконечной малости слагаемых и ц.п.т. проверяется следующим способом. Для произвольного n существует такое k что $N_{k-1} \leq n \leq N_k$, где $N_k = n_1 + \dots + n_k$ и тогда

$$\max_{1 \leq j \leq n} |\xi_j - E \xi_j| \leq 2p_k, \quad B_{N_k}^2 > 1/3 \sum_{j=1}^k n_j (p_j^2 + q_j^2) / p_j,$$

следовательно $\max_x |\xi_j - E \xi_j| / B_n \leq \frac{c}{p_k^{1/2}}$ при $n \rightarrow \infty$, где c - абсолютная константа. Из этого условия вытекает, как условие Ляпунова, так и условие бесконечной малости слагаемых в нормированной сумме.

Для проверки условия а.р.р. достаточно показать, что во всех рациональных точках вида $2\pi \tau/h$ характеристическая функция суммы S_n стремится к нулю (Критерий Дворецкого - Вольфовица). Имеем

$$|f(2\pi \frac{\tau}{h}, \xi_{N_j})| \leq 1 - \frac{\eta}{p_j}, \quad \text{где } \eta = \eta(h) > 0, \quad \prod_{j=1}^k |f(2\pi \frac{\tau}{h}, \xi_{N_j})|^{2n_j} \leq e^{-k\eta} \rightarrow 0,$$

при $k \rightarrow \infty$.

Наконец остается показать, что необходимое аналитическое условие (2) не выполняется.

Действительно, беря разложение Тейлора при $|t - 2\pi/\alpha| \leq B_{N_k}^{-1}$ и оценки производных, получим

$$|f(t, \xi_j)|^2 \geq 1 - \frac{c}{P_j^3} - \frac{c}{B_{N_k} P_j} - \frac{c P_j}{B_{N_k}^2},$$

(здесь и далее c - означает различные положительные абсолютные постоянные).

Следовательно,

$$\prod_{j=1}^k |f(t, \xi_j)|^{2n_j} \geq \exp \left\{ -c \sum_{j=1}^k \frac{n_j}{P_j^2} - \frac{c}{B_{N_k}} \sum_{j=1}^k \frac{n_j}{P_j} - \frac{c}{B_{N_k}} \sum_{j=1}^k n_j P_j \right\} \geq e^{-c}$$

Тем самым, при всех достаточно больших k справедливо

$$J_{N_k} = B_{N_k} \int_{\varepsilon_n \leq t \leq 2\pi - \varepsilon_n} \prod_{j=1}^k |f(t, \xi_j)|^{2n_j} dt > B_{N_k} \int_{|t - 2\pi/\alpha| \leq B_{N_k}} e^{-c} dt$$

Так как в построенном примере $J_{N_k} > c$, то тем самым не выполняется необходимое условие (2) для л.т. и для построенной последовательности (3) л.т. не имеет места. Следует заметить, что для построенного примера условие Ю.А.Розанова не выполняется и тем самым заключаем, что это условие по существу не улучшаемо. Напомним, что это условие Ю.А.Розанова состоит в следующем: при $n \rightarrow \infty$ равномерно по k

$$R_{k,n} = \frac{1}{D_{\xi_k}} \sum_{|j - E \xi_k| \leq n} (j - E \xi_k)^2 P(\xi_k = j) \rightarrow 1.$$

Следующая часть диссертации посвящена исследованию свойства гладкости распределения. С этой целью вводится функция $\delta(P_f)$ и исследуются её свойства. Используя приём "предварительного сглаживания" получаем легко проверяемое достаточное условие для л.т. и в терминах функции гладкости $\delta(P_f)$ получаем способ оценки остаточного члена в локальной теореме.

Перейдём к более подробному изложению. Определим "степень гладкости" распределения P_{ξ} целочисленной сл. величины ξ следующим образом

$$\delta(P_{\xi}) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} |P(\xi=m) - P(\xi=m-1)|,$$

где \mathbb{Z} - множество всех целых чисел.

Изучаются различные свойства $\delta(P_{\xi})$. Наиболее интересные те из них, которые имеют место в предположении, что ξ есть сумма большого числа случайных величин. Для суммы S_n независимых одинаково распределённых целочисленных случайных величин ξ_k с максимальным шагом распределения равным 1 всегда $\delta(P_{S_n}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Более того, если последовательность (I) независимых, ограниченных, одинаково распределённых целочисленных сл. величин с максимальным шагом, равным 1 равномерно ограничена, то

$$\delta(P_{S_n}) = \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

Далее изучается возможная скорость стремления $\delta(P_{S_n})$ к нулю при разных ограничениях на распределения сл. величины (I).

Для многомерного случая мы вводим аналогичную характеристику равенством

$$\delta(P_{\xi}) = \sum_{k=1}^b \sum_m |P(\xi=m) - P(\xi=m-e_k)|,$$

где внутренняя сумма берётся по всем целочисленным векторам, а

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_b = (0, 0, \dots, 0, 1).$$

Для неё имеет место, в частности, утверждение.

Пусть ξ - целочисленный вектор в R^b . Если $\delta(P_{\xi}) < 2$, то максимальный шаг распределения P_{ξ} равен 1.

Следующее свойство относится к суммам S_n независимых одинаково распределённых целочисленных случайных векторов $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$

Обозначим $a^{(k)} = E \xi_1^{(k)}$, $\lambda_{jk} = E (\xi_1^{(j)} - a^{(j)}, \xi_1^{(k)} - a^{(k)})$

$\alpha = (a^{(1)}, \dots, a^{(s)})$, Λ_{jk} - алгебраическое дополнение элемента λ_{jk} и $\Lambda = \det \{\lambda_{jk}\}$.

Если $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ последовательность целочисленных одинаково распределённых случайных векторов, имеющих максимальный шаг распределения, равный единице и $|\xi_n| \leq k$, то при $n \rightarrow \infty$

$$\delta(P_{S_n}) = \sqrt{\frac{2}{\pi n \Lambda}} (\sqrt{\Lambda_{11}} + \dots + \sqrt{\Lambda_{ss}}) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Заметим, что условия этого утверждения обеспечивают невырожденность матрицы ковариаций.

Применение характеристики $\delta(P_{\xi})$ в.л.т. основано на неравенствах типа

$$|f(t, \xi)| \leq \frac{\delta(P_{\xi})}{2 |\sin t/2|}, \quad (t \neq 2\pi k)$$

Простейшим, но типичным результатом, получаемым на этом пути, может служить следующее утверждение.

Пусть (I) последовательность независимых (необязательно одинаково распределённых) случайных величин. Если существует натуральное n_0 и положительное число λ , $\lambda < \sqrt{2}$ такие, что при всех k

$$\delta(P_{\xi_k}^{*n_0}) \leq \lambda$$

и если к этой последовательности применима центральная предельная теорема и $B_n^2 = O(n)$, при $n \rightarrow \infty$, то к этой последовательности применима и локальная предельная теорема в усиленной форме.

Здесь и далее P_{η}^{*m} означает m -кратную свёртку распределения сл. величины η . Присутствующие в формулировке теоремы параметры n_0 и λ обеспечивают существование таких

сл. величин $\zeta_1^{(k)}, \dots, \zeta_n^{(k)}$, которые распределены так же как ζ_k для каждого k ($k=1, \bar{n}$), и для которых обеспечивается "достаточная" гладкость $\delta(P_{\zeta_1^{(k)}}^{*n_0}) \leq \lambda < \sqrt{2}$.

В третьей части работы изучаются несколько задач, связанных с центральной предельной теоремой. Работа [Н7] посвящена доказательству ц.п.т. способом, отличным от хорошо известного подхода Эссеена. Суть работы заключается в следующем, если в качестве сглаживающего распределения взять финитные распределения, плотность которых бесконечно дифференцируема, а характеристическая функция убывает достаточно быстро, то можно получить правильную скорость сходимости в ц.п.т., но при наличии одной Леммы, принадлежащей Эссеену. Эта заметка [Н7] примыкает к работе А.Журавского и интересна ещё и тем, что учитывая вышеуказанное обстоятельство можно было ещё в 1933 г. иметь истинную картину сходимости в ц.п.т. Следует добавить, что целый ряд утверждений этой заметки переносятся и на конечномерный случай. Далее следует неравенство, обобщающее неравенство Эссеена, оценивающее сверху равномерное отклонение функции распределений $F(x)$ от $G(x)$ в терминах, соответствующих характеристических функций $f(t)$ и $g(t)$ на случай размерности большей или равной двум [Н6]. Буквальный перенос доказательства неравенства Эссеена на случай R^S даёт интеграл

$$\int_{-T}^T \dots \int_{-T}^T \frac{|f(t_1, \dots, t_s) - g(t_1, \dots, t_s)|}{t_1 \dots t_s} dt_1 \dots dt_s,$$

который может быть и бесконечным из-за поведения подинтегральной функции вблизи нуля. Обойти эту трудность удастся введением вспомогательных функций $\hat{f}(t)$ и $\hat{g}(t)$. Способ доказательства, предложенный в этой работе, в дальнейшем применяется для оценки близости по вариации [Н8].

Публикации автора по теме диссертации

- Н 1. Гамкредидзе Н.Г. О локальной предельной теореме для решётчатых случайных величин//Теория вероятностей и её применения. -1964.-Т.9, вып.4.-С.733-736.
- Н 2. Гамкредидзе Н.Г. Об одной нижней оценке скорости сходимости в локальной теореме//Лит.мат.сб.-1967.-Т.7, вып.3.-С.405-409.
- Н 3. Гамкредидзе Н.Г. О связи локальной и интегральной теорем для решётчатых распределений//Теория вероятностей и её применения.-1968.-Т.13, вып.1.-С.175-179.
- Н 4. Гамкредидзе Н.Г. К оценке максимальной вероятности для сумм целочисленных случайных величин//Теория вероятностей и её применения.-1973.-Т.18, вып.4.-С.842-846.
- Н 5. Гамкредидзе Н.Г. Об одной оценке максимальной вероятности//Сообщ.АН ГССР.-1974.-73, № 1.-С.17-20.
- Н 6. Гамкредидзе Н.Г. Неравенство Эссеена для многомерной функции распределения//Теория вероятностей и её применения.-1977.-Т.22, вып.4.-С.897-900.
- Н 7. Гамкредидзе Н.Г. Об одном методе доказательства центральной предельной теоремы//Теория вероятностей и её применения.-1980.-Т.25, вып.3.-С.619-625.
- Н 8. Гамкредидзе Н.Г. К оценке близости распределений по вариации//Теория вероятностей и её применения.-1983.-Т.28, вып.2.-С.445-446.
- Н 9. Гамкредидзе Н.Г. О сглаживании вероятностей при сложении независимых целочисленных величин//Теория вероятностей и её применения.-1981.-Т.26, вып.4.-С.835-841.
- Н10. Гамкредидзе Н.Г. Об одной мере гладкости распределений многомерных целочисленных случайных векторов//Теория вероятностей и её применения.-1985.-Т.29, вып.2.-С.401-405.
- Н11. Гамкредидзе Н.Г. О модуле непрерывности функции Вейерштрасса//Мат. заметки.-1984.-Т.36, № 1.-С.35-38.

- Н12. Гамкредидзе Н.Г. О применении функции "гладкости" в доказательстве локальной предельной теоремы//Теория вероятностей и её применения.-1988.-Т.33, вып.2.-С.373-376.
- Н13. Гамкредидзе Н.Г. Об одной мере "гладкости" целочисленных распределений//III Междунар.Вильнюс.конф.по теории вероятностей и мат.статистике,1981:Т.1.-Вильнюс,1981.-С.122.
- Н14. Gamkrelidze N.G. On a measure of the smoothness of lattice distribution of random vectors//IV USSR-Japan symp.on probability theory a.math.statistics, Tbilisi, 1982.-Vol.1.-P.217-218.
- Н15. Гамкредидзе Н.Г. Об одном вероятностном методе оценки модуля непрерывности функции Вейерштрасса//IУ Междунар.Вильнюс.конф. по теории вероятностей и мат.статистике,1985.-С.152.
- Н16. Гамкредидзе Н.Г. Об одном многомерном аналоге неравенства Эссеена//IVсемир.конгр.0-ва мат.статистики и теории вероятностей им.Я.Бернулли, Ташкент, 1986:Т.2.-М.:Наука, 1986.-С.837.
- Н17. Gamkrelidze N.G. On the function of smoothness and local limit theorem for lattice distribution//V Intern.Vilnius conf. on probability theory a.math.statistics, 1989.
- Н18. Gamkrelidze N.G. On local limit theorem for lattice distribution.-Amsterdam, 1990.-(Rep./Centrum voor wiskunde en informatica;BS-R9004).
- Н19. Гамкредидзе Н.Г. Письмо в редакцию//Теория вероятностей и её применения.-1990.-Т.35, вып.2.-С.339
- Н20. Гамкредидзе Н.Г. О неравенстве для многомерной характеристической функции//Теория вероятностей и её применения.-1991.-Т.36, вып.3.-С.602-604.
- Н21. Гамкредидзе Н.Г. О локальной предельной теореме//Теория вероятностей и её применения.-В печати.
- Н22. Gamkrelidze N.G. On a probabilistic property of the Fibonacci quarterlies//The Fibonacci quarterly j.-In print.

Б им. В. Стефанюк
АН України

Заказ 70 Объем 10 Тираж 70. 461717
Типография МИСиС, ул. Орджоникидзе, 8/9

AB2945

AB 29.459