АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

МОСТІПАН Каріна Валеріївна

ДОСЛІДЖЕННЯ РІВНЯНЬ КОМПЕНСАЦІЇ БОГОЛЮБОВА В МОДЕЛЯХ ТЕОРІЇ НАДПРОВІДНОСТІ

01.01.03 - математична фізика

Автореферат
дисертації на здобуття вченого ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ-1994

Дисертацією є рукопис

Роботу виконано у відділі математичних методів статистичної механіки Інституту математики АН України.

Науковий керівник : член-кореспондент АН України, доктор фізико-математичних наук, професор ПЕТРИНА Д.Я.

Офіційні опоненти : доктор фізико-математичних наук ГОНЧАР М.С.
доктор фізико-математичних наук МИХАЙЛЕЦЬ В.А.

Провідна установа : Харківський державний університет

Захист відбудеться " 19 " квітня 1994р.
о 14 годині на засіданні спеціалізованої ради Д 016.50.02 при Інституті математики АН України за адресою :

252601, Київ-4, ГСП, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці інституту.

Автореферат розіслано " 18 " березня 1994р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради ЛУЧКА А.Ю.

1. Загальна характеристика роботи

Актуальність теми.

Дослідження моделей, що описують явище надпровідності, є однією з найбільш актуальних задач квантової статистичної механіки. Це пояснюється, перш за все, широкими перспективами застосування цього явища на практиці. З іншого боку, експериментальне відкриття високотемпературної надпровідності є тим кроком, який вимагає пояснення та чіткого теоретичного обгрунтування.

Математичне описання систем у надпровідному стані пов'язане з рядом принципових труднощів, зумовлених нестійкістю системи та нелінійністю рівнянь, які описують її. Так, наприклад, основне рівняння теорії надпровідності - нелінійне інтегральне рівняння, що описує щілину в спектрі гамільтоніану, - традиційно розв'язується лише наближено з великою кількістю припущень. У зв'язку з цим математичне дослідження структури розв'язків цього рівняння, їх походження й аналіз є важливою та актуальною проблемою.

Об'єкт дослідження. Принцип компенсації "небезпечних" діаграм Боголюбова в моделях Фрьоліха та Бардіна-Купера-Шриффера (БКШ) рівняння компенсації при нульовій та ненульових температурах, розбіжні доданки в ряду теорії збурень при нульовій температурі та рівняння для щілини в спектрі відповідних гамільтоніанів.

Мета роботи. Узагальнення принципу компенсації Боголюбова на випадок відмінних від нуля температур та дослідження існування нетривіального розв'язку рівняння для щілини.

Методи дослідження. Методи квантової теорії поля, а саме: методи діаграмної техніки Фейнмана і техніка температурних функцій Гріна. А також метод нерухомої точки теорії нелінійного аналізу.

Наукова новизна. У роботі запропонована діаграмна техніка, яка на відміну від традиційної, дозволяє кожній діаграмі однозначно співставити енергетичний знаменник і, таким чином, більш детально дослідити структуру ряду теорії збурень. У дисертації виведений узагальнений принцип компенсації та отримані відповідні рівняння компенсації для моделей Фрьоліха й БКШ. Перетворення інтегрального рівняння для щілини до рівняння на нерухому точку оператора стискаючого типу дає можливість довести існування хоча б одного нетривіального розв'язку, близького до наближеного, який узгоджується з експериментальними даними.

Застосування. Робота має теоретичний характер. Запропонований критерій вибору параметрів канонічного uv перетворення може бути використаний в багатьох задачах теоретичної і математичної фізики: теорія надплинності та надпровідності, спонтанне порушення симетрії в теорії елементарних часток, квантова теорія поля у викривленому просторі-часі та в інтенсивних зовнішніх полях.

Апробація роботи. Основні результати дисертації доповідались на семінарах відділу математичних методів у статистичній механіці Інституту математики АН України, на Вченій Раді Інституту математики, а також на міжнародній конференції з диференційних рівнянь (Україна, м.Судак, червень 1993 р.)

Публікації. Результати дисертації опубліковані в п'яти роботах, список яких наведений наприкінці автореферату.

Структура дисертації. Дисертація викладена на 75 сторінках і складається з вступу, трьох глав, трьох додатків, висновків та списку літератури, що містить 30 найменувань.

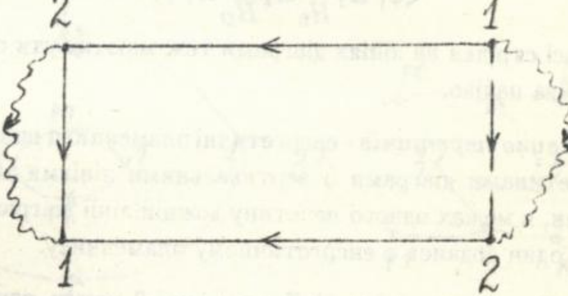
2. Зміст роботи

У вступі (параграф 1) подано короткий огляд досліджень по темі дисертації та сформульовано основні результати, що виносяться на захист.

Перша глава присвячена дослідженню принципу компенсації "небезпечних" діаграм Боголюбова при нульовій температурі [1,2]. Ці "небезпечні" діаграми виникають при застосуванні теорії збурень до модельних гамільтоніанів Фрьоліха та Бардіна-Купера-Шриффера (БКШ). "Небезпечність" діаграм пов'язана з розбіжністю відповідних аналітичних виразів.

У другому параграфі вводяться зручні позначення, які дозволяють уникнути складних,ненаочних виразів для окремих доданків гамільтоніану Фрьоліха після uv перетворень. Обговорюється зв'язок між канонічними uv перетвореннями і методом квазісередніх. Наведено явний вигляд перших нетривіальних доданків в ряду теорії збурень для енергії основного стану, які обчислені явно в додатку А.

Третій параграф дисертації присвячено вдосконаленню традиційної діаграмної техніки. Оскільки одній діаграмі,



згідно зі старими правилами діаграмної техніки, можуть відпо відати різні аналітичні вирази:

$$2\sum_{k,p_1,p_2}\frac{A_{k-p_1}B^1_{k,p_1}B^2_{k,p_1}A_{k-p_2}B^1_{k,p_2}B^2_{k,p_2}}{[\varepsilon(k)+\varepsilon(p_1)+\omega(k-p_1)][\varepsilon(k)+\varepsilon(p_2)+\omega(k-p_2)]}\times$$

$$\frac{1}{[\varepsilon(p_1)+\varepsilon(p_2)+\omega(k-p_1)+\omega(k-p_2)]}, \qquad (1)$$

$$2\sum_{k,p_1,p_2}\frac{A_{k-p_1}B^1_{k,p_1}B^2_{k,p_1}A_{k-p_2}B^1_{k,p_2}B^2_{k,p_2}}{[\varepsilon(k)+\varepsilon(p_1)+\omega(k-p_1)][\varepsilon(k)+\varepsilon(p_2)+\omega(k-p_2)]2\varepsilon(k)}, \qquad (2)$$

то для усунення цього недоліку вводяться три додаткових правила [1,2]:

1. *Правило напряму* - всі вершини мають бути розташовані на одній лінії справа наліво в тому самому порядку, що і в матричному елементі формули

$$E = <\psi|\, H_I\, |\psi> + <\psi|\, H_I \frac{1}{H_0} H_I\, |\psi> +$$

$$<\psi|\, H_I \frac{1}{H_0} H_I \frac{1}{H_O} H_I\, |\psi> + \ldots$$

та всі стрілки на лініях діаграми теж мають бути спрямовані справа наліво.

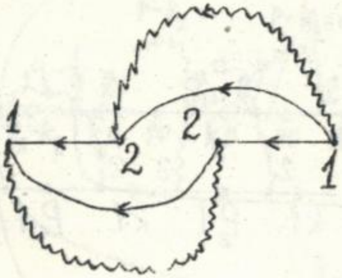
2. *Правило перетинів* - енергетичні знаменники визначаються перетинами діаграми з вертикальними лініями між вершинами, в межах одного перетину кожній лінії діаграми відповідає один доданок в енергетичному знаменнику.

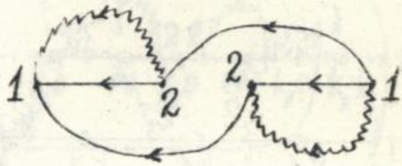
3. *Правило імпульсів* - лінії в вершині 3 мають однаковий імпульс; якщо вершина 1 або 2 з'єднує ферміонні лінії (k_1, S_1) і

(k_2, S_2) та фононну лінію з імпульсом q, тоді

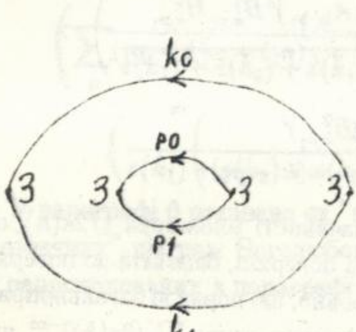
$$(-1)^{\gamma_1+S_1}k_1 + (-1)^{\gamma_2+S_2}k_2 + (-1)^{\gamma_q}q = 0$$

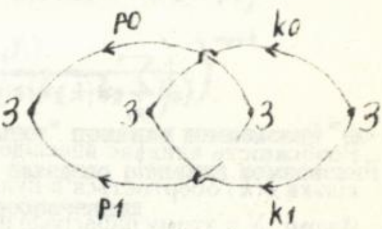
При використанні таких правил вищенаведена діаграма перетворюється на дві різні, що відповідають вкладам (1) і (2):





У параграфі 4 обговорюється узгодженість між вдосконаленою діаграмною технікою та традиційним визначенням незв'язних діаграм. Доведено, що сумі незв'язних діаграм

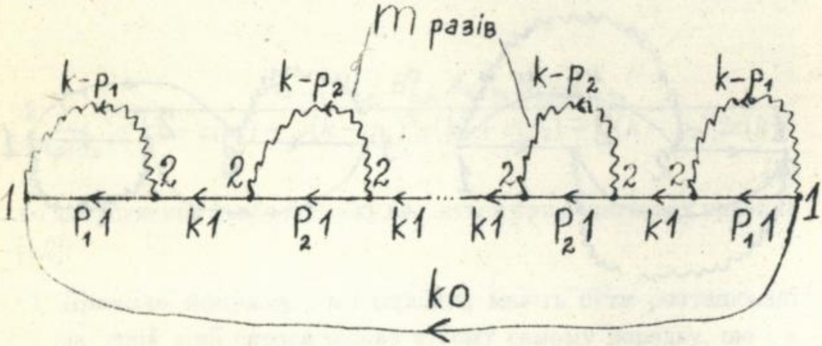




відповідає факторизований аналітичний вираз:

$$\left(\sum_k \frac{(C_k)^2}{(2\varepsilon(k))^2}\right)\left(\sum_p \frac{(C_p)^2}{(2\varepsilon(p))^2}\right)$$

Сформульована діаграмна техніка дозволяє досліджувати діаграми на розбіжність. Прикладом розбіжної діаграми є



діаграма, вклад якої дорівнює:

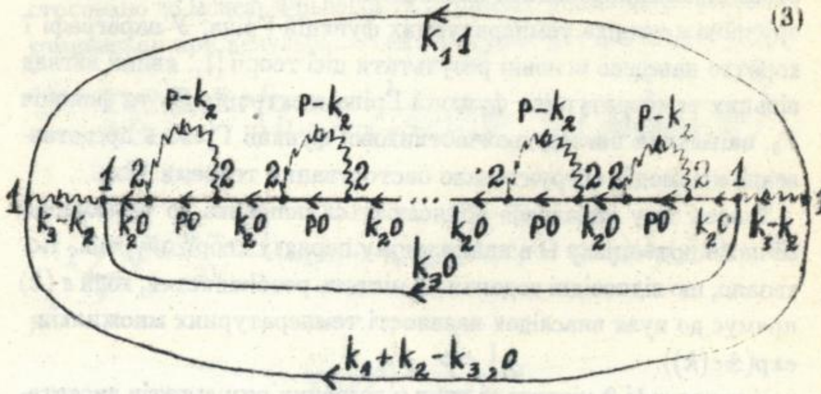
$$-\sum_k \frac{1}{(2\varepsilon(k))^{m+1}}\left(\sum_{p_1}\frac{(A_{k-p_1})^2 B^1_{k,p_1} B^2_{k,p_1}}{\varepsilon(k)+\varepsilon(p_1)+\omega(k-p_1)}\right)^2 \times$$

$$\left(\sum_{p_2}\frac{(A_{k-p_2} B^2_{k,p_2})^2}{\varepsilon(k)+\varepsilon(p_2)+\omega(k-p_2)}\right)^m.$$

Розбіжність виникає внаслідок наявності множника $1/2\varepsilon(k)$, оскільки $\varepsilon(k)$ обертається в нуль на поверхні, близькій до поверхні Фермі. У п'ятому параграфі показано, що поряд із загальноприйнятими "небезпечними" знаменниками типу $\sum_k (2\varepsilon(k))^{-m}$ при обчисленні матричних елементів можуть виникати вирази типу

$\sum_{k,p}(2\varepsilon(k)+2\varepsilon(p))^{-m}$ або $\sum_{k,p,l}(2\varepsilon(k)+2\varepsilon(p)+2\varepsilon(l))^{-m}$ і т.д., які теж є "небезпечними" та можуть приводити до розбіжностей. Наприклад, діаграмі [1,2]

(3)



відповідає вклад:

$$\sum_{k_1,k_2,k_3}\frac{(A_{k_3-k_2})^4(B^1_{k_2,k_3})^2(B^1_{k_1,k_1+k_2-k_3})^2}{(\varepsilon(k_1)+\varepsilon(k_1+k_2-k_3)+\omega(k_3-k_2))^2}\times$$

$$\left(\sum_p\frac{(A_{p-k_2}B^2_{k_2,p})^2}{\varepsilon(k_1)+\varepsilon(k_2)+\varepsilon(k_1+k_2-k_3)+\omega(k_2-p)}\right)^m\times$$

$$\left(\frac{1}{\varepsilon(k_1)+\varepsilon(k_2)+\varepsilon(k_3)+\varepsilon(k_1+k_2+k_3)}\right)^{m+1}.$$

У параграфі 6 показано як "працює" принцип компенсації "небезпечних" діаграм Боголюбова, наведено рівняння компенсації у запропонованих в параграфі 2 позначеннях

$$C_k=2\sum_p\frac{(A_{k-p})^2B^1_{k,p}B^2_{k,p}}{\varepsilon(k)+\varepsilon(p)+\omega(k-p)}.$$

Відмічається, що розбіжна діаграма типу (3) не містить стану з двома квазічастками.

У другій главі дисертації принцип компенсації Боголюбова узагальнюється на випадок відмінних від нуля температур і отримується відповідне рівняння компенсації [1 - 3]. Для цього найбільш зручною є техніка температурних функцій Гріна. У параграфі 7 коротко наведено основні результати цієї теорії [1], явний вигляд вільних температурних функцій Гріна електронів G_0 та фононів F_0, загальний вигляд двохчастинкової функції Гріна в представленні взаємодії, обгрунтовано застосування теореми Віка.

У восьмому параграфі обчислюється поправка до термодинамічного потенціалу Ω в найнижчому порядку теорії збурень. Показано, що відповідні доданки не містять розбіжностей, коли $\epsilon(k)$ прямує до нуля внаслідок наявності температурних множників $exp(\pm\epsilon(k))$.

У параграфі 9 міститься один з головних результатів дисертації - *узагальнений принцип компенсації* [1 - 3]: параметри канонічного uv перетворення мають бути обрані так, щоб мінімізувати середнє число квазічасток:

$$\overline{N} = \frac{\mathrm{Tr}\left(\exp(-\beta H) \sum_{k,s} \alpha^{+}_{k,s}\alpha_{k,s}\right)}{\mathrm{Tr}\left(\exp(-\beta H)\right)}.$$

Знайдено аналітичний вираз узагальненого принципу -*узагальнене рівняння компенсації* [1,2,3]:

$$\mathrm{Re}\frac{\mathrm{Tr}\left(\exp(-\beta H)\alpha^{+}_{k,1}\alpha^{+}_{k,0}\right)}{\mathrm{Tr}\left(\exp(-\beta H)\right)} = 0.$$

Показано, що це рівняння еквівалентно наступній умові на точну температурну функцію Гріна:

$$G_B(k_1, t_1; k_2, t_2)\,|_{t_1=t_2} = 0, \tag{4}$$

де

$$G_B(k_1, t_1; k_2, t_2) = \frac{\mathrm{Tr}\,(\exp(-\beta H)\alpha_1^+(k_1, t_1)\alpha_0^+(k_2, t_2))}{\mathrm{Tr}\,(\exp(-\beta H))}$$

У десятому параграфі узагальнений принцип компенсації застосовано до моделі Фрьоліха та отримано узагальнене рівняння компенсації при ненульових температурах для цієї моделі [1,2]:

$$\frac{(E(k_1) - \mu)\, u_{k_1} v_{k_1}}{2\varepsilon(k_1)} \left(\frac{1}{[1 + \exp(-\beta\varepsilon(k_1))]^2} - \frac{1}{[1 + \exp(\beta\varepsilon(k_1))]^2} \right) =$$

$$2 \sum_p g^2 \frac{\omega(p - k_1)}{2V} (u_{k_1} v_p + u_p v_{k_1}) (u_{k_1} u_p - v_p v_{k_1}) \varphi_{k_1,p}(\beta), \quad (5)$$

де

$$\varphi_{k_1,p}(\beta) = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{\nu_i} \times$$

$$\left(\frac{1}{\nu_i + \sigma_i} (F_{11}^i - F_{12}^i - F_{22}^i + F_{23}) + \frac{1}{\sigma_i} (F_{12}^i - F_{13}^i - F_{21}^i + F_{22}^i) \right);$$

де коефіцієнти F_{kj}^i задаються наступним чином:

$$\begin{array}{ll}
F_{11}^1 = f^+ f^+ c^- d^+ & F_{11}^2 = f^+ f^+ c^- d^- \\
F_{12}^1 = f^+ f^+ c^+ d^- & F_{12}^2 = f^+ f^+ c^+ d^+ \\
F_{13}^1 = f^+ f^- c^+ d^- & F_{13}^2 = f^+ f^- c^+ d^+ \\
F_{21}^1 = f^- f^+ c^- d^+ & F_{21}^2 = f^- f^+ c^- d^- \\
F_{22}^1 = f^- f^- c^- d^+ & F_{22}^2 = f^- f^- c^- d^- \\
F_{23}^1 = f^- f^- c^+ d^- & F_{23}^2 = f^- f^- c^+ d^+
\end{array}$$

та коефіцієнти f, c, d визначаються як

$$\begin{array}{ll}
f^- = \frac{1}{1+\exp(-\beta\varepsilon(k_1))} & f^+ = \frac{-1}{1+\exp(\beta\varepsilon(k_1))} \\
c^- = \frac{1}{1+\exp(-\beta\varepsilon(p))} & c^+ = \frac{-1}{1+\exp(\beta\varepsilon(p))} \\
d^- = \frac{1}{1-\exp(-\beta\omega(k_1-p))} & d^+ = \frac{-1}{1-\exp(\beta\omega(k_1-p))}.
\end{array}$$

Всі громіздкі обчислення при отриманні рівняння (5) винесені в додаток В.

Після виведення рівняння (5) необхідно було дослідити його поведінку в границі $\beta \to \infty$ (випадок нульових температур). Це зроблено в параграфі 11. Отримане повне співпадіння при $T = 0$ рівняння (5) з рівнянням компенсації Боголюбова:

$$(E(k) - \mu)\, u_k v_k = \sum_p g^2 \frac{\omega(k-p)}{2V} \times$$

$$\frac{(u_k v_p + u_p v_k)(u_k u_p - v_p v_k)}{\varepsilon(k) + \varepsilon(p) + \omega(k-p)}$$

Цей факт свідчить на користь виведеного узагальненого принципу компенсації (4). Останній параграф другої глави присвячено застосуванню узагальненого принципу компенсації до моделі Бардіна-Купера-Шриффера (БКШ) [4]. Отримано рівняння компенсації

$$2\,(E(k_1) - \mu)\, u_{k_1} v_{k_1} = \left(u_{k_1}^2 - v_{k_1}^2\right) \sum_p \frac{\mathbf{W}(k_1, p)}{V} u_p v_p \operatorname{th}\left(\frac{\beta}{2} \tilde{\varepsilon}(p)\right),$$

яке простими алгебраїчними перетвореннями зводиться до відомого рівняння для щілини:

$$\Delta(k) = \sum_p \frac{\mathbf{W}(k,p)}{2V} \times$$

$$\frac{\Delta(k)}{\sqrt{(E(p) - \mu)^2 + \Delta(p)^2}} \operatorname{th} \frac{\sqrt{(E(p) - \mu)^2 + \Delta(p)^2}}{2},$$

де

$$\Delta(k) = \sum_p \frac{\mathbf{W}(k,p)}{V} u_p v_p$$

є енергетичною щілиною.

У третій главі дисертації досліджується існування нетривіального розв'язку рівняння компенсації [4]. Спочатку обидва рівняння компенсації при нульовій температурі в моделі Фрьоліха

$$(E(k)-\mu)\,u_k v_k = \sum_p g^2 \frac{\omega(p-k)}{2V} \times$$

$$\frac{(u_k v_p + u_p v_k)(u_k u_p - v_p v_k)}{\varepsilon(k)+\varepsilon(p)+\omega(k-p)}$$

та БКШ

$$2\,(E(k)-\mu)\,u_k v_k = \left(u_k^2 - v_k^2\right) \sum_p \frac{\mathbf{W}(k,p)}{V} u_p v_p$$

зводяться до одного й того ж рівняння для щілини:

$$\Delta(k) = \sum_p \frac{\tilde{\mathbf{W}}(k,p)}{2V} \frac{\Delta(p)}{\sqrt{(E(p)-\mu)^2+\Delta(p)^2}}, \tag{6}$$

яке відрізняється лише явним виглядом ядра $\tilde{\mathbf{W}}(k,p)$. Це зроблено в параграфі 13. Таким чином, показано, що задача існування нетривіальних розв'язків рівняння компенсації еквівалентна задачі існування нетривіальних розв'язків рівняння для щілини. Остання розв'язується в два етапи.Спочатку підбирається ядро $\mathbf{W}_0(k,p)$, для якого рівняння (6) розв'язується точно. Потім досліджуються малі нелінійні збурення такого ядра.

У параграфі 14 будується наближене ядро

$$\mathbf{W}_0(k,p) = \frac{\mathbf{W}g^2}{|p|}, \quad |p| \in [k_1,k_2],$$

для якого рівняння для щілини розв'язується точно. Точний розв'язок

$$\Delta_0 = \frac{\omega_0}{sh\,(2\pi^2/\mathbf{W}g^2 m)}$$

неаналітично залежить від константи зв'язку, що підтверджується багаточисленними експериментами. Параграф 15 містить основний результат третьої глави - теорему про існування хоча б одного нетривіального розв'язку рівняння для щілини з ядром спеціального типу [4].

ТЕОРЕМА. Для довільної додатної сталої $0 < A < \infty$, що визначає клас ядер у рівнянні (6) формулою

$$\mathbf{W}(k,p) = \begin{cases} \mathbf{W}_0(k,p) + w(k,p), & k \in [k_1, k_2], \\ 0, & k \notin [k_1, k_2], \end{cases}$$

де $0 \leq w(k,p) \leq M(A)$, а $M = M(A)$ визначена умовою

$$M < \min(m_1, m_2),$$

$$m_1 = 2A\Delta_0 \times$$

$$\left[\sqrt{{\Delta_0}^2 + {\omega_0}^2} \left(\sqrt{(A+\Delta_0)^2 + {\omega_0}^2} + \sqrt{{\Delta_0}^2 + {\omega_0}^2} \right) \times \right.$$

$$\left. \frac{1}{4\pi^2} \int_{k_1}^{k_2} \frac{p^2\, dp\, (A+\Delta_0)}{\sqrt{{\Delta_0}^2 + (E(p)-\mu)^2}} \right]^{-1},$$

$$m_2 = \left[\frac{1}{4\pi^2} \int_{k_1}^{k_2} \frac{p^2\, dp}{\sqrt{{\Delta_0}^2 + (E(p)-\mu)^2}} \left(1 + \frac{(A+\Delta_0)^2}{{\Delta_0}^2 + (E(p)-\mu)^2} \right) \right]^{-1}$$

рівняння для щілини

$$\Delta(k) = \frac{g^2}{16\pi^3} \int d^3p \frac{\mathbf{W}(k,p)\Delta(p)}{\sqrt{(E(p)-\mu)^2 + \Delta(p)^2}} \qquad (7)$$

має принаймні один нетривіальний розв'язок типу

$$\Delta(k) = \Delta_0 + \delta(k)$$

$$0 \le \delta(k) \le A,$$

де $\delta(k) \in \mathbf{C}[k_1, k_2]$, тобто $\delta(k)$ належить простору неперервних функцій на відрізку $[k_1, k_2]$. При доведенні цієї теореми нелінійне інтегральне рівняння для щілини (7) перетворюється в рівняння на нерухому точку нелінійного оператора $T = Q + S$, де

$$(Qf)(k) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{k_1}^{k_2} \mathbf{W} g^2 p \, dp \times$$

$$\left[\frac{f(p) + \Delta_0}{\sqrt{(\Delta_0 + f(p))^2 + (E(p) - \mu)^2}} - \frac{\Delta_0}{\sqrt{(\Delta_0)^2 + (E(p) - \mu)^2}} \right]$$

$$(Sf)(k) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{k_1}^{k_2} w(k,p) \, dp \frac{p^2 [f(p) + \Delta_0]}{\sqrt{(\Delta_0 + f(p))^2 + (E(p) - \mu)^2}}$$

Потім у просторі $\mathbf{C}[k_1, k_2]$ будується замкнена, опукла, обмежена множина

$$D = \{ f(k) \mid f(k) \in \mathbf{C}[k_1, k_2], 0 \le f(k) \le A \}$$

та доводиться, що оператор T переводить її в себе:

$$0 \le (Tf)(k) \le A.$$

Далі показується, що оператор Q є цілком неперервним, а оператор S - стискаючим на множині D. Тоді, за теоремою про нерухому точку оператора типу стискаючий плюс цілком неперервний випливає існування принаймні одного нетривіального розв'язку рівняння для щілини, що й потрібно було довести.

У додатку А обчислено перші нетривіальні доданки ряду теорії збурень для енергії основного стану в моделі Фрьоліха:

$$E_0 = U_{Fr} + \sum_{k,p} \frac{(A_{k-p})^2 (B^1_{k,p})^2}{\varepsilon(k) + \varepsilon(p) + \omega(k-p)}$$

$$-\sum_k \frac{(C_k)^2}{2\varepsilon(k)} + 4\sum_{k,p} \frac{C_k(A_{k-p})^2 B^1_{k,p} B^2_{k,p}}{(\varepsilon(k)+\varepsilon(p)+\omega(k-p))2\varepsilon(k)} + \dots$$

У додатку В обчислено доданки другого порядку ряду теорії збурень для функції Гріна

$$G^{(2)}_B(k_1,t_1;k_2,t_2)\,|_{t_1=t_2} = -2\sum_p (A_{k_1-p})^2 B^1_{k_1,p} B^2_{k_1,p} \delta_{k_1,k_2} \varphi_{k_1,p}(\beta).$$

Цей результат використано у параграфі 10 при виведенні узагальненого рівняння компенсації в моделі Фрьоліха.

Додаток С містить відомі теореми та визначення, які використовуються при доведенні теореми про існування хоча б одного нетривіального розв'язку рівняння для щілини (6),(7) з ядром спеціального типу.

Основні положення дисертації опубліковані в наступних роботах:

1. Мостіпан К.В. Узагальнення принципу компенсації. Київ, 1993.-19 с.-(Препр. /АН України.Ін-т математики;93.40)

2. Мостіпан К.В. Про деякі аспекти методу теорії збурень у теорії надпровідності // Доп. АН України. -1993.-N 12.

3. Мостіпан К.В. Узагальнення принципу компенсації Боголюбова на випадок відмінних від нуля температур у моделях теорії надпровідності // Тези першої українсько-американської школи "Диференційні рівняння та їх застосування" (Україна, Крим, Судак, 1-10 черв.1993 р.)-Київ, 1993.-Ч.2.

4. Mostipan K.V. The Generalized Principle of Compensation in the Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) Model and an Existence Theorem for the Gap Equation. Kiev, 1994.-25 p.-(Prepr./Ukr.Acad.Sci Inst.Mathematics;94.8)

Підписано до друку 09.03.94. Формат 60×84/16. Папір друк. Офс. друк. Ум. друк. арк. 1,16. Ум.фарбо-відб. 1,16. Обл.-вид. арк. 0,7. Тираж 100 прим. Зам. 69 Безкоштовно.

Підготовлено і віддруковано в Інституті математики АН України 252601 Київ 4, ГСП, вул. Терещенківська, 3.