

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

САТТАРОВ Бахтиёр Исраилович

ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛЬНЫХ СИСТЕМ КВАНТОВОЙ
СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ, УЧИТЫВАЮЩИХ
ДВИЖЕНИЕ ЦЕНТРА МАСС

01.01.03 – математическая физика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Киев – 1994

АВ 29.467

Диссертация есть рукопись.

Работа выполнена в Институте математики АН Украины.

Научный руководитель: член-корреспондент АН Украины,
профессор ПЕТРИНА Д.Я.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук
ГОНЧАР Н.С.

доктор физико-математических наук
МИХАЙЛЕЦ В.А.

Ведущая организация: Харьковский государственный универ-
ситет, кафедра мат. физики.


Защита диссертации состоится " 19 " сентября 1994 г
в 14 часов на заседании специализированного совета
Д 016.50.02 при Институте математики АН Украины по адресу:
252801 Киев 4, ГСП, ул. Терещенковская, 3.

О диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Автореферат разослан "18" марта 1994 г.

Ученый секретарь
специализированного совета
доктор физико-математических наук ЛУЧКА А.Ю.

ЛНБ ім. В. Стефаника
АН України

ЛНБ України ім.В.Стефаника

00801524 (К)

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Одной из важнейших задач квантовой статистической механики является теоретическое обоснование явления сверхпроводимости.

Для теоретического обоснования этого явления проводились исследования в двух направлениях: построения макроскопической теории (Дж. Гортера, Х.Ж.Б.Казимира; Ф. Лондона, Г. Лондона; В.Л. Гинзбург, Д. Ландау; А.В. Пиппарда и др.) и построения микроскопической теории (Г.Фрелиха; М.Шафрота, С.Батлера, Дж.Блатта; Н.Н.Боголюбова; Дж.Бардина, Л.Купера, Дж.Шриффера и др.).

Современная теория сверхпроводимости была построена одновременно в классических работах Н.Н.Боголюбова и Дж.Бардина, Л.Купера, Дж.Шриффера. Существенный вклад в развитие этой теории внесли работы Н.Н.Боголюбова, Н.Н.Боголюбова (мл.), Дж.Бардина, Дж.Вентцеля, Л.П.Горькова, Д.Н.Зубарева, М.Жирардо, Л.Купера, Д.Я.Петрины, Г.Рикайзе, В.В.Толмачева, С.В.Тябликова, Д.В.Ширкова, Дж.Шриффера, Ю.А.Черковникова, В.П.Яцишина, и других авторов.

При построении своей теории Бардин, Купер и Шриффер рассматривали взаимодействие между частицами с противоположными импульсами хотя можно было бы рассматривать взаимодействие пары частиц с суммарным импульсом $\tilde{p} \neq 0$. Поэтому с точки зрения математического обоснования теории сверхпроводимости представляет интерес изучение модели, учитывающей движение центра масс, т.е. модели, в которой рассматривается взаимодействие между частицами с произвольным суммарным импульсом \tilde{p} .

Настоящая диссертация посвящена изучению модели, в которой суммарный импульс куперовской пары принимает дискретные значения $\tilde{p}_k = kV$, $k = 1, 2, \dots, M$, M - фиксированное число. Исходя из того, что реальные квантовомеханические системы следует рассматривать в бесконечном объеме, изучаемая модель рассмотрена при $V \rightarrow \infty$.

Цель работы. Исследование модельной системы, учитывающей движение центра масс, заданной модельным гамильтонианом теории сверхпроводимости БКШ

$$H = - \int \psi^\dagger(x) \left(\frac{\Delta}{2} + \mu \right) \psi(x) dx + \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{2V} \sum_{k=1}^M \int_{\Omega^4} dx_1 dx_2 dx'_1 dx'_2$$

$$\exp\left(\frac{1}{2} \tilde{p}_k(x_1+x_2)\right) v_k(x_1-x_2) \exp\left(-\frac{1}{2} \tilde{p}_k(x'_1+x'_2)\right) v_k(x'_2-x'_1) \times \\ \times \psi(x_1) \psi(x_2) \psi(x'_2) \psi(x'_1),$$

где все квантовые константы помножены равными единице и для простоты не учтены спиновые переменные; $\psi(x)$, $\psi(x)$ - операторы рождения и уничтожения частиц, μ - химический потенциал; $\lambda < 0$ - константа взаимодействия; действительные функции $v_k(x)$ такие, что $v_k(-x) = -v_k(x)$, $v_k(x) \in S(\mathbb{R}^3)$; интегралы понимаются в смысле главного значения, т.е. при $V = \text{mes}(\Lambda) \rightarrow \infty$ область интегрирования $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ равномерно расширяется до \mathbb{R}^3 .

Методы исследования. Основными методами исследования служат методы функционального анализа, методы квантовой теории поля, метод аппроксимирующего гамильтониана Боголюбова-Зубарева-Церковяникова.

Научная новизна, практическая и теоретическая ценность.

С помощью гамильтониана (I) математически обоснована теория сверхпроводимости в модельной системе, учитывающей движение центра масс. Такая модельная система может быть полезна для исследования эффекта Джозефсона, так как в ней, в отличие от модели БКШ, связанная пара свободно движется в сверхпроводящем состоянии. Она будет свободно двигаться и в том случае, когда система разделена на две подсистемы, расстояние между которыми достаточно мало по сравнению с числом когерентности (размером) связанных пар.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на семинарах отдела математических методов статистической механики Института математики АН Украины.

Публикации. Основные результаты опубликованы в работах [1-3].

Объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы, содержащего 45 наименований. Общий объем диссертации - 84 страниц машинописного текста.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении диссертационной работы приводится краткий обзор работ, относящихся к построению теории сверхпроводимости, излагается постановка задачи и формулируются результаты диссертации.

В первой главе диссертации построено гильбертово пространство

состояний системы ферми-частиц, учитывающей движение центра масс.

В первом параграфе построено пространство \mathbb{H}_n состояний системы n , $n \geq 2$, частиц как гильбертово пространство волновых функций f_n , которые являются произведением волновой функции свободного движения центра массы системы и трансляционно инвариантной волновой функции, описывающей относительное движение всей системы, т.е.

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n \exp\left(\frac{i}{\hbar} \tilde{p}_k(x_1 + \dots + x_n)\right) f_{n,k}(x_1, \dots, x_n), \quad n \geq 2, \quad (2)$$

где функции $f_{n,k}(x_1, \dots, x_n)$ антисимметричны относительно перестановки аргументов, трансляционно инвариантны:

$$f_{n,k}(x_1, \dots, x_n) = f_{n,k}(x_1 - x_n, \dots, x_{n-1} - x_n)$$

и квадратично интегрируемы по разностным переменным $x_1 - x_n, \dots, x_{n-1} - x_n$.

В \mathbb{H}_n введено скалярное произведение

$$(f_n, g_n)_{\mathbb{H}_n} = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int \overline{f_n(x_1, \dots, x_n)} g_n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n, \quad (3)$$

и норма

$$\|f_n\|_{\mathbb{H}_n} = \left\{ \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int |f_n(x_1, \dots, x_n)|^2 dx_1 \dots dx_n \right\}^{1/2}. \quad (4)$$

где, и впредь, все интегралы понимаются в смысле главного значения.

Доказано, что для скалярного произведения (3) и нормы (4) верны следующие формулы:

$$(f_n, g_n)_{\mathbb{H}_n} = \sum_{k=1}^n (f_{n,k}, g_{n,k})_{\mathbb{L}_2(\mathbb{R}^{3n-1})}, \quad \|f_n\|_{\mathbb{H}_n}^2 = \sum_{k=1}^n \|f_{n,k}\|_{\mathbb{L}_2(\mathbb{R}^{3n-1})}^2.$$

Что касается пространства состояний \mathbb{H}_1 системы, состоящей из одной свободной частицы, то полагаем $\mathbb{H}_1 = \mathbb{L}_2(\mathbb{R}^3)$.

Во втором параграфе построено пространство \mathbb{H}_n^* состояний системы, состоящей из всевозможных подсистем частиц. Пространство состояний реализовано как прямая сумма тензорного произведения пространств состояний всевозможных подсистем частиц, т.е.

$$\mathbb{H}_n^* = \sum_0^n \oplus (\mathbb{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{H}_n), \quad (5)$$

элементом которого являются функции вида

$$F_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma} A f_{n_1}(x_{1_{\sigma_1}}, \dots, x_{n_1_{\sigma_1}}) \times \dots \times f_{n_\ell}(x_{1_{\sigma_\ell}}, \dots, x_{n_\ell_{\sigma_\ell}}),$$

где A - антисимметризирующий оператор; σ означает совокупность всевозможных разбиений множества n точек $(x_1, \dots, x_n) = (n)$ на подмножества $(n_1), \dots, (n_\ell)$, $n_1 + \dots + n_\ell = n$, причем σ содержит и тождественное разбиение (n) , а подмножества, отличающиеся лишь порядком точек, считаются одинаковыми.

В \mathbb{H}_n^T введено скалярное произведение

$$(F_n, G_n)_{\mathbb{H}_n^T} = \sum_{\sigma} (f_{n_1}, g_{n_1})_{\mathbb{H}_{n_1}} \times \dots \times (f_{n_\ell}, g_{n_\ell})_{\mathbb{H}_{n_\ell}}.$$

Через \mathbb{DH}_n^T обозначено всюду плотное в \mathbb{H}_n^T множество финитных функций, заданный формулой

$$\mathbb{DH}_n^T = \sum_{\sigma} \oplus (\mathbb{DH}_{n_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{DH}_{n_\ell}), \quad (8)$$

где $\mathbb{DH}_1 = \mathbb{D}(\mathbb{R}^3)$; \mathbb{DH}_n , если $n > 1$, состоит из функций f_n вида (2) с $f_{n,k} \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^{3(n-1)})$.

В третьем параграфе построено пространство \mathbb{H} состояний системы с переменным числом частиц. Для этого использована конструкция пространства Фока, т.е.

$$\mathbb{H} = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus (\mathbb{H}_n^T), \quad (F, G)_{\mathbb{H}} = \sum_{n=0}^{\infty} (F_n, G_n)_{\mathbb{H}_n^T}, \quad \|F\|_{\mathbb{H}}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|F_n\|_{\mathbb{H}_n^T}^2, \quad (7)$$

элементами которого являются последовательности

$$I = (F_0, F_1(x_1), F_2(x_1, x_2), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n), \dots), \quad F_n \in \mathbb{H}_n^T, \quad F_0 \in \mathbb{C}.$$

Вторая глава диссертации посвящена всестороннему изучению модельной системы в рамках формализма Шредингера.

В первом параграфе формально определен модифицированный модельный гамильтониан теории сверхпроводимости ЕКШ (I) в представлении вторичного квантования.

Во втором параграфе модифицированному модельному гамильтониану теории сверхпроводимости ЕКШ (I) придан строгий математический смысл самосопряженного оператора на гильбертовом пространстве состояний \mathbb{H} (7). Для этого гамильтониан \mathbb{H} (I) представлен в

виде прямой суммы операторов H_n и доказаны следующие утверждения.

Лемма 2.2. Оператор H_n определен на всюду плотном в \mathcal{H}_n^T (5) множестве финитных функций $\mathcal{DH}_n^T(\cdot)$ и действует согласно формуле

$$H_n^T f_n(x_1, \dots, x_n) = - \sum_{l=1}^n \left(\frac{\Delta_l}{2} + \mu \right) f_n(x_1, \dots, x_n) + \lambda \sum_{\substack{i, j \\ i < j=1}}^n F_{n-2}^{i, j}(x_1, Y, Y, x_n) \times \\ \times \sum_{k=1}^M v_k(x_i - x_j) \exp\left(\frac{i}{2} \tilde{p}_k(x_i + x_j)\right) \int d(x'_i - x'_j) v_k(x'_i - x'_j) f_{2, k}(x'_i - x'_j), \\ F_0 = 1, F_1 = 0,$$

где

$$F_{n-2}^{i, j}(x_1, Y, Y, x_n) = \sum_{\sigma_1} \Lambda f_{n_1}^{i, j}(x_{i_1}, Y, Y, x_{n_1}) \times \dots \times f_{n_\ell}^{i, j}(x_{i_\ell}, Y, Y, x_{n_\ell}), \\ (x_1, Y, Y, x_{n+2}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n+1}), \\ \substack{i, j \\ \sigma_1}$$

σ_1 - разбиение множества (x_1, Y, Y, x_{n+1}) на всевозможные подмножества.

Теорема 2.2.1. Оператор H_n на всюду плотном в \mathcal{H}_n^T (5) множестве финитных функций \mathcal{DH}_n^T (8) симметричен и равен следующему оператору:

$$\sum_{\sigma} \oplus \{ H_{n_1}^m \otimes I \otimes \dots \otimes I + \dots + I \otimes I \otimes \dots \otimes H_{n_\ell}^m \},$$

где: если $n_\ell = 2$ то $H_{n_\ell}^m = H_2$, $H_2 f_2(x_1, x_2) = - \sum_{l=1}^2 \left(\frac{\Delta_l}{2} + \mu \right) f_2(x_1, x_2) \cdot$

$$+ \lambda \sum_{k=1}^M v_k(x_1 - x_2) \exp\left(\frac{i}{2} \tilde{p}_k(x_1 + x_2)\right) \int d(x'_1 - x'_2) v_k(x'_1 - x'_2) f_{2, k}(x'_1 - x'_2);$$

если $n_\ell \neq 2$, то $H_{n_\ell}^m = H_{n_\ell}^0$, $H_{n_\ell}^0 f_n(x_1, \dots, x_n) = - \sum_{l=1}^n \left(\frac{\Delta_l}{2} + \mu \right) f_n(x_1, \dots, x_n)$:

I - единичный оператор.

В третьем параграфе изучен спектр модифицированного модельного гамильтониана (Γ) на гильбертовом пространстве \mathcal{H}_n^T состояний системы n частиц. Установлено, что для преобразования Фурье функции $v_k(x)$, которое имеет вид

$$v_k^2(p) = \frac{v_{\alpha, k}}{2\pi \Gamma} \text{ при } 0 < \Gamma_1 < p^2 < \Gamma_m \text{ и } v_k^2(p) = 0 \text{ в противном случае,}$$

спектр оператора H_2 равен

$$[-2\mu, E_1 - 2\mu] \cup [E_m - 2\mu, +\infty) \cup \{ \tilde{E}_k - 2\mu \}_{k=1,2,\dots,M}$$

где

$$\tilde{E}_k = \frac{E_1 \exp(-(\lambda v_{0,k})^{-1}) - E_m}{\exp(-(\lambda v_{0,k})^{-1}) - 1}$$

Собственными функциями оператора H_2 являются

$$\exp\left(\frac{1}{2} \tilde{p}_k (x_1 + x_2)\right) \Gamma_{2,k}^c(x_1 - x_2), \quad k = 1, 2, \dots, M,$$

где $\Gamma_{2,k}^c(x_1 - x_2)$ - обратное преобразование Фурье функции

$$c_k v_k \left[\tilde{p}_k - \frac{\tilde{p}_k}{2} \right] \left\{ \left[\tilde{p}_k - \frac{\tilde{p}_k}{2} \right]^2 - \tilde{E}_k \right\}^{-1}, \quad c_k = \left\{ \int \frac{v_k^2(p)}{(p^2 - \tilde{E}_k)^2} dp \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

они представляют собой волновые функции связанной пары Купера с определенными значениями импульсов центра массы \tilde{p}_k , а величина \tilde{E}_k является энергией связи этой пары. Построено сверхпроводящее состояние нормальной системы с переменным числом частиц:

$$F^c = \left\{ F_0, 0, F_2^c(x_1, x_2), \dots, F_n^c(x_1, \dots, x_n), \dots \right\}, \quad F_{2n+1}^c = 0, \quad (8)$$

где

$$F_n^c(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{2^{n-1}/n!} \Lambda F_2^c(x_1, x_2) \dots \Lambda F_2^c(x_{n-1}, x_n),$$

$$F_2^c(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^M \exp\left(\frac{1}{2} \tilde{p}_k (x_1 + x_2)\right) \Gamma_{2,k}^c(x_1 - x_2).$$

Введем аппроксимирующий оператор

$$H_{\text{аппр}} = - \int \psi^\dagger(x) \left(\frac{\hbar^2}{2m} + \mu \right) \psi(x) dx - \sum_{k=1}^M \left[\frac{\sqrt{|\lambda|}}{2} \int \frac{dx_1 dx_2 v_k(x_1 - x_2)}{\exp(\frac{1}{2} \tilde{p}_k (x_1 + x_2)) - \tilde{\sigma}_k \psi(x_2) \psi(x_1) \exp(-\frac{1}{2} \tilde{p}_k (x_1 + x_2))} \right] \left\{ \sigma_k^\dagger \psi(x_1) \psi^\dagger(x_2) \right\} - \frac{|\sigma_k|^2}{2} VI, \quad (9)$$

где I - единичный оператор;

$$\sigma_k = 2\sqrt{|\lambda|} \int dx_1 dx_2 v_k(x_2 - x_1) \Gamma_{2,k}^c(x_1 - x_2).$$

и доказана следующая теорема.

Теорема 2.3. Модельный гамильтониан $H(I)$ на волновой функции (8) совпадает с аппроксимирующим оператором $H_{\text{аппр}}$, (9).

В четвертом параграфе рассмотрен и изучен спектр элементарных

возбуждений $a^+(\rho_1) \dots a^+(\rho_m) \Gamma^c$, где a^+ связан с ψ^+ через преобразование Фурье; Γ^c - сверхпроводящее состояние в импульсном представлении. Установлено, что между спектром элементарных возбуждений и спектром сверхпроводящего состояния нет щели. Доказаны теоремы.

Теорема 2.4.1. На элементарных возбужденных состояниях при $\rho_i + \rho_j \neq \tilde{\rho}_k$, $k = 1, 2, \dots, M$; $i, j = 1, 2, \dots, m$ оператор $H_{n,m}$ равен следующему оператору:

$$H_{n,m} \otimes I \otimes \dots \otimes I \otimes I \otimes \dots \otimes I + \dots + I \otimes I \otimes \dots \otimes H_2 \otimes I \otimes \dots \otimes I + I \otimes I \otimes \dots \otimes I \otimes H_1^0 \otimes \dots \otimes I + \dots + I \otimes I \otimes \dots \otimes I \otimes I \otimes \dots \otimes H_1^0$$

Теорема 2.4.2. На элементарных возбужденных состояниях при $\rho_i + \rho_j \neq \tilde{\rho}_k$, $k = 1, 2, \dots, M$; $i, j = 1, 2, \dots, m$ модельный гамильтониан $H(I)$ совпадает с аппроксимирующим оператором $H_{\text{approx}}(\theta)$.

Третья глава посвящена изучению модельной системы в рамках формализма большого канонического ансамбля как единого целого с определенной температурой и плотностью. Для этого использован метод функций Грина.

В первом параграфе рассмотрены многочастичные функции Грина модельной системы

$$G_{n,m}(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n; x'_1, t'_1, \dots, x'_m, t'_m) = (-i)^{\frac{n+m}{2}} \langle T(\psi(x_1, t_1) \dots \psi(x_n, t_n) \psi^+(x'_1, t'_1) \dots \psi^+(x'_m, t'_m)) \rangle, \quad (10)$$

где $\psi(x, t)$, $\psi^+(x, t)$ - взаимно сопряженные операторы рождения и уничтожения в представлении Гейзенберга, $x \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$; n и m - произвольные целые числа такие, что $n+m$ - четное число; T - оператор временного упорядочения, а усреднение ведется по большому каноническому ансамблю. Для функций Грина (10) получена бесконечная цепочка уравнений

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \mu \right) G_{n,m}(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n; x'_1, t'_1, \dots, x'_m, t'_m) = \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} \delta(t_1 - t'_j) \delta(x_1 - x'_j) G_{n-1, m-1}(x_2, t_2, \dots, x_n, t_n; x'_1, t'_1, \dots, x'_m, t'_m) + \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot i \frac{\Lambda}{V} \sum_{k=1}^M \int dy_1 dy_2 \exp\left(\frac{i}{2} \tilde{P}_k(x_1+y)\right) v_k(x_1-y) \exp\left(-\frac{i}{2} \tilde{P}_k(y_1+y_2)\right) v_k(y_1-y_2) \times \\
 & \times G_{n+1, m+1}(y_1, t_1, y_2, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n; x'_1, t'_1, \dots, x'_m, t'_m, y, t_1).
 \end{aligned}$$

Во втором параграфе рассмотрены свободные функции Грина

(12)

$$\begin{aligned}
 & G_{n, m}^0(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n; x'_1, t'_1, \dots, x'_m, t'_m) = \\
 & = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m, \\ \sum_{l_1, \dots, l_n} A G_{l_1, 1}^0(x_1, t_1; x'_{l_1}, t'_{l_1}) \times \dots \times G_{l_n, 1}^0(x_n, t_n; x'_{l_n}, t'_{l_n}) & \text{при } n = m, \end{cases}
 \end{aligned}$$

где суммирование ведется по всем перестановкам $\left[\begin{smallmatrix} 1, \dots, n \\ l_1, \dots, l_n \end{smallmatrix} \right]$; A - антисимметризатор; функции $G_{l, 1}^0(x, t; x', t')$ заданы формулой (10), а усреднение ведется по большому каноническому ансамблю со свободным гамильтонианом

$$H^0 = - \int \psi(x) \left(\frac{\Delta}{2} + \mu \right) \psi(x) dx.$$

Доказана следующая лемма.

Лемма 3.2. Свободные функции Грина $G_{n, m}^0$ (12) удовлетворяют цепочке уравнений (II) при $V \rightarrow \infty$.

В третьем параграфе рассмотрено функциональное пространство \mathcal{G} , как линейная оболочка функций следующего вида:

$$\begin{aligned}
 & G_{n, m}(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n; x'_1, t'_1, \dots, x'_m, t'_m) = \\
 & = \sum_{\sigma} A \tilde{g}_{n_1, m_1}(x_{l_1}, t_{l_1}, \dots, x_{l_{n_1}}, t_{l_{n_1}}; x'_{l_1}, t'_{l_1}, \dots, x'_{l_{m_1}}, t'_{l_{m_1}}) \times \dots \\
 & \times \tilde{g}_{n_\ell, m_\ell}(x_{l_1}, t_{l_1}, \dots, x_{l_{n_\ell}}, t_{l_{n_\ell}}; x'_{l_1}, t'_{l_1}, \dots, x'_{l_{m_\ell}}, t'_{l_{m_\ell}}).
 \end{aligned}$$

где σ - совокупность разбиений множества $(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n; x'_1, t'_1, \dots, x'_m, t'_m) = (n; m)$ на всевозможные подмножества $(n_1; m_1), \dots, (n_\ell; m_\ell)$, состоящие из четного числа точек, $n_1 + \dots + n_\ell = n$, $m_1 + \dots + m_\ell = m$, причем σ содержит и тождественное разбиение $(n; m)$, а подмножества, отличающиеся порядком следования элементов, считаются одинаковыми; функции $\tilde{g}_{n, m}(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n; x'_1, t'_1, \dots, x'_m, t'_m)$ имеют следующий вид:

$$\tilde{G}_{n,m}(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n; x'_1, t'_1, \dots, x'_m, t'_m) = \sum_{k=1}^M \exp\left(\frac{i}{n+m} \tilde{P}_k(x_1 + \dots + x_n - x'_1 - \dots - x'_m)\right) G_{n,m,k}(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n; x'_1, t'_1, \dots, x'_m, t'_m),$$

где $G_{n,m,k}(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n; x'_1, t'_1, \dots, x'_m, t'_m)$ трансляционно инвариантна, антисимметрична относительно перестановок пар $(x_1, t_1), \dots, (x_n, t_n), (x'_1, t'_1), \dots, (x'_m, t'_m)$, абсолютно интегрируема по разностным переменным $x_2 - x_1, \dots, x_n - x_1, x'_1 - x_1, \dots, x'_m - x_1$ при произвольных фиксированных $t_1, \dots, t_n, t'_1, \dots, t'_m$ и обладает свойством

$$G_{n,m,k}(x_1, t, \dots, x_n, t; x'_1, t, \dots, x'_m, t) = (-1)^{\frac{n-m}{2}} G_{m,n,k}(x'_1, t, \dots, x'_m, t; x_1, t, \dots, x_n, t).$$

Доказана следующая теорема.

Теорема 3.3. Бесконечная цепочка уравнений (II) в функциональном пространстве \mathbb{C} сводится к системе уравнений

(I3)

$$\begin{aligned} & \left(i \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \mu \right) G_{n,m}(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n; x'_1, t'_1, \dots, x'_m, t'_m) = \\ & = \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} \delta(t_1 - t'_j) \delta(x_1 - x'_j) G_{n-1,m-1}(x_2, t_2, \dots, x_n, t_n; x'_1, t'_1, \dots, x'_m, t'_m) + \\ & + \sqrt{|\lambda|} \sum_{k=1}^M \sigma_k \int dy \nu_k(x_1 - y) \exp\left(\frac{i}{2} \tilde{P}_k(x_1 + y)\right) G_{n-1,m+1}(x_2, t_2, \dots, x_n, t_n; x'_1, t'_1, \dots, \\ & \dots, x'_m, t'_m, y, t_1), \\ & \left(i \frac{\partial}{\partial t_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \mu \right) G_{n-1,m+1}(x_2, t_2, \dots, x_n, t_n; x'_1, t'_1, \dots, x'_m, t'_m, x_1, t_1) = \\ & = \sum_{j=2}^n (-1)^j \delta(t_1 - t_j) \delta(x_1 - x_j) G_{n-2,m}(x_2, t_2, \dots, x_n, t_n; x'_1, t'_1, \dots, x'_m, t'_m) - \\ & - \sqrt{|\lambda|} \sum_{k=1}^M \bar{\sigma}_k \int dy \nu_k(x_1 - y) \exp\left(-\frac{i}{2} \tilde{P}_k(x_1 + y)\right) G_{n,m}(y, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n; \\ & x'_1, t'_1, \dots, x'_m, t'_m). \end{aligned}$$

где

$$\sigma_k = i\sqrt{|\lambda|} \int d(y_2 - y_1) v_k(y_2 - y_1) \delta_{2,0,k} (0, 0, y_2 - y_1, 0).$$

В четвертом параграфе доказана следующая теорема.

Теорема 3.4. В функциональном пространстве \mathcal{E} система уравнений (13) совпадает с системой уравнений для функций Грина модели с аппроксимирующим оператором $\tilde{H}_{\text{аппр}}(\theta)$ с σ_k (14).

Показано, что утверждение теоремы 3.4 верно и для гамильтониана

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{\text{аппр}} = & - \int \psi(x) \left(\frac{\Delta}{2} + \mu \right) \psi(x) dx - \frac{\sqrt{|\lambda|}}{2} \sum_{k=1}^M \int dx_1 dx_2 v_k(x_1 - x_2) \times \\ & \times \left\{ \sigma_k^+ \psi(x_1) \psi(x_2) \exp\left(\frac{i}{2} \tilde{p}_k(x_1 + x_2)\right) - \bar{\sigma}_k \psi(x_2) \psi(x_1) \exp\left(-\frac{i}{2} \tilde{p}_k(x_1 + x_2)\right) \right\} \end{aligned}$$

операторы $\psi(x)$, $\psi(x)$ представлены в виде "квазидискретных" сумм, в результате этого оператор $\tilde{H}_{\text{аппр}}$ записан в виде

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{\text{аппр}} = & \sum_p \left[\frac{p^2}{2} - \mu \right] \alpha(p) \alpha(p) - \frac{\sqrt{|\lambda|}}{2} \sum_{k=1}^M \sum_p v_k \left(p - \frac{\tilde{p}_k}{2} \right) \times \\ & \times \left\{ \sigma_k^+ \alpha(p) \alpha\left(\frac{\tilde{p}_k}{2} - p\right) + \bar{\sigma}_k \alpha\left(\frac{\tilde{p}_k}{2} - p\right) \alpha(p) \right\}, \quad \tilde{\lambda} = \lambda (2\pi)^3, \end{aligned} \quad (15)$$

а для параметра σ_k (14) получено выражение

$$\sigma_k = \frac{\sqrt{|\lambda|}}{V} \sum_p v_k(p) \langle \alpha\left(\frac{p_k}{2} - p\right) \alpha\left(p + \frac{p_k}{2}\right) \rangle.$$

Для определения энергии коллективных возбуждений аппроксимирующий оператор $\tilde{H}_{\text{аппр}}$ (15) диагонализирован с помощью канонического преобразования Боголюбова-Валатина

$$\alpha(p) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{k=1}^M \left[1 + u^2 \left(p - \frac{\tilde{p}_k}{2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \left[\beta \left(p - \frac{\tilde{p}_k}{2} \right) - u \left(p - \frac{\tilde{p}_k}{2} \right) \beta \left(\frac{\tilde{p}_k}{2} - p \right) \right],$$

$$\alpha^+(p) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{k=1}^M \left[1 + u^2 \left(p - \frac{\tilde{p}_k}{2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \left[\beta^+ \left(p - \frac{\tilde{p}_k}{2} \right) - \bar{u} \left(p - \frac{\tilde{p}_k}{2} \right) \beta^+ \left(\frac{\tilde{p}_k}{2} - p \right) \right],$$

$$u(p) = \frac{T(p + \frac{\tilde{p}_k}{2}) + T(p - \frac{\tilde{p}_k}{2}) - \sqrt{\left\{T(p + \frac{\tilde{p}_k}{2}) + T(p - \frac{\tilde{p}_k}{2})\right\}^2 + 4|\tilde{\lambda}|v_k^2(p)|\sigma_k|^2}}{2\sqrt{|\tilde{\lambda}|}v_k(p)\bar{\sigma}_k}$$

$T(p) = p^2/2 - \mu$, $\hat{\theta}(p)$, $\theta(p)$ - операторы рождения и уничтожения квазичастиц (коллективных возбуждений системы). Отсюда получены энергия коллективных возбуждений системы

$$E(p) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M E_k(p) = \frac{1}{2M} \sum_{k=1}^M \left[p\tilde{p}_k + \sqrt{\left(p^2 + (\tilde{p}_k/2)^2 - 2\mu\right)^2 + 4|\tilde{\lambda}|v_k^2(p)|\sigma_k|^2} \right]$$

и интегральное уравнение для параметра щели σ_k

$$1 = \frac{2|\tilde{\lambda}|}{M(2\pi)^3} \int dp v_k^2(p) \frac{\text{th}(\beta E(p)/2) - \text{th}(\beta E(-p)/2)}{E_k(p) + E_k(-p)}$$

В конце параграфа, для случая нулевой температуры решено уравнение для параметра щели (при разумных ограничениях на потенциал взаимодействия). Получено:

$$\sigma_k = \frac{\Omega}{2\sqrt{|\tilde{\lambda}|}} \exp\left[-\frac{Mv_k^2}{|\tilde{\lambda}|}\right], \quad \Omega = \exp\left[-\int_0^{\infty} \ln t \frac{d\varphi(t)}{dt} dt\right]$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, основные результаты выносимые к защите заключаются в следующем:

1) построено гильбертово пространство состояний квантовомеханической системы ферми-частиц, находящихся в бесконечном объеме, как прямая сумма тензорного произведения пространств состояний всевозможных подсистем, в которых учтено свободное движение центра массы;

2) установлено, что модифицированный модельный гамильтониан, как самосопряженный оператор на гильбертовом пространстве состояний, описывает систему, состоящую из двух не взаимодействующих между собой подсистем: подсистемы не взаимодействующих частиц в нормальном состоянии и подсистемы не взаимодействующих пар частиц с ненулевыми импульсами центра массы пары в сверхпроводящем состоянии;

установлено, что модельный гамильтониан совпадает с аппроксимирующим оператором \hat{H}_{app} , как на сверхпроводящем, так и на возбужденном состояниях;

4) методом функций Грина установлено, что модельная система, описываемая модифицированным модельным гамильтонианом, может находиться как в нормальном (свободные функции Грина), так и в сверхпроводящем (функции Грина аппроксимирующего оператора) состояниях;

5) получены выражения для энергии коллективных возбуждений и параметра щели, которые при покоящемся центре массы пары совпадают с известными результатами теории БКШ, и поэтому можем заключить, что модельный гамильтониан $\hat{H}(I)$ задает взаимодействие, приводящее систему к сверхпроводящему состоянию.

Основные положения диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Саттаров Б.И. О модифицированном модельном гамильтониане теории сверхпроводимости БКШ // Докл. АН Украины, -1993. -10. -С. 48-51.

2. Саттаров Б.И. Спектр коллективных возбуждений модифицированного модельного гамильтониана теории сверхпроводимости БКШ. Метод аппроксимирующего гамильтониана. -Киев, 1994. -17 с. -(Препринт/ АН Украины. Ин-т математики; 94.8).

3. Саттаров Б.И. Об одной модельной системе, учитывающей движение центра масс. -Киев, 1994. -18 с. -(Препринт/ АН Украины. Ин-т математики; 94.9).

Подп. в печ. 28.02.94. Формат 60x84/16. Бумага тип. Офс. печать
Усл. печ. л. 0,93. Усл. кр.-отт. 0,93. Уч.-изд. л. 0,65. Тираж
60 экз. Зак. 74. Бесплатно.

Ипечатано в Институте математики АН Украины
452601 Киев 4, ГСП, ул. Терещенковская, 3

ЛНБ ім. В. Стефаника
АН України

461744

AB 29.461

AB 29.461