

УДК 517.946.9

На правах рукописи

Шханукова Мадина Мухамедовна

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ  
И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ПРОБЛЕМАМ СОЛЕ- И ВЛАГОПЕРЕНОСА

01.01.03 - математическая физика

Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Киев - 1994

AB 29.604

Работа выполнена в отделе математической физики и теории нелинейных колебаний Института математики АН Украины.

Научный руководитель: доктор физ.-мат. наук, профессор  
БЕРЕЗОВСКИЙ-А.А.

Официальные оппоненты: доктор физ.-мат. наук, профессор  
СЕЛЕЗОВ И.Т.,  
кандидат физ.-мат. наук, ст.научный  
сотрудник ГОРДИНСКИЙ Л.Д.

Ведущая организация : Институт механики АН Украины.

Защита диссертации состоится "\_\_\_" \_\_\_\_\_ 1994г. в \_\_\_ часов на заседании специализированного совета Д 016.50.02 при Институте математики АН Украины по адресу: 252601, Киев 4, ГСП, ул. Терещенковская, 3.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института.

Автореферат разослан "\_\_\_" \_\_\_\_\_ 1994г.

Ученый секретарь  
специализированного совета

Лучка А.В.



ЛНБ України ім.В.Стефаника



00777812 (W)

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Хорошо известно, что многие вопросы фильтрации жидкости в пористых средах, соле- и влагопереноса в почвогрунтах приводят к нелокальным задачам для дифференциальных уравнений математической физики. Впервые прикладной характер нелокальных краевых задач для определенных классов дифференциальных уравнений установили в своих работах Камнин Л.И., Чудновский А.Ф., Бицадзе А.В., Самарский А.А. Чудновский А.Ф. обратил внимание на недостаточно критический подход к формулировке граничных условий для уравнения влагопереноса; задание временного хода влажности на верхней границе почвы не выдерживает никакой критики.

В отличие от температурного хода во времени на поверхности, нельзя измерить влажность нулевого уровня почвы; о влажности почвы можно говорить только, отнеся ее к некоторому слою. Последний может быть достаточно тонким, но не бесконечно тонким. Другой класс нелокальных условий возникает при изучении популяционных моделей. Следует заметить, что задачи, возникающие в математической биологии, как правило, нелокальные.

Так как задачи с нелокальным условием порождают несамосопряженную задачу, а соответствующие операторы не являются знакоопределенными, то общая теория, разработанная для исследования устойчивости и сходимости разностных схем классических задач к указанным нелокальным задачам не применима.

Диссертационная работа посвящена исследованию корректности некоторых классов нелокальных задач для параболических уравнений, построению устойчивых разностных схем.

Полученные результаты доведены до алгоритмов и программ и

имеют непосредственное приложение к теории влаго- и солепереноса в почво-грунтах.

Цель работы. Целью работы является исследование корректности нелокальных задач для параболических уравнений, возникающих при математическом моделировании переноса влаги и соли в почво-грунтах. Построение и исследование сходимости разностных схем для рассматриваемых нелокальных задач.

Общие методы исследования. В работе применяются методы теории потенциалов, метод априорных оценок. При исследовании устойчивости и сходимости разностных схем — разностные аналоги теорем вложения Соболева С.Л., принцип максимума для общих параболических уравнений и дискретный аналог принципа максимума.

Научная новизна и практическая ценность. В диссертационной работе предложены и исследованы различные постановки нелокальных задач для стационарных и нестационарных задач. Так как задачи с нелокальным условием порождают несамосопряженную задачу, а соответствующие операторы не являются знакоопределенными, то существующая общая теория устойчивости и сходимости разностных схем к нелокальным задачам не применима. В диссертационной работе предложена методика получения априорных оценок для нелокальных задач в дифференциальной и разностной трактовках. Полученные теоретические результаты служат основой для прикладных разработок в САПР водохозяйственных и мелиоративных систем, где подсистема влаго и солепереноса в почво-грунтах является контролирующей подсистемой.

Апробация работы. По материалам диссертации сделаны доклады на школе-семинаре "Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения" (г.Нальчик, 1933 г.), на научном семинаре отдела математической физики и теории нелинейных колебаний", на семинарах математического факультета Кабардино-Балкарского госуниверситета.

Публикации. Основные результаты выполненных исследований опубликованы в пяти работах.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, приложения и библиографического списка, содержащего 44 наименования.

#### СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность и практическое значение темы, сформулирована цель работы, дан краткий обзор существующей по теме литературы, изложена структура и содержание диссертации.

В главе I предложен способ сведения нелокальной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения к двум локальным задачам. Это обстоятельство позволило получить необходимые оценки для решения задачи.

Итак, в области  $(0,1)$  рассмотрим задачу

$$Lu = \frac{d}{dx} \left[ k(x) \frac{du}{dx} \right] - q(x)u = -f(x), 0 < x < 1, \quad (1)$$

$$k \frac{du}{dx} \Big|_{x=0} = \int_0^{\alpha} u(x) dx, u(1) = 0, \quad (2)$$

где  $k(x) \geq c, > 0$ ,  $q(x) \geq 0, \alpha$  - некоторое число из интервала  $(0,1)$ .

Так как при решении нестационарных задач важным будет умение решать нелокальные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений на каждом временном слое (так будет, например, при решении задач методом Рунге или разностным методом), то в этой главе подробно излагается методика решения нелокальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Имеет место

Теорема 1. Пусть  $k(x) \in C^1[0,1]$ ,  $q(x), f(x) \in C[0,1]$ ,  $k(x) \geq c_1 > 0$ ,  $q(x) \geq c_2 > 0$  всюду на  $[0,1]$ . Тогда для решения дифференциальной задачи (1)-(2) справедлива оценка

$$\|u\|_{W_2^2[0,1]} \leq M \|f\|_0$$

Дифференциальной задаче (1)-(2) поставим в соответствие разностную задачу

$$\begin{cases} L_h y = (\alpha y_x)_x - dy = -\varphi, \\ \alpha_1 y_{x,0} = \beta_1 y_0 + \sum_{i=0}^m y_i h_i - \mu_1, \\ y_N = 0, \end{cases}$$

где  $\beta_1 = 0.5 h q_0$ ,  $\mu_1 = 0.5 h f_0$ ,  $\alpha_1 = k_{i-1/2}$ ,  $k_i = k(x_i)$ ,  $d_i = q(x_i)$ ,  $\varphi_i = f(x_i)$ ,

$$h_i = \begin{cases} h/2, & i=0, \quad i=N \\ h, & i \neq 0, N \end{cases},$$

$$(\alpha y_x)_{x,i} = \frac{1}{h} \left[ \alpha_{i+1} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \alpha_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right].$$

Методом энергетических неравенств получена априорная оценка для сформулированной разностной задачи

$$\|y\|_{W_2^1}^2 \leq M (\|\varphi\|_0^2 + |\mu_1|^2), \quad (3)$$

$$\|y\|_{w_2}^2 = \|y\|_0^2 + \|y_x\|_0^2, \quad \|y\|_0^2 = \sum_{i=1}^{N-1} y_i^2 h_i, \quad \|y\|_0^2 = \sum_{i=1}^N y_i^2 h_i, \quad h=1/N.$$

Теорема 2. Разностная схема в классе гладких коэффициентов  $k(x) \in C^3 [0,1]$ ,  $q(x), f(x) \in C^2 [0,1]$ , имеет второй порядок точности

$$\|y-u\|_C \leq Mh^2,$$

где  $M > 0$  не зависит от  $h$ .

Здесь же, в этой главе, результаты полученные для задачи (1)-(2) перенесены на нелокальные задачи для обших уравнений вида

$$Lu = \frac{d}{dx} \left[ k(x) \frac{du}{dx} \right] + r(x) \frac{du}{dx} - q(x)u = -f(x),$$

где  $k(x) \geq c_1 > 0$ ,  $|r(x)| \leq c_2$ ,  $q(x) \geq 0$ .

Главное в этой главе то, что удалось получить оценки значений выражений  $k(x) \frac{du}{dx}$  (или  $\alpha_1 y_x - \beta_1 y$  в разностной трактовке) в одной точке  $x=0$  через  $L_2$  норму правой части  $f$  (или  $\phi$ ).

В главе II исследуется нелокальная задача для параболических уравнений. В области  $Q = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$  для уравнения параболического типа

$$Lu = a(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} + c(x,t)u - \frac{\partial u}{\partial t} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q. \quad (4)$$

рассмотрим нелокальную задачу

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 < x < l,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \int_0^\alpha u(x,t) dx + \mu_1(t), \quad 0 < \alpha < l, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

При определенных условиях гладкости коэффициентов уравнения (4) методом теории потенциалов задача (0.11)-(0.12) сведена к сис-

теме сингулярных интегральных уравнений Вольтерра, относительно неизвестных плотностей. Для решения задачи (4)-(5) методом энергетических неравенств получена априорная оценка:

$$\|u\|_{0+M_0(\varepsilon)}^2 \|u_x\|_{2, Q_t}^2 \leq M(\varepsilon) \left\{ F \|f\|_{2, Q_t}^2 + \|u(x, 0)\|_0^2 + \int_0^t (|\mu_2|^2 + |\mu_1|^2) d\tau \right\},$$

откуда следует единственность решения задачи.

В п. 2.4 дано обоснование метода Рунге для решения задачи.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - q(x, t)u + f(x, t),$$

$$ku_x \Big|_{x=0} = \int_0^{\alpha} u(x, t) dx + \mu_1(t), \quad (7)$$

$$-ku_x \Big|_{x=1} = \bar{\mu}_2(t),$$

$$u(x, 0) = u_0(x),$$

$$k(x, t) \geq c_1 > 0, \quad |q(x, t)| \leq c_2, \quad c_1, c_2 > 0 - \text{постоянные.}$$

Заменяем оператор  $\frac{\partial}{\partial t}$  конечно-разностным аналогом, получим задачу

$$y_t = 0.5L(\bar{t})(\hat{y} + y) + \bar{f}$$

$$0.5k(0, \bar{t})(\hat{y} + y)_{x,0} = 0.5 \int_0^{\alpha} (\hat{y} + y) dx + \bar{\mu}_1, \quad (8)$$

$$-0.5k(1, \bar{t})(\hat{y} + y)_{x,1} = \bar{\mu}_2,$$

$$y(x, 0) = y_0(x),$$

$$\text{где } L(\bar{t})y = \frac{\partial}{\partial x} \left[ k(x, \bar{t}) \frac{\partial y}{\partial x} \right] - qy, \quad \hat{y} = y^{j+1}, \quad y = y^j, \quad \bar{t} = \bar{t}^{j+1/2}, \quad \bar{\mu}_1 = \mu_1^{j+1/2}.$$

$$\bar{\mu}_2 = \mu_2^{j+1/2}, \quad k(x, \bar{t}) = k(x, t_{j+1/2}).$$

Для решения задачи (8) получена оценка

$$\|\hat{y}\|_0^2 + M_0(\varepsilon) \sum_{j'=0}^j \|y_x^{j'}\|_0^2 \leq M(\varepsilon) \left\{ \sum_{j'=0}^j \tau \left[ \mu_1^2 + \mu_2^2 + \|f\|_0^2 \right] + \|y^0\|_0^2 \right\}, \quad (9)$$

где  $Y = \hat{y} + y$ .

Из этой оценки следует непрерывная зависимость решения задачи (8) от правой части и начальных данных. Из этой же оценки следует сходимость метода Рунге со скоростью  $O(\tau^2)$ , где  $\tau$  - шаг сетки по времени.

В п.2.5 для параболического уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ k \frac{\partial u}{\partial x} \right] - qu + f,$$

с нелокальными условиями

$$k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \int_0^1 u dx + \mu_1,$$

$$k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = \mu_2, \quad u(x, 0) = u_0(x)$$

построена разностная схема второго порядка аппроксимации

$$y_t = 0.5 \bar{\Delta} (\hat{y} + y) + \Phi, \quad y(x, 0) = u_0(x),$$

$$\bar{\Delta} y = \begin{cases} \Delta y = (\gamma y_x)_x - dy, & x \in \bar{\omega}_h, \\ \Delta y = \frac{\alpha_1 y_x|_1 - h_0 d_0 y_0}{h_0} - \frac{1}{h_0} \sum_{i=0}^m y_i h_i, & x=0, \\ \Delta y = \frac{\alpha_N y_x|_N + h_N d_N y_N}{h_N}, & x=1, \end{cases}$$

$$\Phi = \begin{cases} \varphi, & x \in \bar{\omega}_h, \\ -\frac{\mu_1}{h_0} + \varphi_0, & x=0, \\ \frac{\mu_2}{h_N} + \varphi_N, & x=1, \end{cases}$$

$$\bar{\mu}_1 = \mu_1(\bar{\tau}) = \mu(t_{j+1/2}), \bar{\mu}_2 = \mu_2(\bar{\tau}).$$

Для решения разностной задачи (0.13) на слое получена априорная оценка

$$\|y^{j+1}\|_0^2 + M_0(\varepsilon) \sum_{j'=0}^j \|y_{\bar{x}}^{j'+1} + y_{\bar{x}}^{j'2}\|_0^2 \tau \leq M(\varepsilon) \left[ \sum_{j'=0}^j \|\varphi\|_0^2 \tau + \sum_{j'=0}^j (\bar{\mu}_1^2 + \bar{\mu}_2^2) \tau + \|y^0\|_0^2 \right].$$

Откуда следует устойчивость схемы по правой части и начальным данным по норме близкой к норме  $W_2^1$ . Для погрешности  $z = y - u$  справедлива та же априорная оценка, откуда следует сходимость разностной схемы со скоростью  $O(h^2 + \tau^2)$ .

В заключении главы II исследуется нелокальная задача на полуоси, когда на бесконечности ставится естественное условие регулярности. Решение подобной задачи осложняется невозможностью введения сетки на полуоси  $x > 0$ . В связи с этим с помощью вспомогательной задачи задача на полуоси сводится к задаче на конечном отрезке, но с нелокальным по времени условием

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ a^2 u_x(0, t) &= \beta_1 u - \mu_1(t), \\ -a^2 u_x(l, t) &= D_{0t}^{1/2} u + \mu(t), \\ u(x, 0) &= u_0(x), \end{aligned} \tag{10}$$

где  $D_{0t}^{1/2} u = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{u(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau$  — оператор дробного дифференцирования порядка  $1/2$ . Предполагая, что существует достаточно гладкое

решение для указанной задачи, построен ее дискретный аналог:

$$y_t = \Lambda(\bar{t}) y^{(\sigma)} + \varphi, y^{(\sigma)} = \sigma \hat{y} + (1-\sigma)y, \hat{y} = y^{j+1}, y = y^j,$$

$$\alpha_1(\bar{t})(\sigma \hat{y}_{\bar{x},1} + (1-\sigma)y_{\bar{x},1}) = \beta_1(\bar{t})(\sigma \hat{y}_0 + (1-\sigma)y_0) + 0.5hy_{t,0} + \bar{\mu}_1,$$

$$-\left[ \alpha_N(\bar{t})(\sigma \hat{y}_{\bar{x},N} + (1-\sigma)y_{\bar{x},N}) - \beta_2(\bar{t}) \left[ \sum_{s=1}^j (t_{j-s+1}^{1/2} - t_{j-s}^{1/2}) y_{\bar{t},s} \right]^{(\sigma)} \right] =$$

$$= 0.5hy_{t,N} - \bar{\mu}_2, \quad (11)$$

$$y(x,0) = u_0(x),$$

$$\bar{\mu}_1 = \mu_1(t) + 0.5hf(0, \bar{t}), \quad \bar{\mu}_2 = \mu_2(t) + 0.5hf(l, \bar{t}), \quad \bar{t} = t_{j+1/2}.$$

$$\Lambda(\bar{t})y = (\alpha(x, \bar{t})y_{\bar{x}})_{\bar{x},1} = (\alpha y_{\bar{x}})_{\bar{x},1}, \quad \sigma \text{ - произвольный параметр.}$$

В третьей главе для уравнения (4) рассматривается нелокальная задача

$$u(x,0) = u_0(x), 0 < x < l,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\mu_1(t), 0 \leq t \leq T, \quad (12)$$

$$u(l,t) = -\frac{1}{p(\bar{t})} \int_0^l u(x,t) dx + \mu(t), 0 \leq t \leq T.$$

Задача с условиями типа (12) возникает при математическом моделировании технологического процесса внешнего гетерирования, применяющегося при очистке кремниевых плат от примеси, а также в теории солепереноса в почвогрунтах при интенсивном испарении.

В случае, когда  $a(x,t) = k(t)$ ,  $b=c=f=0$ , то есть для уравнения

$$u_t = k(t)u_{xx}$$

нелокальная задача (10) эквивалентна задаче с осредненной те-

плоскостью:

$$u_x(0, t) = 0,$$

$$(p(t)u(1, t))_t + k(t)u_x(1, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = u_0(x).$$

Существование решения задачи (10) для уравнения (4) доказывается методом потенциалов, то есть решение ищется в виде суммы потенциалов простого и двойного слоев с неизвестными плотностями. Относительно неизвестных плотностей получаем систему сингулярных интегральных уравнений Вольтерра, которая безусловно разрешима.

Единственность доказывается методом априорных оценок.

Для нелокальной задачи

$$u_t = (k(x, t)u_x)_x + f,$$

$$u_x(0, t) = 0,$$

$$u(1, t) = -\frac{1}{p} \int_0^1 u(x, t) dx + \mu(t), p = \text{const} > 0,$$

$$u(x, 0) = u_0(x).$$

построена разностная схема

$$y_t - 0.5\lambda(\hat{y} + y) = -\varphi,$$

$$(\hat{y} + y)_{x, 0} = 0,$$

$$y_N = -\frac{1}{p} \sum_{i=1}^N y_i h + \bar{\mu}, \quad (13)$$

$$y(x, 0) = u_0(x).$$

Для решения разностной задачи (11) справедлива оценка

$$|y_x^{j+1}|_0^2 + M_0(\varepsilon) \sum_{j'=0}^j \tau |y_x^{j'+1} + y_x^{j'2}|_0^2 \leq M(\varepsilon) \left[ \sum_{j'=0}^j \tau (|\varphi|_0^2 + \mu_t^2) + |y_0|_0^2 \right].$$

Откуда следует устойчивость схемы по правой части и начальным

данным в соответствующей норме.

Основные результаты диссертационной работы могут быть сформулированы следующим образом:

1. Доказаны теоремы существования и единственности нелокальных задач типа (0.2) и (0.4) для некоторых классов обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных.

2. Для рассматриваемых нелокальных краевых задач получены априорные оценки в нормах  $C$ ,  $W_2^1$ ,  $W_2^2$ .

3. Построены разностные схемы второго порядка аппроксимации, получены априорные оценки для решения разностных задач, откуда следует сходимость решения соответствующих разностных схем в сеточных нормах  $C$ ,  $W_2^1$ .

4. Для уравнения теплопроводности изучена (нелокальная по времени) задача с дробной производной в граничных условиях.

5. На основе построенных разностных схем, предложен алгоритм, программы для решения задачи влагопереноса. Проведены численные эксперименты.

Основные положения диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Шханукова М.М. Нелокальные задачи для параболических уравнений общего вида. // Асимптотическое интегрирование нелинейных уравнений, Киев: Инс-т математики АН Украины, 1992, -с.128-131.

2. Шханукова М.М., Шхануков М.Х. О сходимости разностных схем для параболических уравнений с нелокальным условием. // Дифференциальные уравнения и их приложения, Ош: Ин-т математики Академии наук Кыргызской республики, 1993, -с.117.

3. Шханукова М.М. О некоторых нелокальных задачах для параболичес-

ких уравнений с переменными коэффициентами. // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения, Киев: Инс-т математики АН Украины, 1992, -с.145-147.

4. Шханукова М.М. Решение нелокальных задач для уравнений влагопереноса методом Рунге. // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения, Киев: Инс-т математики АН Украины, 1992, -с.145-147.

5. А.А.Березовский, М.М.Шханукова, М.Х.Шхануков. О сходимости разностных схем для одной краевой задачи на полуоси. // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения, Киев: Инс-т математики АН Украины, (в печати).

ЛНБ ім. В. Стефаника  
АН України

В печать — 22.02.94 г.  
формат 60x84 1/16

Тираж — 100 экз. Заказ № 1392

---

Ротапринт КБГУ

AB 29.604

**AB 29.604**

1. ...  
2. ...  
3. ...

... 19:50.23 ...

...