ДОНЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ЩЕПИН Николай Николаевич

ПОСТРОЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГИХ УДЛИНЕННЫХ ТЕЛ НА ОСНОВЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО МЕТОДА

01.02.04 - механика деформируемого твердого тела

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Донецк - 1994

Работа выполнена в Институте прикладной математики и механики Академии Наук Украины.

Научный руководитель - доктор физико-математических наук, профессор

А.А.Илюхин

Официальные оппоненты - доктор физико-математических наук, профессор

Я.Ф.Каюк

доктор физико-математических наук, профессор

В.А.Шалдырван

Ведущая организация - Киевский государственный университет.

Защита состоится "12" 05 1994 г. в 15 ч. на заседании специализированного совета К 068.06.03 в Донецком государственном университете по адресу: 340055, Донецк-55, ул. Университетская, 24, ДонГУ, гл. корпус

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Донецкого государственного университета.

Автореферат разослан "8" 04 1994 г.

Ученый секретарь
специализированного совета Мысовский Ю.В.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Теория удлиненных упругих тел (которая включает в себя и теорию упругих стержней) занимает особое место в математической теории упругости. В различных подходах к ее построению зачастую лежат многочисленные и часто трудно сопоставимые предположения геометрического или силового характера.

К числу удлиненных тел относят колонны, арки, пролеты мостов В рамках стержневой модели описываются деформации широкого класса элементов современных конструкций, многие из которых изготовлены из композиционных, анизотропных материалов с более высокими прочностными и деформационными свойствами. Примерами стержней , которые можно рассматривать как анизотропные, могут служить витые канаты, пружины, деревянные стойки в шахтах, упругие корпуса ракет, стволы танков, которые по своим свойствам существенно анизотропны.Поэтому анализ деформирования таких тел является задачей актуальной. Хотя исследования для анизотропных стержней в этом направлении достаточно многочисленны, тем не менее создание эффективных методов анализа деформаций удлиненных тел и получение информации о их поведении представляет научный и практический интерес.

Из реально существующих анизотропных тел следует отметить композиты, монокристаллы, стеклопластики. Численное значение упругих постоянных анизотропных материалов можно найти в обзорной статье К.С.Александрова и Т.В.Рыжовой, в которой приведены упругие постоянные более двухсот веществ, дан большой список литературы и указаны различные методы определения упругих постоянных. В справочнике Е.К.Ашкенази и Э.В.Ганова приведены численные значения упругих констант древесины для двенадцати пород дерева. Анизотропия механических свойств металлов достаточно подробно изложена в монографии Н.Г.Микляева и Я.Б.Фридмана.

Первые результаты в трехмерной теории удлиненных упругих тел были получены Лагранжем при определении наивыгоднейшего очертания колонны, а также в известных трудах Г.Кирхгофа, А.Клебша и А.Лява. С точки зрения одномерной модели Г.Кирхгоф получил основные дифференциальные уравнения изгиба и кручения тонких стержней . Система этих уравнений оказалась незамкнутой (шесть дифференциальных уравнений, девять неизвестных величин), хотя

Г.Кирхгоф и записал недостающие три конечных соотношения , но он не дал им достаточно строгого вывода. А.Клебш распространил положения Г.Кирхгофа, связанные с геометрией оси стержня, на криволинейные стержни. В рамках трехмерной теории упругости А.Ляв исследовал соотношения для компонент тензора деформаций и с геометрических позиций дал оценку отдельных слагаемых в этих соотношениях. Здесь же А.Ляв указал на те предположения, при которых из его формул получаются формулы Г.Кирхгофа для компонент тензора деформаций. Для однородных стержней с анизотропией общего вида А.А.Илюхин, используя в качестве основного предположения справедливость формул Г.Кирхгофа, установил, что зависимость компонент тензора напряжений от дуговой координаты и координат в плоскости поперечного сечения можно разделить. Это позволило ему установить связь между основными переменными, входящими в уравнения Г.Кирхгофа, а также совершить редукцию от трехмерных уравнений упругих стержней к одномерной модели.

Важное место занимают исследования Г.Ю.Джанилидзе, А.И.Лурье, П.М.Риза, С.А.Тумаркина, Ю.Д.Панова, Ю.С.Воробьева, Б.Ф.Шорра о деформации винтов самолета и лопаток турбин, в которых с позиций малых перемещений рассмотрен вопрос о деформации естественно-закрученных упругих стержней.

При построении математических моделей удлиненных тел используются разные подходы. Одним из наиболее распространенных методов исследования напряженно-деформированного состояния стержня является метод разложения в ряд по степеням малого параметра, который можно естественным образом ввести в уравнения трехмерной задачи для удлиненных тел.

Идея использования малого параметра в разной форме давно присутствовала в исследованиях по теории упругих стержней. Во многих работах малый параметр характеризует отклонения геометрии тела от некоторой канонической формы. Так в работах А.И.Лурье, Г.Ю.Джанелидзе, Н.П.Заметалиной, В.К.Прокопова первоначальное кручение оси стержня выступает в качестве малого параметра. А в работах Г.М.Хатиашвили, А.К.Рухадзе методом малого параметра, характеризующего первоначальную кривизну, решена задача Сен-Венана для тел, близких к цилиндрическим, и рассмотрена деформация призматических тел со слабо изогнутой осью.

В работах В.В.Понятовского и В.В.Елисеева, исходя из уравнений линейной теории упругости методом асимптотического разложения по степеням малого параметра-относительной толщине стержня, строятся реккурентные системы уравнений для последовательного определения приближений решения задачи об изгибе изотропного стержня.

Асимптотический метод в сочетании с вариационным использовал Бердичевский В.Л. для построения теории анизотропных стержней

С исследованиями в этом направлении связаны имена зарубежных ученых Г.А.Нариболи и А.Риголо, К.И.Борса, И.Эсцеди. Ими рассмотрена задача линейной теории упругости о деформации изотропного и анизотропного цилиндра с односвязным сечением, нагруженного распределенной нагрузкой по боковой поверхности и заданными на торцах усилиями, крутящим и изгибающими моментами. Решение представлено рядом по малому параметру, являющемуся отношением диаметра поперечного сечения к длине цилиндра, и задача сведена к двумерной.

Для одномерных моделей упругих стержней асимптотический метод использовался в работах Я.Ф.Каюка, П.Е.Товстика, Г.Г.Гордеева, А.А.Илюхина.

Хотя исследования в данном направлении достаточно многочисленны, тем не менее создание эффективных методов анализа деформации удлиненных тел и получение информации о их поведении представляет научный и практический интерес.

Цель работы заключалась в построении асимптотической теории анизотропных упругих удлиненных тел, деформированных концевыми силами и моментами, реализация которого включает следующие этапы:

I. Постановку граничной задачи трехмерной теории упругости о деформации упругого тела, два характерных размера которого меньше третьего. Введение малого параметра и построение рекурентных систем дифференциальных уравнений, описывающих коэффициенты рядов разложения по малому параметру тензоров деформации, напряжения и вектора перемещения.

2. Построение решения, полученных двумерных граничных задач в плоскости поперечного сечения тела в нулевом и первом приближении.

3. Формулировка эквивалентной вариационной трехмерной задачи теории упругости для вывода уравнений одномерной теории нулевого и первого приближений.

4. Создание численных алгоритмов расчета напряженно-деформированного состояния анизотропного тела произвольного поперечного сечения, исходя из полученных аналитических зависимостей.

5. Анализ результатов и выявление основных закономерностей.

Методы исследования. Основным инструментом исследований, проведенных в первой главе, является применение асимптотического метода к граничным задачам для уравнений в частных производных, описывающих напряженное состояние трехмерного анизотропного тела. Построение решения двумерной граничной задачи в случае эллиптического поперечного сечения тела проведено с помощью точного решения граничной задачи в виде рядов Фурье, при доказательстве существования и единственности были использованы результаты для систем бесконечных линейных уравнений. При построении одномерной модели использован метод поиска стационарного значения функционала при наличии ограничений, что позволило получить в явном виде коэффициенты связи между интегральными силовыми характеристиками в плоскости поперечного сечения тела и геометрическими величинами, характеризующими деформацию оси тела, а кроме того обосновать соотношения, которые раньше принимались как гипотезы. В силу громоздкости преобразований при выводе соотношений одномерной теории первого приближения была использована система аналитических вычислений *REDUCE*. Численный анализ напряженно-деформированного состояния выполнен с помощью метода конечных элементов, позволяющий аппроксимировать сложные области с необходимой точностью, а кроме того обеспечивающий вычислительные преимущества.

Научная новизна. В работе построена асимптотическая теория деформирования анизотропных упругих тел под действием концевых сил и моментов. Проведен анализ соотношений нулевого и первого приближений и вывод условий их разрешимости. В случае эллиптического поперечного сечения построено решение задачи первого приближения. Из вариационной формулировки Ху-Вашицу получены одномерные соотношения теории деформирования удлиненных тел. Исходя из полученных соотношений построен численный алгоритм по исследованию напряженно-дефомированного состояния.

Достоверность полученных в работе результатов определена:
- строгостью математической постановки задачи и методов ее решения;
- проверкой полученных результатов по данным, полученным ранее другими авторами;
- непротиворечие полученных результатов физическому смыслу решаемых задач.

На защиту выносится:
- построение реккурентных соотношений для коэффициентов разложения компонент тензоров напряжений, деформаций и вектора перемещения анизотропного удлиненного тела в ряд по малому параметру;
- анализ соотношений нулевого и первого приближений и вывод условий их разрешимости;
- построение аналитического и численного решения уравнений нулевого и первого приближений в случае эллиптического поперечного сечения;
- вывод уравнений одномерной теории деформирования удлиненных тел, на основе вариационных принципов;
- создание алгоритмов и програмы численного исследования напряженно-деформированного состояния удлиненного тела.

Практическая ценность работы. На основе полученных результатов возможно выполнение расчетов на прочность конструкций, содержащих удлиненные тела при их деформировании концевыми силами и моментами, которые изготовленны из анизотропных материалов.

Результаты работы могут быть использованы в научных институтах, занимающихся расчетами на прочность конструкций из анизотропных материалов, а также в институтах горной промышленности.

Апробация работы. Материалы диссертации докладывались на научных семинарах отделов прикладной и технической механики Института прикладной математики и механики АН Украины под руководством чл.-корр. АН Украины П.В.Харламова и профессора А.А.Илюхина (Донецк, 1989-1994), кафедры теории упругости и вычислительной математики Донецкого государственного университета под руководством академика АН Украины А.С.Космодамианского (Донецк,1994 г.), на конференции молодых ученых Института механики АН Украины (Киев, 1992 г.), на международной конференции по задачам со свободной границей (Новосибирск, 1991 г.).

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 4 работы [1-4].

Размер и структура работы. Диссертационая работа изложена на 125 страницах машинописного текста, состоит из введения, четырех глав, результатов, списка литературы (88 наименований), 30 рисунков.

Содержание работы

Введение представляет собой краткий обзор исследований по построению асимптотических соотношений трехмерных теорий удлиненных тел, относящихся к теме диссертации. Обоснована актуальность темы, дается краткое описание содержания диссертации, сформулированы основные результаты, выносимые автором на защиту.

В первой главе диссертации рассматривается тело, размеры которого в двух измерениях малы по сравнению с третьим. Тело деформировано нагрузками, распределенными по боковой поверхности и по торцам.

В качестве основных осей выбраны оси, связанные с геометрией тела в недеформированном состоянии. Эти оси обычно называют главными осями изгиба и кручения. Соотношения запишем в проекциях на эти оси.

Для радиуса-вектора точки стержня примем следующее представление

$$R(s,x_2,x_3) = r(s) + x_2 Э_2 + x_3 Э_3 \qquad (1)$$

где r-радиус вектор точки на криволинейной оси,связанной с телом, $Э_2$,$Э_3$- орты осей изгиба и кручения.

Исходя из представления радиуса-вектора, выпишем выражение для оператора Гамильтона в главных осях изгиба и кручения

$$\nabla = \frac{Э_1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial}{\partial s} + x_3 \omega_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \omega_1 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) + Э_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + Э_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \sum_{k=1}^{3} Э_k \nabla_k \qquad (2)$$

где ω_i -компоненты вектора Дарбу в главных осях изгиба и кручения

Воспользовавшись представлением для оператора Гамильтона, запишем уравнения равновесия при отсутствии массовых сил, компоненты тензора деформации и граничные условия на боковой поверхности

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial s} + x_3 \omega_1 \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_2} - x_2 \omega_1 \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_3} + 2(\omega_2 \sigma_{13} - \omega_3 \sigma_{12}) \right] = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial s} + x_3 \omega_1 \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} - x_2 \omega_1 \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_3} + \omega_2 \sigma_{23} - \omega_1 \sigma_{13} + \omega_3 (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \right] = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial s} + x_3 \omega_1 \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_2} - x_2 \omega_1 \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + \omega_1 \sigma_{12} - \omega_3 \sigma_{23} + \omega_2 (\sigma_{33} - \sigma_{11}) \right] = 0$$

$$\sigma_{i1} \omega_1 (n_2 x_3 - n_3 x_2) + \sqrt{g} \, (\sigma_{i2} n_2 + \sigma_{i3} n_3) =$$

$$= f_i\sqrt{g + \omega_1^2(n_2 x_3 - n_3 x_2)} \qquad i=1,2,3 \tag{4}$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial u_1}{\partial s} + x_3\omega_1\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - x_2\omega_1\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + u_3\omega_2 - u_2\omega_3\right),$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial u_2}{\partial s} + x_3\omega_1\frac{\partial u_2}{\partial x_2} - x_2\omega_1\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + u_3\omega_2 - u_2\omega_3\right)\right], \tag{5}$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial u_3}{\partial s} + x_3\omega_1\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - x_2\omega_1\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + u_2\omega_1 - u_1\omega_2\right)\right].$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right), \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

Условия совместности деформаций в инвариантной форме имеют вид

$$Ink(\hat{\varepsilon}) = rot(rot\hat{\varepsilon}) = \nabla \times (\nabla \times \hat{\varepsilon}) = 0 \tag{6}$$

Относительно свойств материала предположим, что тело является однородным, криволинейно-анизотропным и следует обобщенному закону Гука.

$$\varepsilon_{11} = a_{11}\sigma_{11} + a_{12}\sigma_{22} + a_{13}\sigma_{33} + a_{14}\sigma_{23} + a_{15}\sigma_{13} + a_{16}\sigma_{12} \tag{7}$$

....

Диаметр поперечного сечения считаем малым по сравнению с длиной, что позволило ввести малый параметр λ, равный отношению этих величин. Введем безразмерные величины

$$s = ls', \quad x_2 = hx_2', \quad x_3 = hx_3', \quad u_i = hu_i', \quad \omega_i = l\omega_i' . \tag{8}$$

Решение уравнений теории упругости описывается в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра.
Для определения порядка величин σ_{ij} было установлено соотно-

шение между порядками торцевых сил и моментов с величинами поверхностных сил и моментов. Исходя из общего соотношения между торцевой и боковой нагрузками

$$\lambda^{m}\left|F^{T}\right|\sim\left|F^{B}\right| \qquad (9)$$

где m-порядок соотношения сил, действующих на тело, и рассматривая условия равновесия элемента тела, заключенного между одним из торцов и произвольным поперечным сечением приходим к выводу, что разложение для компонент σ_{ij} должно начинаться со степени $\alpha=min(0,m)$.

Принимая, аналогично работам А.А.Илюхина и Б.П.Иванова, что порядок m величин концевой силы равен минус двум, получим следующие представления в виде рядов для тензоров напряжения деформации

$$\hat{\sigma}=\sum_{k=-2}^{\infty}\lambda^{k}\sigma_{ij}^{(k+2)}Э_{i}Э_{j}\ ,\quad \hat{\varepsilon}=\sum_{k=-2}^{\infty}\lambda^{k}\varepsilon_{ij}^{(k+2)}Э_{i}Э_{j} \qquad (10)$$

В работах В.В.Елисеева и В.В.Понятовского показано, что разложение вектора перемещения u необходимо начинать со степени -4

$$u=\sum_{k=-4}^{\infty}\lambda^{k}u^{(k)}(s,x_{2},x_{3}) \qquad (11)$$

Используя эти соотношения, получаем реккурентную последовательность соотношений для определения величин $\sigma_{ij}^{(k)}$

$$\nabla_{2}\sigma_{12}^{(k)}+\nabla_{3}\sigma_{13}^{(k)}=-(\tilde{\nabla}_{1}\sigma_{11}^{(k-1)}+2(\omega_{2}\sigma_{13}^{(k-1)}-\omega_{3}\sigma_{12}^{(k-1)})+(\omega_{2}x_{3}-$$
$$-\omega_{3}x_{2})(\nabla_{2}\sigma_{12}^{(k-1)}+\nabla_{3}\sigma_{13}^{(k-1)}))$$

$$\nabla_{2}\sigma_{22}^{(k)}+\nabla_{3}\sigma_{23}^{(k)}=-(\tilde{\nabla}_{1}\sigma_{12}^{(k-1)}+\omega_{2}\sigma_{23}^{(k-1)}-\omega_{1}\sigma_{13}^{(k-1)}+\omega_{3}(\sigma_{11}^{(k-1)}-$$
$$-\sigma_{22}^{(k-1)})+(\omega_{2}x_{3}-\omega_{3}x_{2})(\nabla_{2}\sigma_{22}^{(k-1)}+\nabla_{3}\sigma_{23}^{(k-1)}))$$

$$\nabla_{2}\sigma_{23}^{(k)}+\nabla_{3}\sigma_{33}^{(k)}=-(\tilde{\nabla}_{1}\sigma_{13}^{(k-1)}+\omega_{1}\sigma_{12}^{(k-1)}-\omega_{3}\sigma_{23}^{(k-1)}+\omega_{2}(\sigma_{33}^{(k-1)}- \qquad (12)$$

$$-\sigma_{11}^{(k-1)})+(\omega_2 x_3-\omega_3 x_2)(\nabla_2\sigma_{23}^{(k-1)}+\nabla_3\sigma_{33}^{(k-1)}))$$

$$\sigma_{i2}^{(k)}n_2+\sigma_{i3}^{(k)}n_3=-(\sigma_{i1}^{(k-1)}\omega_1(n_2x_3-n_3x_2)+(\omega_2x_3-\omega_3x_2)(\sigma_{i2}^{(k-1)}n_2+$$

$$+\sigma_{i3}^{(k-1)}n_3) \qquad i=1..3$$

и кроме того последовательность соотношений для определения величин $\varepsilon_{ij}^{(k)}$

$$\varepsilon_{11}^{(k)}=\tilde{\nabla}_i u_1^{(k+1)}+e_{1ij}\omega_i u_j^{(k+1)}-(\omega_2x_3-\omega_3x_2)\varepsilon_{11}^{(k-1)},$$

$$\varepsilon_{12}^{(k)}=\frac{1}{2}[\nabla_2 u_1^{(k+2)}+(\omega_2x_3-\omega_3x_2)\nabla_2 u_1^{(k+1)}+\tilde{\nabla}_1 u_2^{(k+1)}+$$

$$+e_{2ij}\omega_i u_j^{(k+1)}]-(\omega_2x_3-\omega_3x_2)\varepsilon_{12}^{(k-1)},$$

$$\varepsilon_{13}^{(k)}=\frac{1}{2}[\nabla_3 u_1^{(k+2)}+(\omega_2x_3-\omega_3x_2)\nabla_3 u_1^{(k+1)}+\tilde{\nabla}_1 u_3^{(k+1)}+ \qquad (13)$$

$$+e_{3ij}\omega_i u_j^{(k+1)}]-(\omega_2x_3-\omega_3x_2)\varepsilon_{13}^{(k-1)},$$

$$\varepsilon_{22}^{(k)}=\nabla_2 u_2^{(k+2)}, \quad \varepsilon_{33}^{(k)}=\nabla_3 u_3^{(k+2)},$$

$$\varepsilon_{23}^{(k)}=\frac{1}{2}(\nabla_2 u_3^{(k+2)}+\nabla_3 u_2^{(k+2)}),$$

Во второй главе исследуется структура соотношений нулевого и первого приближений. Из реккурентной последовательности соотношений, полагая $k=-2$, получим следующие уравнения для определения коэффициентов разложения в нулевом приближении

$$\frac{\partial\sigma_{i2}^{(0)}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{i3}^{(0)}}{\partial x_3}=0, \quad \sigma_{i2}^{(0)}n_2+\sigma_{i3}^{(0)}n_3=0, \quad i=1,2,3 \qquad (14)$$

Из уравнений совместности деформаций получим еще шесть соотношений

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{33}^{(0)}}{\partial x_2^2} - 2\frac{\partial^2\varepsilon_{23}^{(0)}}{\partial x_2\partial x_3} + \frac{\partial^2\varepsilon_{22}^{(0)}}{\partial x_3^2} = 0\,,\quad \frac{\partial^2\varepsilon_{13}^{(0)}}{\partial x_2\partial x_3} - \frac{\partial^2\varepsilon_{12}^{(0)}}{\partial x_3^2} = 0\,,$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{12}^{(0)}}{\partial x_2\partial x_3} - \frac{\partial^2\varepsilon_{13}^{(0)}}{\partial x_2^2} = 0\,,\quad \frac{\partial^2\varepsilon_{11}^{(0)}}{\partial x_3^2} = 0,\quad \frac{\partial^2\varepsilon_{11}^{(0)}}{\partial x_2\partial x_3} = 0\,,\quad \frac{\partial^2\varepsilon_{11}^{(0)}}{\partial x_2^2} = 0 \qquad (15)$$

В работах А.А.Илюхина и Б.П.Иванова получено следующее выражение для компонент $\sigma_{ij}^{(0)}$

$$\sigma_{22}^{(0)}=\sigma(s)\tilde{\sigma}_{22}^{(0)}(x_2,x_3)\,,\quad \sigma_{33}^{(0)}=\sigma(s)\tilde{\sigma}_{33}^{(0)}(x_2,x_3)\,,$$

$$\sigma_{23}^{(0)}=\sigma(s)\tilde{\sigma}_{23}^{(0)}(x_2,x_3)\,,\quad \sigma_{13}^{(0)}=\sigma(s)[\tilde{\sigma}_{13}^{(0)}(x_2,x_3)-I_2x_2] \qquad (16)$$

$$\sigma_{12}^{(0)}=\sigma(s)[\tilde{\sigma}_{12}^{(0)}(x_2,x_3)+I_3x_3]$$

где функция σ имеет следующий вид

$$\sigma(s)=-\frac{1}{a_{11}}\,\frac{a_{11}\phi_4(s)-a_{15}\phi_2(s)+a_{16}\phi_3(s)}{b_{55}I_2+b_{55}I_3}\,,$$

Из реккурентных соотношений (15) получаем, что главные члены разложения тензора деформаций имеют вид

$$\varepsilon_{11}^{(0)}=\theta_1^{(2)}+x_3\varkappa_2-x_2\varkappa_3$$

$$\varepsilon_{12}^{(0)}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_2}+\theta_3^{(2)}-x_3\varkappa_1\right],\quad \varepsilon_{13}^{(0)}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_3}-\theta_2^{(2)}+x_2\varkappa_1\right], \qquad (17)$$

$$\varepsilon_{22}^{(0)}=\frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_2}\,,\quad \varepsilon_{33}^{(0)}=\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial x_3}\,,\quad \varepsilon_{23}^{(0)}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial x_2}\right]$$

Величины $\theta_i^{(2)}$ имеют геометрический смысл дополнительных сдвигов, а $\varkappa_i$ - приращения кривизн стержня.

Система уравнений равновесия и граничные условия должны удовлетворять интегральному соотношению, получаемому из условия разрешимости граничной задачи уравнений последующего приближения

$$\int\limits_{\Omega}(\nabla_2\sigma^{(k)}_{i2}+\nabla_3\sigma^{(k)}_{i3})d\Omega = \int\limits_{L}(n_2\sigma^{(k)}_{i2}+n_3\sigma^{(k)}_{i3})dL \qquad i=1,2,3 \qquad (18)$$

Учитывая вид правых частей уравнений и граничных условий первого приближения после ряда преобразований получим следующее соотношение:

$$\theta^{(2)}_1=0, \qquad (19)$$

которое означает геометрически, что нулевое приближение может описывать только деформацию тела с нерастяжимой осью.

При $k=-1$ из реккурентных соотношений получаем

$$\begin{aligned}
&\nabla_2\sigma^{(1)}_{12}+\nabla_3\sigma^{(1)}_{13} = -\tilde{\nabla}_1\sigma^{(0)}_{11}+2(\omega_3\sigma^{(0)}_{12}-\omega_2\sigma^{(0)}_{13}),\\
&\nabla_2\sigma^{(1)}_{22}+\nabla_3\sigma^{(1)}_{23} = -\tilde{\nabla}_1\sigma^{(0)}_{12}+\omega_3(\sigma^{(0)}_{11}-\sigma^{(0)}_{22})+\omega_2\sigma^{(0)}_{23}-\omega_1\sigma^{(0)}_{13}, \qquad (20)\\
&\nabla_2\sigma^{(1)}_{23}+\nabla_3\sigma^{(1)}_{33} = -\tilde{\nabla}_1\sigma^{(0)}_{13}+\omega_2(\sigma^{(0)}_{33}-\sigma^{(0)}_{11})+\omega_1\sigma^{(0)}_{12}-\omega_3\sigma^{(0)}_{23}
\end{aligned}$$

$$\sigma^{(1)}_{m2}n_2+\sigma^{(1)}_{m3}n_3 = -\sigma^{(1)}_{m1}\,\omega_1(n_2x_3-n_3x_2), \quad m=1..3$$

Из уравнений совместности получаем в первом приближении следующие уравнения

$$\nabla_2\nabla_2\varepsilon^{(1)}_{33} - 2\nabla_2\nabla_3\varepsilon^{(1)}_{23} + \nabla_3\nabla_3\varepsilon^{(1)}_{22} = 0$$

$$\nabla_2\nabla_3\varepsilon^{(1)}_{13} - \nabla_3\nabla_3\varepsilon^{(1)}_{12} = -[\tilde{\nabla}_1(\nabla_3\varepsilon^{(0)}_{23} - \nabla_2\varepsilon^{(0)}_{33}) + \omega_1(\nabla_3\varepsilon^{(0)}_{22} - \nabla_2\varepsilon^{(0)}_{23}) + \omega_2(2\nabla_2\varepsilon^{(0)}_{13} - \nabla_3\varepsilon^{(0)}_{12}) + \omega_3\nabla_3\varepsilon^{(0)}_{13}]$$

$$\nabla_2\nabla_3\varepsilon^{(1)}_{12} - \nabla_2\nabla_2\varepsilon^{(1)}_{13} = -[\tilde{\nabla}_1(\nabla_2\varepsilon^{(0)}_{23} - \nabla_3\varepsilon^{(0)}_{22}) + \omega_1(\nabla_3\varepsilon^{(0)}_{23} - \nabla_2\varepsilon^{(0)}_{33}) - \omega_2\nabla_2\varepsilon^{(0)}_{12} + \omega_3(\nabla_2\varepsilon^{(0)}_{13} - 2\nabla_3\varepsilon^{(0)}_{12})]$$

$$\nabla_3\nabla_3\overset{(1)}{\varepsilon}_{11} = 2\tilde{\nabla}_1\nabla_3\overset{(0)}{\varepsilon}_{13} + 2\,\omega_1(\nabla_2\overset{(0)}{\varepsilon}_{13} + \nabla_3\overset{(0)}{\varepsilon}_{12}) + \omega_2(\nabla_3\overset{(0)}{\varepsilon}_{33} -$$

$$-2\,\nabla_3\overset{(0)}{\varepsilon}_{11}) + \omega_3(\nabla_2\overset{(0)}{\varepsilon}_{33} - 2\,\nabla_3\overset{(0)}{\varepsilon}_{23}) \qquad (21)$$

$$\nabla_2\nabla_3\overset{(1)}{\varepsilon}_{11} = \tilde{\nabla}_1(\nabla_3\overset{(0)}{\varepsilon}_{12} + \nabla_2\overset{(0)}{\varepsilon}_{13}) + 2\,\omega_1(\nabla_2\overset{(0)}{\varepsilon}_{12} - \nabla_3\overset{(0)}{\varepsilon}_{13}) +$$

$$+\omega_2\nabla_2(\overset{(0)}{\varepsilon}_{33} - \overset{(0)}{\varepsilon}_{11}) + \omega_3\nabla_3(\overset{(0)}{\varepsilon}_{11} - \overset{(0)}{\varepsilon}_{22})$$

$$\nabla_2\nabla_2\overset{(1)}{\varepsilon}_{11} = 2\tilde{\nabla}_1\nabla_2\overset{(0)}{\varepsilon}_{12} - 2\,\omega_1(\nabla_3\overset{(0)}{\varepsilon}_{12} + \nabla_2\overset{(0)}{\varepsilon}_{13}) + \omega_2(2\,\nabla_2\overset{(0)}{\varepsilon}_{23} -$$

$$-\nabla_3\overset{(0)}{\varepsilon}_{22}) + \omega_3(2\,\nabla_2\overset{(0)}{\varepsilon}_{11} - \nabla_2\overset{(0)}{\varepsilon}_{22})$$

Выражения правых частей этих уравнений получаются после подстановки полученных для нулевого приближения выражений. Интегрируя три последних уравнения находим выражение для компоненты $\overset{(1)}{\varepsilon}_{11}$

$$\overset{(1)}{\varepsilon}_{11} = v_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 + \frac{1}{2} v_4 x_2^2 + v_5 x_2 x_3 + \frac{1}{2} v_6 x_3^2 +$$

$$+ v_7 v_1^0 + v_8 v_2^0 + v_9 v_3^0 + \omega_1 G\left(x_3\frac{\partial v_1^0}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial v_1^0}{\partial x_3}\right) \qquad (22)$$

Интегрируя второе и третье уравнения совместности деформаций один раз и используя связь между компонентами тензора напряжений и деформаций закона Гука получаем еще два уравнения для компонент тензора деформации.

Таким образом, получаем систему пяти уравнений и граничных условий для определения пяти величин $\overset{(1)}{\sigma}_{ij}$. В этой системе уравнений проведено разделение в зависимостях искомых функций с целью выделения величин, зависящих только от дуговой координаты. При анализе системы уравнений было получено следующее представление:

$$\sigma_{ij}^{(1)}=\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\varkappa_k\omega_l P_{ij}^{(3(l-1)+k)}+\sum_{k=1}^{3}\dot{\varkappa}_k P_{ij}^{(k+9)}+\sum_{k=2}^{3}\sum_{l=2}^{3}\theta_k^{(2)}\omega_l P_{ij}^{(2k+l-7)}+ \tag{23}$$

$$+\sum_{k=2}^{3}\dot{\theta}_k^{(2)}P_{ij}^{(k+10)} \qquad ij=22,33,23,13,12$$

Функции P_{ij} являются функциями координат в плоскости поперечного сечения стержня и определяются из системы уравнений с операторами левых частей, тождественных с операторами уравнений нулевого приближения.

Из интегрального соотношения (18), связывающего правые части уравнений и граничных условий во втором приближении, получаем следующую систему соотношений, которые означают и имеют смысл условий разрешимости граничной задачи второго приближения

$$\frac{dM_1^{(0)}}{ds}+M_3^{(0)}\omega_2-M_2^{(0)}\omega_3=0\ ,\quad \frac{dQ_1^{(1)}}{ds}+Q_3^{(1)}\omega_2-Q_2^{(1)}\omega_3=0\ , \tag{24}$$

$$\frac{dQ_2^{(1)}}{ds}+Q_1^{(1)}\omega_3-Q_3^{(1)}\omega_1=0\ ,\quad \frac{dQ_3^{(1)}}{ds}+Q_2^{(1)}\omega_1-Q_1^{(1)}\omega_2=0$$

Интересно отметить, что система этих соотношений совпадает с системой уравнений для перерезывающих и растягивающих сил, действующих в поперечном сечении тела, одномерной теории Кирхгофа и не накладывает дополнительных ограничений в отличие от необходимых условий разрешимости уравнений первого приближения.

Таким образом получено расщепление в зависимостях величин первого приближения трехмерной задачи теории упругости на функции, зависящие от координат плоскости поперечного сечения, и от дуговой координаты на оси тела. Коэффициенты первого приближения, а следовательно и добавки к силам и моментам, действующим в поперечном сечении, линейным образом зависят от величин $\varkappa_i,\theta_i^{(2)}$ и их производных по дуговой координате.

На основании полученных результатов исследовано решение задачи в напряжениях нулевого и первого приближений в случае эллиптического поперечного сечения. В нулевом приближении решение граничной задачи имеет следующий вид

$$\sigma_{22}^{(0)}=\sigma_{33}^{(0)}=\sigma_{23}^{(0)}=0,\ \sigma_{12}^{(0)}=\sigma I_3 x_3,\ \sigma_{13}^{(0)}=-\sigma I_2 x_2$$

$$\sigma_{11}^{(0)}=\frac{1}{a_{11}}(-x_2(x_3+\sigma I_2 a_{15})+x_3(x_2-\sigma I_3 a_{16})) \tag{25}$$

Решение задачи первого приближения искалось в виде рядов Фурье с неизвестными коэффициентами, зависящими от полярного радиуса точки в плоскости сечения.

$$\sigma_{ij}^{(1)}=\sum_{n=1}^{\infty}[A_{ij}^{n}(\rho)\cos n\phi + B_{ij}^{n}(\rho)\sin n\phi]+A_{ij}^{0}(\rho) \tag{26}$$

Коэффициенты A_{ij}^{n}, B_{ij}^{n} определяются из бесконечной системы дифференциальных уравнений. Решение, которой в свою очередь находилось в виде степенных рядов по ρ. Для неизвестных коэффициентов рядов получена бесконечная система линейных уравнений. Показано, что данная система является регулярной и, следовательно, к ней применимы результаты работ Канторовича Л.В., Космодаминского А.С.,Крылова В.И о существовании, единственности решения системы, а также построении его методом редукции.

В третьей главе диссертации, с помощью эквивалентной вариационной формулировки задачи построены уравнения одномерной теории, а также граничные условия на концах тела, которые в интегральном смысле удовлетворяют граничным условиям на торцах.

Исходной задаче трехмерной теории упругости поставлена в соответствие вариационная задача о поиске стационарного значения функционала Ху-Васидзу. С помощью разложения в ряд по малому параметру исходное подинтегральное выражение функционала представлено в виде ряда по малому параметру.

$$J=-\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\iint_{F}\lambda^{-4+k+m}(\sigma_{11}^{(m)}[\varepsilon_{11}^{(k)}+(x_3\omega_2-x_2\omega_3)\varepsilon_{11}^{(k-1)}]+$$
$$+2\sigma_{12}^{(m)}[\varepsilon_{12}^{(k)}+(x_3\omega_2-x_2\omega_3)\varepsilon_{12}^{(k-1)}]+$$

$$+\omega_{13}(\varepsilon_{13}^{*}+(x_3\omega_2-x_2\omega_3)\varepsilon_{13}^{**})+\varepsilon_{22}(\omega_{22}^{*}+(x_3\omega_2-x_2\omega_3)\omega_{22}^{**})+$$

$$+\varepsilon_{33}(\omega_{33}^{*}+(x_3\omega_2-x_2\omega_3)\omega_{33}^{**})+\varepsilon_{23}(\omega_{23}^{*}+(x_3\omega_2-$$

$$-x_2\omega_3)\omega_{23}^{**})]ds\,dx_2\,dx_3+h^3\iint_{s_1} T_i u_i\,dx_2\,dx_3 \qquad (27)$$

Для построения одномерной теории нулевого и первого приближений в полученном таким образом функционале удержаны соответствующие степени параметра λ.

Воспользовавшись полученными в предыдущей главе соотношениями для компонент тензоров напряжения и деформации, а также вектора перемещений после осреднения по площади поперечного сечения, получены искомые функционалы для одномерных уравнений нулевого и первого приближений.

В нулевом приближении функционал представлен в следующем компактном виде

$$J^0=\frac{1}{2}\int_0^{s^*}\Big[\frac{1}{a_{11}}(\varkappa_2^2 I_2+\varkappa_3^2 I_3)+\omega(2a_{11}\varkappa_1-a_{15}\varkappa_3-a_{16}\varkappa_2)\iint_{\Omega} x_3\tilde{\sigma}_{12}^{(0)}\,dx_2\,dx_3+$$

$$+I_2 I_3\Big]ds+h^3\iint_{s_1} T_i u_i^{(0)}\,dx_2\,dx_3 \qquad (28)$$

Из условия стационарности функционала (28) с учетом неголономных связей, возникающих при построении решения задачи нулевого приближения, методом множителей Лагранжа получена следующая система уравнений

$$\frac{dQ}{ds}+\omega\times Q=0\,,\qquad \frac{dM}{ds}+\omega\times M+Э_1\times Q=0$$

$$M_i=\sum_{k=1}^{3} D_{ik}\varkappa_k \qquad (29)$$

где через M и Q обозначены множители Лагранжа, которые как было показано по своему физическому смыслу совпадают с моментами и силами, действующими в поперечном сечении. При этом удается получить в явном виде выражение для коэффициентов связи моменты-кривизны.

В первом приближении построение явных выражений представляет значительные трудности из-за громоздкости выражений. Поэтому была составлена программа на языке аналитических вычислений *REDUCE* для построения соотношений одномерной теории первого приближения.

Функционал первого приближения является квадратичной формой по переменным x_i и $\theta_i^{(2)}$ и билинейной по остальным переменным

$$J^1(x_i, \theta_i^{(2)}, \theta_1^{(3)}, \dot{x}_i, \dot{\theta}_i^{(2)}).$$

Из условия стационарности этого функционала были получены следующие результаты. Система уравнений одномерной теории первого приближения совпадает с системой уравнений и граничных условий одномерной теории нулевого приближения, а связь между силовыми характеристиками и кривизнами носит следующий вид

$$M_i = \sum_{j=1}^{3} A_{ij} x_j + \sum_{j=2,3}^{3} B_{ij} \theta_j^{(2)} + \sum_{j=1}^{3} C_{ij} \dot{x}_j + \sum_{j=2}^{3} D_{ij} \dot{\theta}_j^{(2)} \quad (i=1,2,3)$$

$$Q_i = \sum_{j=2,3}^{3} E_{ij} x_j + \sum_{j=1}^{3} F_{ij} \dot{x}_j \quad (i=2,3) \tag{30}$$

Таким образом, в третьей главе построены уравнения и граничные условия одномерной теории . Получены в явном виде недостающие соотношения между интегральными силовыми и геометрическими характеристиками оси тела.

В четвертой главе диссертации на основании результатов второй и третьей глав построена численная процедура анализа напряженно-деформированного состояния, а также определения постоянных связи моменты-кривизны для тела с произвольным односвязным поперечным сечением. Составлена программа для определения величин σ_{ij} методом конечных элементов. Область разбива-

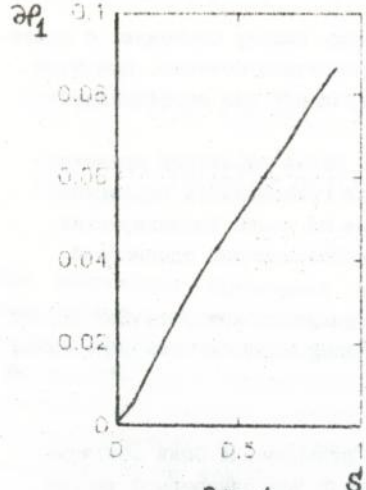

Рис. 1

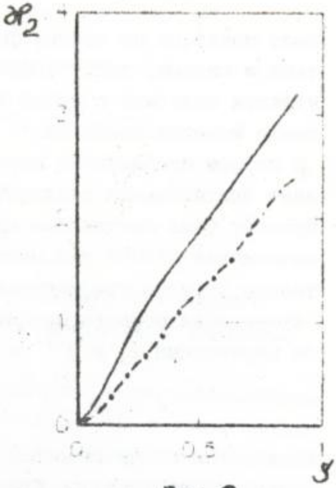

Рис. 2

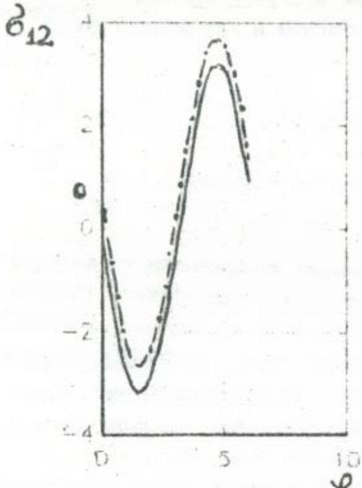

Рис. 3

ется на треугольные подобласти, для аппроксимации неизвестных функций применялись линейные базисные функции.

Численные исследования проведены в двух направлениях. Во-первых, рассматривалось влияние анизотропных свойств материала на распределение напряжений, а во-вторых учтены поправки первого приближения при вычислении величины напряжений при различных вариантах торцевого нагружения тела. Исследования проводились на примере анизотропного стеклопластика типа СТЭТ в случае эллиптического поперечного сечения, поскольку полученные во второй главе аналитические выражения позволяли контролировать достоверность получаемых результатов. Оказалось, что в отличие от изотропных материалов происходит существенное взаимовлияние изгиба и кручения тела. На рис. 1,2 показано распределение кривизн вдоль осевой линии тела, деформированного концевыми нагрузками. Сплошная линия соответствует случаю анизотропного тела, а штрих-пунктирной - изотропного (сталь).

Проведенный численный анализ показал, что в указанной постановке задачи учет членов первого приближения при анализе распределения напряжений в плоскости поперечного сечения приобретает существенное значение в окрестности осевой линии тела, а решение вблизи границы практически полностью описывается членами нулевого приближения. Так на рис. 3 показано распределение величины σ_{12} вдоль линии $\rho = 0.1$, сплошной линией изображен учет только членов нулевого порядка, а штрих-пунктирной нулевого и первого.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Построена реккурентная последовательность дифференциальных уравнений и граничных условий в задаче о деформации анизотропных тел в трехмерной постановке. Изучена структура решений нулевого и первого приближения и показано, что происходит расщепление в зависимостях величин на функции, которые зависят только от дуговой координаты оси и функции, зависящие от координат точек поперечного сечения. Указаны какие поправки необходимо внести при учете членов первого приближения. Для тел с эллиптическим поперечным сечением построено аналитически решение задач нулевого и первого приближений в плоскости поперечного сечения тела.

2. Совершена редукция к одномерной модели, которая обобщает на анизотропный случай теорию Г.Кирхгофа - А.Клебша. Показано, что она является теорией нулевого приближения в асимптотическом смысле. Построена одномерная модель упругого анизотропного тела первого приближения. Построены явные формулы для коэффициентов связи между силовыми и геометрическими характеристиками при условии, что решена граничная задача в плоскости поперечного сечения тела.

3. Проведен численный анализ напряженного состояния анизотропного удлиненного тела с эллиптическим поперечным сечением при различных вариантах торцевого нагружения. Численно исследован вопрос об учете членов первого приближения при вычислении величин напряжений.

ПУБЛИКАЦИИ

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Иванов Б.П.,Щепин Н.Н. К теории изгиба и кручения прямолинейного анизотропного стержня/Донецк. политехн. ин-т.- Донецк, 1987.-20 с. Деп. в УкрНИИТИ 05.06.87, N 2691.
2. Ivanov B.P.,Shchepin N.N. Construction of a refined theory for elastic rods. - Mechanics of rigid bodies,19.-Allerton Press, New York, p. 104-110
3. Илюхин А.А.,Щепин Н.Н. Приближенное решение трехмерной теории анизотропных стержней// Механика твердого тела. 1994. Вып. 26.
4. Ivanov B.P., Iljukhin A.A., Shchepin N.N. Deformation of elastic body with free side surface./Proceedings of the International conference "Free boundary problems in continuum mechanics", Novosibirsk, July 18-22, 1991.

Заказ N 5 тир. 100