АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

на правах рукописи

Игнатьев Александр Олегович

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

01.02.01 - "теоретическая механика"

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Донецк 1994

Работа выполнена в Институте прикладной математики и механики АН Украины

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
член-корреспондент АН Украины А.А.Мартынюк

доктор физико-математических наук А.В.Карапетян

доктор физико-математических наук,
профессор С.К.Персидский

Ведущая организация: Институт математики АН Украины

Защита состоится 11 мая 1994 г. в 15 час. на заседании специализированного совета Д 06.01.01 по присуждению ученой степени доктора физико-математических наук при Институте прикладной математики и механики АН Украины по адресу: 340114, г.Донецк-114, ул. Р.Люксембург, 74.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Института прикладной математики и механики АН Украины.

Автореферат разослан "8" апреля 1994 г.

Ученый секретарь
специализированного совета
кандидат физико-математических наук А.И.Марковский

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Основы теории устойчивости движения были заложены в конце прошлого века гениальным русским ученым А.М.Ляпуновым. В дальнейшем эта теория получила широкое применение в различных разделах математики и механики, а также физике, экономике, биологии. Этим определяется неослабевающий интерес к теории устойчивости. Развитие космонавтики, авиации, машиностроения, робототехники приводит к постоянному расширению круга теоретических и практических задач. Благодаря созданию прямого (или второго) метода Ляпунова стало возможным решение многих практически важных задач. В случае равномерной асимптотической устойчивости этот метод сводится к построению определенно-положительной допускающей бесконечно-малый высший предел функции, производная которой является функцией определенно-отрицательной. Однако нахождение такой функции, как правило, представляется весьма затруднительным. В прикладных задачах во многих случаях вспомогательная определенно-положительная функция строится из каких-то физических соображений. Но ее производная может при этом представлять не знакоопределенную, а лишь знакопостоянную функцию. Именно для таких случаев Е.А.Барбашиным и Н.Н.Красовским получен эффективный критерий устойчивости в предположении, что правые части дифференциальных уравнений возмущенного движения автономны или периодически зависят от времени. Однако, как показал В.М.Матросов, для общего случая зависимости правых частей от времени, этот критерий не является справедливым. Поэтому актуальным является нахождение наиболее широкого класса непериодических функций, для которых этот критерий остается справедливым.

В своей докторской диссертации А.М Ляпунов указал условия, при выполнении которых уравнения первого приближения решают задачу об устойчивости движения в случае, когда система уравнений возмущенного движения является автономной. Однако существуют критические случаи, когда вопрос об устойчивости движения не решается рассмотрением уравнений первого приближения. Несмотря на кажущуюся частность задач, относящихся к критическим случаям, они охватывают достаточно широкий и важный класс дифференциальных уравнений. В частности консервативные системы, для которых имеет место закон сохранения энергии, могут быть устойчивыми лишь в критических случаях. Таким образом, исследования в области теории критических случаев весьма актуальны. Большой вклад в развитие теории критических случаев внесли

Г.В.Каменков, В.Г.Веретенников, А.М.Молчанов, Л.Сальвадори, А.Я.Савченко.

Для большинства прикладных задач важно уметь решать задачу об устойчивости не только по отношению к мгновенным возмущениям, но и по отношению к возмущениям, действие которых не прекращается, что указывает на актуальность задачи об устойчивости решений при постоянно действующих возмущениях (п.д.в.).

При решении задач механики возможны ситуации, когда устойчивость по некоторым переменным может нас не интересовать. Так возникает задача устойчивости движения по отношению к части переменных. Постановка этой задачи дана А.М.Ляпуновым. В дальнейшем ее решению было посвящено большое количество работ, из которых выделим результаты В.В.Румянцева, А.С.Озиранера, С.Кордуняну, К.Пайффера, А.С.Андреева, Л.Хатвани и В.И.Воротникова.

Наряду с исследованием устойчивости положения равновесия большой интерес представляет применение прямого метода Ляпунова к исследованию устойчивости интегральных множеств. Это вызвано тем, что в приложениях часто встречаются системы, все особенности которых сосредоточены на асимптотически устойчивых интегральных множествах (примером таких систем служат диссипативные системы). Получению достаточных условий существования интегральных (инвариантных) множеств и изучению их устойчивости посвящены работы Ю.А.Митропольского и О.Б.Лыковой, А.М.Самойленко, А.А.Бурова и А.В.Карапетяна, В.Г.Веретенникова и В.В.Зайцева, Я.С.Бариса и О.Б.Лыковой, Н.Г.Булгакова, Б.С.Калитина, В.И.Зубова, Ю.В.Малышева.

<u>Цель работы</u> - распространение теоремы Барбашина-Красовского на случай почти периодических систем;

- получение критерия устойчивости в критическом случае n пар чисто мнимых корней в случае, когда уравнения первого приближения автономны, а нелинейные слагаемые зависят от времени;

- изучение устойчивости положения равновесия линейного осциллятора с переменными параметрами;

- исследование устойчивости положения равновесия относительно части переменных и при постоянно действующих возмущениях;

- применение прямого метода Ляпунова в задачах исследования устойчивости интегральных множеств.

Методы исследования. Исследования, проводимые в диссертационной работе, основаны на прямом методе Ляпунова, на методах математического анализа и аналитической механики.

Научная новизна. В работе доказано, что теорема Барбашина-Красовского применима для частного случая непериодических систем - систем почти периодических. В критическом случае n пар чисто мнимых корней указаны ограничения на правые части дифференциальных уравнений возмущенного движения, являющиеся непрерывными ограниченными функциями времени, при выполнении которых невозмущенное движение асимптотически устойчиво. Если правые части голоморфны относительно возмущений и не зависят от времени, доказана теорема о формальной устойчивости невозмущенного движения, которая в дальнейшем применена для доказательства формальной устойчивости равномерных вращений тела с жидкостью. В работе изучено влияние постоянно действующих возмущений на устойчивые движения. Доказано, что теорема В.В.Румянцева о равномерной асимптотической устойчивости движений относительно части переменных допускает обращение. Получен ряд новых результатов по теории устойчивости относительно части переменных. Получены достаточные условия асимптотической устойчивости положения равновесия линейного осциллятора с переменными коэффициентами; показано, что эти условия в известном смысле близки к необходимым и достаточным. Обосновано применение прямого метода Ляпунова к исследованию устойчивости интегральных множеств систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Теоретическая и практическая ценность. Работа имеет преимущественно теоретический характер. В ней создано новое направление теории устойчивости неавтономных систем. Показано, что второй метод Ляпунова является универсальным в задачах исследования равномерной асимптотической устойчивости интегральных множеств. Полученные в работе результаты могут быть использованы при исследовании устойчивости конкретных сложных механических систем.

Апробация работы. Основные результаты диссертации были доложены на Ш и IУ Всесоюзных четаевских конференциях по устойчивости движения, аналитической механике и управлению движением (г.Иркутск, 1977, г.Звенигород, I982), Всесоюзных конференциях по устойчивости движения, колебаниям механических систем и аэродинамике (г.Москва, I978, I988), Всесоюзной конференции

"Проблемы колебаний механических систем" (г.Киев, 1978), II Республиканской конференции молодых ученых по механике (г.Киев, 1979), Третьем и Четвертом республиканских совещаниях по проблемам динамики твердого тела (г.Донецк, 1981, 1984), Третьем республиканском симпозиуме по дифференциальным уравнениям (г. Одесса, 1982), Коллоквиуме по качественной теории дифференциальных уравнений (ВНР, г.Сегед, 1984), Всесоюзной научной конференции "Метод функций Ляпунова в современной математике" (г.Харьков, 1986), УI Всесоюзной конференции по качественной теории дифференциальных уравнений (г.Иркутск, 1986), Международной математической конференции "Математические чтения" (г.Харьков, 1992).

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 17 работах.

Структура диссертации. Работа состоит из введения, шести глав и списка литературы из 171 наименования; содержит 254 страницы машинописного текста.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении дан обзор результатов, полученных по данной тематике, и обоснована ее актуальность; приведены основные положения диссертации, выносящиеся на защиту.

В первой главе рассмотрены дифференциальные уравнения возмущенного движения вида

$$\dot{x} = X(t, x) \tag{1}$$

где x и $X(t, x)$ — n-мерные векторы; правые части $X(t, x)$ являются почти периодическими функциями времени t, определенными, непрерывными и удовлетворяющими условию Липшица по x в области

$$\|x\| < H, \quad -\infty < t < \infty \tag{2}$$

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1.1. Если уравнения возмущенного движения (1) таковы, что можно построить почти периодическую по t определенно-положительную функцию $V(t, x)$, допускающую бесконечно малый высший предел и удовлетворяющую неравенству $\dot{V} \leq 0$ в области (2) и если при этом производная $\dot{V}$ может быть равна нулю лишь в точках множества M, не содержащего целиком полутраекторий системы (1)

$$x(t, t_0, x_0) \qquad (t_0 < t < \infty) \tag{3}$$

(за исключением тривиального решения), то решение $x = 0$ асимптотически устойчиво.

Теорема I.2. Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения (I) можно найти допускающую бесконечно малый высший предел почти периодическую по t функцию $V(t, x)$ такую, что ее производная $\dot{V}$ удовлетворяет условиям:

I) $\dot{V} > 0$ вне M ;
2) $\dot{V} = 0$ на M ;

где M – множество, не содержащее целиком полутраекторий (3) системы (I), и если при этом существуют точки, лежащие в сколь угодно малой окрестности начала координат, такие, что в них $V > 0$, то невозмущенное движение неустойчиво.

Во <u>второй главе</u> рассматривается задача об устойчивости в критическом случае n пар чисто мнимых корней, когда дифференциальные уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\begin{aligned}
\dot{x}_s &= -\lambda_s y_s + X_s(t, u, x, y), \\
\dot{y}_s &= \lambda_s x_s + Y_s(t, u, x, y), \\
\dot{u}_i &= \sum_{j=1}^{m} p_{ij} u_j + Q_i(t, u, x, y) \qquad (s = 1, \dots, n;\ i = 1, \dots, m),
\end{aligned} \tag{4}$$

где $u = (u_1, \dots, u_m)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ и p_{ij} – константы, уравнение $\det(p_{ij} - \mu\delta_{ij}) = 0$ относительно μ имеет корни с отрицательными действительными частями, а X_s, Y_s, Q_i являются непрерывными ограниченными функциями времени и имеют порядок малости выше первого относительно u, x, y. В § 2.I предполагается, что

$$X_s = \sum_{|k|+|m|+|\delta|=2}^{M} A_{s1}^{(k,m,\delta)}(t) x^k y^m u^\delta + X_s^{(M+\delta)}(t, u, x, y),$$

$$Y_s = \sum_{|k|+|m|+|\delta|=2}^{M} A_{s2}^{(k,m,\delta)}(t) x^k y^m u^\delta + Y_s^{(M+\delta)}(t, u, x, y),$$

$$Q_i = \sum_{|k|+|m|+|\delta|=2}^{M} A_{i3}^{(k,m,\delta)}(t)\, x^k y^m u^\delta + Q_i^{(M+\nu)}(t,u,x,y).$$

Здесь и далее $k=(k_1,\dots,k_n)$, $m=(m_1,\dots,m_n)$, $\delta=(\delta_1,\dots,\delta_m)$ соответственно n -мерные и m -мерный наборы целых неотрицательных чисел, $|k|=k_1+\dots+k_n$, $|m|=m_1+\dots+m_n$, $|\delta|=\delta_1+\dots+\delta_m$, $x^k=x_1^{k_1}\dots x_n^{k_n}$, $y^m=y_1^{m_1}\dots y_n^{m_n}$, $u^\delta=u_1^{\delta_1}\dots u_m^{\delta_m}$; $A_{s1}^{(k,m,\delta)}(t)$, $A_{s2}^{(k,m,\delta)}(t)$, $A_{i3}^{(k,m,\delta)}(t)$ – непрерывные ограниченные функции времени; $X_s^{(M+\nu)}$, $y_s^{(M+\nu)}$, $Q_i^{(M+\nu)}$ – функции, ограниченные по времени и имеющие порядок малости относительно u, x, y больший, чем M.

Теорема 2.1. Если коэффициенты $A_{s1}^{(k,m,\delta)}(t)$, $A_{s2}^{(k,m,\delta)}(t)$, $A_{i3}^{(k,m,\delta)}(t)\ (s=1,\dots,n;\ i=1,\dots,m)$ системы дифференциальных уравнений возмущенного движения (4) таковы, что существуют положительные числа $\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}$ и исчезающие функции $\gamma^{(k,m)}(t)$ $(3\le|k|+|m|\le 2L)$ удовлетворяющие условиям

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f^{(k,k)}(\tau)\,d\tau = G_k,$$

$$\left|\int_0^t\left[G_k+\gamma^{(k,k)}(\tau)-f^{(k,k)}(\tau)\right]d\tau\right| < A,\quad (A=const),$$

$$\left|\int_0^t\left[\gamma^{(k,m)}(\tau)-f^{(k,m)}(\tau)\right]\exp\left[i\sum_{s=1}^{n}(k_s-m_s)\tau\right]d\tau\right| < A,$$

а форма $\sum_{|k|=L} G_{k_1\dots k_n}(x_1^2+y_1^2)^{k_1}\cdots(x_n^2+y_n^2)^{k_n}$ в пространстве переменных $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n$ определенно-отрицательна, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво. (Здесь $f^{(k,m)}(t)$ – известные функции коэффициентов $A_{s1}^{(k,m,\delta)}(t)$, $A_{s2}^{(k,m,\delta)}(t)$, $A_{i3}^{(k,m,\delta)}(t)$ и постоянных $\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}$, следовательно, известные функции времени).

В § 2.2 рассматривается случай $n=1$, $m=0$, т.е. система (4) двумерна и имеет вид

$$\dot{x} = -\lambda y + \sum_{k+m=2}^{M} A_1^{(k,m)}(t)\, x^k y^m + X^{(M+\nu)}(t,x,y),$$

$$\dot{y} = \lambda x + \sum_{\kappa+m=2}^{M} A_2^{(\kappa,m)}(t) x^\kappa y^m + Y^{(M+\nu)}(t,x,y). \quad (5)$$

Теорема 2.2. Если коэффициенты $A_1^{(\kappa,m)}(t)$, $A_2^{(\kappa,m)}(t)$ $(2 \le \kappa + m \le M)$ системы дифференциальных уравнений возмущенного движения (5) таковы, что выполняются условия

$$\left| \int_0^t f^{(\kappa,m)}(\tau) \exp[i\lambda(\kappa-m)\tau] \, d\tau \right| < A, \quad (A = const) \quad (6)$$

$$(\kappa+m = R, \ R = 3, \dots, 2L-1; \ \kappa+m = 2L, \ \kappa \ne m),$$

$$G = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f^{(L,L)}(\tau) d\tau, \quad (7)$$

где $f^{(\kappa,m)}(t)$ - известные функции коэффициентов $A_1^{(\kappa,m)}(t)$, $A_2^{(\kappa,m)}(t)$, то при $G < 0$ невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

Теорема 2.3. Если коэффициенты $A_1^{(\kappa,m)}(t)$, $A_2^{(\kappa,m)}(t)$ $(2 \le \kappa + m \le M)$ системы дифференциальных уравнений возмущенного движения (5) таковы, что выполняются соотношения (6),(7) и $G > 0$, то невозмущенное движение неустойчиво.

§ 2.3 посвящен изучению устойчивости тривиального решения уравнений (4) в предположении, что коэффициенты $A_{s1}^{(\kappa,m,\delta)}(t)$, $A_{s2}^{(\kappa,m,\delta)}(t)$, $A_{i3}^{(\kappa,m,\delta)}(t)$ являются константами и для любого ненулевого набора целых чисел $m_1, \dots, m_n$, удовлетворяющих условию $|m_1| + \dots + |m_n| \le 2\left[\frac{M+1}{2}\right]$, выполняется неравенство $m_1\lambda_1 + \dots + m_n\lambda_n \ne 0$. Здесь $\left[\frac{M+1}{2}\right]$ обозначает целую часть числа $\frac{1}{2}(M+1)$. В работах Л.Сальвадори, А.Я.Савченко, Я.М.Гольцера показано, что при указанных ограничениях можно построить функцию

$$V = \alpha_1 \rho_1 + \dots + \alpha_n \rho_n + \alpha_{n+1} U^{(2)}(u) + V^{(3)}(u,x,y) + \dots + V^{\left(2\left[\frac{M+1}{2}\right]\right)}(u,x,y)$$

такую, что ее полная производная в силу уравнений (4) равна

$$\dot{V} = -\alpha_{n+1}(u_1^2 + \dots + u_m^2) + \sum_{|\kappa|=L}^{\left[\frac{M+1}{2}\right]} G_\kappa \rho^\kappa + V^{\left(2\left[\frac{M+1}{2}\right]+\nu\right)}(t,u,x,y),$$

$$(L \ge 2).$$

Здесь $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n+1}$ – постоянные, $\rho_s = x_s^2 + y_s^2 \ (s=1,\cdots,n)$; $U^{(2)}(u)$ – определенно-положительная квадратичная форма переменных $u_1,\cdots,u_m$ такая, что

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial U^{(2)}}{\partial u_j}(p_{j1}u_1+\cdots+p_{jm}u_m) = -(u_1^2+\cdots+u_m^2);$$

$V^{(R)}$ – форма порядка R относительно u, x, y; $G_\kappa \rho^\kappa = G_{\kappa_1\ldots\kappa_n}\rho_1^{\kappa_1}\ldots\rho_n^{\kappa_n}$; $\dot{V}^{(2\left[\frac{M+1}{2}\right]+\nu)}$ – ограниченная по t функция, имеющая порядок малости относительно u, x, y более высокий, чем $2\left[\frac{M+1}{2}\right]$. Если существуют положительные числа $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n+1}$ такие, что форма $\sum_{|\kappa|=L} G_\kappa \rho^\kappa$ переменных x, y является определенно-отрицательной, то тривиальное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (4) асимптотически устойчиво. В § 2.3 доказывается, что асимптотическая устойчивость тривиального решения системы (4) сохраняется, если $\sum_{|\kappa|=L+\tau} G_\kappa\rho^\kappa \le 0 \ (\tau=0;1;\cdots;N-L-1)$, а форма $\sum_{|\kappa|=N} G_\kappa \rho^\kappa \ \ (N \le \left[\frac{M+1}{2}\right])$ – определенно-отрицательная на множестве Q, где $Q=\bigcap_{\tau=0}^{N-L-1} Q_\tau$. Здесь Q_τ обозначает множество точек в пространстве $x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n$ в которых справедливо равенство $\sum_{|\kappa|=L+\kappa} G_\kappa \rho^\kappa = 0$.

В § 2.4 доказывается теорема о формальной устойчивости.

Теорема 2.4. Тривиальное решение системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_s = -\lambda_s y_s + \sum_{j=2}^{\infty} X_s^{(j)}(x,y),$$

$$\dot{y}_s = \lambda_s x_s + \sum_{j=2}^{\infty} Y_s^{(j)}(x,y),$$

формальное устойчиво, если выполнены следующие условия:

а) для любого ненулевого набора целых чисел $m_1,\cdots,m_n$ справедливо неравенство $m_1\lambda_1+\cdots+m_n\lambda_n \ne 0$;

б) $$X_s^{(2N)} = \sum_{|\kappa|+|m|=2N} a_s^{(\kappa,m)} x^\kappa y^m, \quad Y_s^{(2N)} = \sum_{|\kappa|+|m|=2N} b_s^{(\kappa,m)} x^\kappa y^m,$$

$$X_s^{(2N+1)} = \sum_{s=1}^{n} C_s y_s \sum_{|\kappa|+|m|=2N} c_s^{(\kappa,m)} x^\kappa y^m,$$

$$y_s^{(2N+1)} = \sum_{s=1}^{n} \mathcal{D}_s x_s \sum_{|k|+|m|=2N} d_s^{(k,m)} x^k y^m ,$$

где $a_s^{(k,m)}$, $b_s^{(k,m)}$, $c_s^{(k,m)}$, $d_s^{(k,m)}$, C_s, $\mathcal{D}_s$ - произвольные вещественные числа, причем в константах $a_s^{(k,m)}$, $c_s^{(k,m)}$, $d_s^{(k,m)}$ числа $|k|$ и $|m|$ четные, а в постоянных $b_s^{(k,m)}$ - нечетные.

Теорема 2.4 использована для доказательства формальной устойчивости равномерных вращений тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, имеющего эллипсоидальную полость, целиком заполненную идеальной жидкостью, совершающей однородное вихревое движение.

Третья глава посвящена изучению влияния постоянно действующих возмущений (п.д.в.) на устойчивые движения. В § 3.I наряду с уравнениями (I) рассмотрена система

$$\dot{x} = X(t,x) + R(t,x)$$

где функция R характеризует п.д.в. и может, вообще говоря, не обращаться в нуль при $x=0$. Сформулирована теорема 3.I (доказанная А.Я.Савченко) об устойчивости при п.д.в. и доказана теорема 3.2 о неустойчивости при п.д.в. В частном случае, когда функции R_s вызваны наличием малого параметра, доказаны следствия из теорем 3.I и 3.2, которые дают достаточные условия устойчивости и неустойчивости при таких п.д.в. Эти условия выражают ограничения на структуру функций $R_s(t,x)$ $(s=1,\cdots,n)$.

В § 3.2 наряду с уравнениями (I) рассмотрена система

$$\dot{x} = X(t,x) + Q(t,x) + R(t,x) \qquad (8)$$

допускающая нулевое решение, причем функции $X(t,x)$ и $R(t,x)$ в области $t \in [0;\infty)$, $\|x\| < H$ удовлетворяют условиям Липшица по x.

Определение 3.I. Положим, что функция $Q(t,x)$ удовлетворяет условию (B_1), если существует такое $h>0$, что для любого $\xi \in (0;h)$ можно указать момент времени $\tau_\xi > 0$ и функцию $g_\xi(t)$, непрерывную на $[\tau_\xi;\infty)$, такую, что $|Q_s(t,x)| \le g_\xi(t)$ для всех $x \in B_h \setminus B_\xi$; $s=1,\cdots,n$;

$$t \in [\tau_\xi;\infty), \quad B_\tau = \{x \in R^n : \|x\| < \tau\} \ \text{и} \ \lim_{t\to\infty} \int_t^{t+1} g_\xi(s)\,ds = 0.$$

Теорема 3.3. Если нулевое решение дифференциальных уравнений (I) асимптотически устойчиво равномерно по t_0, x_0, функция $Q(t,x)$ удовлетворяет условию (B_1), а функция $R(t,x)$ - соотношениям

$$\lim_{t\to\infty}\int_t^{t+\tau} R_i(s,x)\,ds=0$$

равномерно по τ, x из множества $\tau\in[0;\infty)$, $\|x\|<H$, то тривиальное решение системы (8) асимптотически устойчиво равномерно по t_0, x_0.

В четвертой главе изучается устойчивость положения равновесия колебательной системы, описываемой уравнением

$$\ddot{x}+f(t)\dot{x}+g(t)x=0 \qquad (9)$$

где $f(t)$ и $g(t)$ - известные непрерывные ограниченные функции времени, причем $g(t)$ имеет ограниченную производную $\dot{g}(t)$.

Теорема 4.I. Если выполняются условия

$$g(t)>\alpha_1^2>0,\ p(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\dot{g}(t)}{g(t)}+f(t)>\alpha_2^2>0 \qquad (I0)$$

то решение

$$x=0,\ \dot{x}=0 \qquad (II)$$

асимптотически устойчиво равномерно по начальному моменту времени t_0 и начальным возмущениям $x(t_0)$, $\dot{x}(t_0)$.

Замечание 4.I. Неравенства (I0), характеризующие обобщенную положительность функций $g(t)$ и $p(t)$, являются достаточными условиями асимптотической устойчивости решения (II) уравнения (9), которые близки к необходимым и достаточным в следующем смысле. Если в условиях (I0) обобщенную положительность какой-либо из функций $g(t)$ и $p(t)$ или одновременно обеих заменить их обобщенной отрицательностью, то невозмущенное движение (II) неустойчиво.

Теорема 4.2. Решение (II) уравнения (9) неустойчиво, если существует такое $t_0>0$, что при $t>t_0$ выполняется одно из условий

$$\mathcal{D}(t)=\frac{1}{4}f^2(t)+g(t)\le 0;$$

$$\mathcal{D}(t)>0,\quad 4f(t)\mathcal{D}(t)+\frac{1}{2}\dot{f}(t)f(t)+\dot{g}(t)+$$
$$+(\dot{f}(t)+f^2(t)+4\mathcal{D}(t))\sqrt{\mathcal{D}(t)}<0.$$

Уравнения плоских малых колебаний ракеты, центр тяжести которой движется прямолинейно вертикально вверх с постоянной скоростью, имеет вид (9), где $f(t) = a\,exp(-\alpha t)$, $g(t) = \beta^2 exp(-\alpha t)$, причем a, β, α - постоянные числа, причем $\alpha > 0$. Величина x представляет собой в этом случае угол атаки. С помощью теорема 4.2 показано, что малые колебания ракеты неустойчивы по Ляпунову.

Теорема 4.3. Если в уравнении (9) функции $f(t)$ и $g(t)$ стремятся к нулю при $t \to \infty$, то положение равновесия (II) не может быть равномерно устойчивым.

<u>Пятая глава</u> посвящена исследованию устойчивости движения относительно части переменных. Рассмотрена система дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$\dot{x} = X(t,x,y), \quad \dot{y} = Y(t,x,y) \tag{12}$$

допускающая нулевое решение, где $X(t,x,y)$, $Y(t,x,y)$ непрерывны в области $J \times \Omega \times R^m$, где $J = [0; \infty)$, а Ω - область в R^n, содержащая начало координат; x, $X \in R^n$; y, $Y \in R^m$. В § 5.1-5.4 доказаны теоремы, обращающие соответствующие теоремы В.В.Румянцева о равномерной асимптотической устойчивости относительно части переменных и об асимптотической устойчивости в целом относительно части переменных. А именно: справедливы следующие теоремы.

Теорема 5.4. Пусть $H_0 \subset R^n$ - ограниченная область, лежащая со своим замыканием $\bar{H}_0$ в Ω и $0 \in H_0$. Если решение $x = 0$, $y = 0$ системы дифференциальных уравнений (12) равномерно асимптотически устойчиво относительно x и область $H_0 \times R^m$ лежит в области x-притяжения, то в области $J \times H_0 \times R^m$ существует функция $v(t,x,y)$, имеющая в силу уравнений (12) определенно-отрицательную относительно x производную dv/dt. Функция v является x-определенно-положительной, допускает бесконечно малый высший предел относительно x и имеет в этой области непрерывные и равномерно ограниченные частные производные первого порядка по всем аргументам. Если функции $X(t,x,y)$, $Y(t,x,y)$ непрерывны в области $H_1 \times R^m$ $(H_1 \supset \bar{H}_0)$ равномерно по времени $t \in J$, то функция $v(t,x,y)$ имеет частные производные любого порядка по всем переменным, причем эти производные равномерно ограничены в области $J \times H_0 \times R^m$. Если функции $X(t,x,y)$, $Y(t,x,y)$ являются периодическими функциями t либо не зависят от времени, то существует функция $v(t,x,y)$, которая наряду с другими перечисленными свойствами будет соответственно периодической функцией t или будет не зависеть явно от времени.

Теорема 5.6. Если решение $x=0$, $y=0$ уравнений (I2) равномерно асимптотически устойчиво в целом относительно x, то существует функция $v(t,x,y)$ удовлетворяющая на множестве $J \times R^{n+m}$ условиям

$$a(\|x\|) < v(t,x,y) < b(\|x\|), \quad dv/dt < -c(\|x\|),$$

где a, b, c - функции Хана, причем $\lim\limits_{r\to\infty} a(r)=\infty$. Функция $v(t,x,y)$ имеет непрерывные частные производные $\partial v/\partial t$, $\partial v/\partial x_i$, $\partial v/\partial y_j$ $(i=1,\dots,n;\ j=1,\dots,m)$, равномерно ограниченные по времени t в каждой области вида $\|x\|<r$, $y\in R^m$, $t\in J$, где $r<\infty$. Если функции X и Y в правых частях уравнений (I2) непрерывны равномерно по времени t в каждой области вида $\|x\|<r$, $y\in R^m$ $(r=const)$, то функция v имеет непрерывные частные производные любого порядка по всем аргументам, равномерно ограниченные по времени в каждой области вида $\|x\|<r$, $y\in R^m$, $t\in J$. Если X и Y - периодические функции времени t периода ω (или не зависят явно от времени), то существует функция v, которая помимо других свойств, перечисленных в формулировке теоремы, является периодической функцией времени периода ω (или не зависит явно от времени).

В § 5.5 наряду с уравнениями (I2) рассмотрена система

$$\dot{x} = X(t,x,y)+F_1(t,x,y), \quad \dot{y} = Y(t,x,y)+F_2(t,x,y) \qquad (I3)$$

также допускающая нулевое решение. Указаны ограничения на функции $F_1(t,x,y)$, $F_2(t,x,y)$, при выполнении которых из равномерной асимптотической устойчивости относительно x тривиального решения уравнений (I2) следует равномерная асимптотическая устойчивость относительно x нулевого решения системы (I3).

В § 5.6 не предполагается, что уравнения (I3) допускают нулевое решение. Рассмотрена задача устойчивости относительно части переменных при постоянно действующих возмущениях.

В § 5.7 приведены критерии асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных, основанные на функциях со знакопостоянной производной.

Шестая глава посвящена применению метода функций Ляпунова к исследованию устойчивости интегральных множеств.

Определение 6.I. Множество M пространства (t, x) называется интегральным, если для любой точки $(t_0, x_0) \in M$ выполняется $(t, x(t)) \in M$, где $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ — решение уравнений (I) с начальными данными $x(t_0) = x_0$, а t принимает любые значения из промежутка существования решения $x(t)$.

Пусть $M \subset J \times R^n$ — интегральное множество уравнений (I). Обозначим M_s — пересечение M с гиперплоскостью $t = s$, $\rho(x, M_s)$ — расстояние от точки x до множества M_s; $S(M_t, r) = \{x \in R^n : \rho(x, M_t) < r\}$.

Определение 6.2. Интегральное множество M называется устойчивым, если для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in J$ можно указать $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ такое, что при любом $x_0 \in S(M_{t_0}, \delta)$ выполняется неравенство $\rho(x(t), M_t) < \varepsilon$ при $t \geq t_0$. M называется равномерно устойчивым, если δ зависит лишь от ε .

Определение 6.3. Интегральное множество M называется притягивающим, если для любого $t_0 \in J$ найдется $\eta = \eta(t_0)$ и для любых $\varepsilon > 0$ и $x_0 \in S(M_{t_0}, \eta)$ найдется $\sigma = \sigma(t_0, \varepsilon, x_0) > 0$ такое, что $\rho(x(t), M_t) < \varepsilon$ для всех $t \geq t_0 + \sigma$. Область $S(M_{t_0}, \eta)$ называется областью притяжения интегрального множества M в момент t_0. M называется эквипритягивающим, если $\sigma = \sigma(t_0, \varepsilon)$ и равномерно притягивающим, если $\sigma = \sigma(\varepsilon)$.

Обозначим

$$U_H(M) = \{(t, x) \in R^{n+1} : t \in J, x \in S(M_t, H)\}.$$

Определение 6.6. Интегральное множество M уравнений (I) называется: асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и притягивающее; эквиасимптотически устойчивым, если оно устойчиво и эквипритягивающее; равномерно асимптотически устойчивым, если оно равномерно устойчиво и равномерно притягивающее.

Теорема 6.3. Предположим, что существует непрерывно-дифференцируемая функция $v : U_H(M) \to R$, такая, что для некоторых функций $a, b, c \in K$ и любых $(t, x) \in U_H(M)$ справедливы оценки:

$$a(\rho(x, M_t)) \leq v(t, x) \leq b(\rho(x, M_t),$$
$$dv/dt \leq -c(\rho(x, M_t)).$$

Тогда интегральное множество M равномерно асимптотически устойчиво.

В § 6.I доказаны теорема 6.3, теорема об устойчивости и равномерной устойчивости интегральных множеств а также теорема об устойчивости интегрального множества при п.д.в.

§ 6.2 посвящен доказательству обратимости теоремы 6.3.

В § 6.3 доказан ряд теорем об эквиасимптотической устойчивости интегральных множеств.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

I. Получены критерии асимптотической устойчивости и неустойчивости почти периодических систем, основанные на применении вспомогательных функций, производные которых не являются знакоопределенными.

2. Доказаны теоремы об устойчивости в критическом случае n пар чисто мнимых корней.

3. Изучено влияние постоянно действующих возмущений на устойчивые движения.

4. Исследована устойчивость линейного осциллятора с переменными параметрами.

5. Доказаны обратимость теорем В.В.Румянцева об асимптотической устойчивости по части переменных и ряд теорем об устойчивости относительно части переменных.

6. Получены критерии устойчивости интегральных множеств систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

I. Игнатьев А.О., Савченко А.Я. К вопросу о влиянии постоянно действующих возмущений на неасимптотически устойчивые движения//Теория устойчивости и ее приложения. Новосибирск: Наука, 1979. - С. 31-38.

2. Игнатьев А.О. Об асимптотической устойчивости одного класса неавтономных систем//Диф.уравнения. - 1987. - 23, № 12. - С. 2161-2163.

3. Савченко А.Я., Игнатьев А.О Некоторые задачи устойчи-

вости неавтономных систем. - Киев:Наук. думка, 1989. - 208 с.

4. Игнатьев А.О. Об устойчивости положения равновесия колебательных систем с переменными параметрами//Прикл. математика и механика. - 1982. - 46, № I. - С. 167-168.

5. Игнатьев А.О. О неустойчивости положения равновесия линейного осциллятора с переменными параметрами//Там же. - 1991. - 55, № 4. - С. 701-703.

6. Игнатьев А.О. Об устойчивости в одном особенном случае//II Республиканская конференция молодых ученых по механике. Труды конференции. - Киев, 1979. - С. 74-75.

7. Игнатьев А.О. О влиянии исчезающих постоянно действующих возмущений на асимптотически устойчивое движения//Механика твердого тела. - 1979. - № II. - С. 92-95.

8. Игнатьев А.О. К вопросу об устойчивости в одном особенном случае// Там же. - 1980. - № 12. - С. 72-75.

9. Игнатьев А.О. О формальной устойчивости в критическом случае n пар чисто мнимых корней//Там же. - 1980. - № 12.- С. 76-85.

10. Игнатьев А.О. Об устойчивости в критическом случае пары чисто мнимых корней для неавтономных систем//Мат. физика. - 1982. - № 31. - 27-32.

II. Игнатьев А.О. Некоторые обобщения теорем Барбашина-Красовского//Там же. - 1983. - № 34. - С. 19-22.

12. Игнатьев А.О. Устойчивость движения относительно части переменных при постоянно действующих возмущениях//Мат. физика и нелинейн. механика. - 1988. - № 10(44). - С. 20-25.

13. Игнатьев А.О. Об устойчивости почти периодических систем относительно части переменных//Диф. уравнения. - 1989. - 25, № 8. - С. 1446-1448.

14. Игнатьев А.О. О сохранении свойства равномерной асимптотической устойчивости относительно части переменных// Прикл. математика и механика. - 1989. - 53, № I. - С. 167-171.

15. Игнатьев А.О. Устойчивость относительно части переменных при постоянно действующих возмущениях//Известия вузов. Математика. - 1991. - № 2(25). - С. 55-60.

16. Игнатьев А.О. Применение прямого метода Ляпунова к исследованию интегральных множеств//Украинский математический журнал. - 1992. - 44, № 10. - С. 1342-1348.

17. Игнатьев А.О. О существовании функций Ляпунова в задачах устойчивости интегральных множеств//Там же. - 1993. - 45, № 7. - С. 932-941.

Зак.4 тир.100 Ротапринт оус

вости нелинейных систем. – Киев: Наук. думка, 1980. – 208 с.

4. Игнатьев А.О. Об устойчивости положения равновесия колебательных систем с переменными параметрами// Прикл. математика и механика. – 1982. – 46, № 1. – С. 167–168.

5. Игнатьев А.О. О неустойчивости положения равновесия конечного осциллятора с переменными параметрами// Там же. 1981. – 45, № 4. – С. 701–703.

6. Игнатьев А.О. Об устойчивости в одном особенном случае// II Республиканская конференция молодых ученых по математике. Труды конференции. – Киев, 1979. – С. [illegible].

7. Игнатьев А.О. О влиянии усиленных постоянно действующих возмущений на асимптотическую устойчивость движения// Механика твердого тела. – 1979. – № 11. – С. 56–60.

8. Игнатьев А.О. К вопросу об устойчивости в одном двойном случае// Там же. – 1980. – № 12. – С. 72–75.

9. Игнатьев А.О. О [illegible] устойчивости в критическом случае N пар чисто мнимых корней// Там же. – 1980. – № 12. – С. 76–85.

10. Игнатьев А.О. Об устойчивости в критическом случае пары чисто мнимых корней для неавтономных систем// Мат. физика. – 1982. – № 31. – С. 97–99.

11. Игнатьев А.О. Некоторые особенности теории Барбашина–Красовского// Там же. – 1983. – № 34. – С. [illegible].

12. Игнатьев А.О. Устойчивость [illegible] по отношению к постоянно действующим возмущениям// [illegible]. – 1982. – [illegible].

13. Игнатьев А.О. Об устойчивости почти периодических систем// [illegible]. – 25, № 8. – С. 1440–1446.

14. Игнатьев А.О. О сохранении свойства равномерной асимптотической устойчивости [illegible]// Прикл. математика и механика. – 1989. – 53, № 1. – С. [illegible].

15. Игнатьев А.О. [illegible] при постоянно действующих возмущениях// Математика [illegible].

16. Игнатьев А.О. Применение прямого метода Ляпунова [illegible]// [illegible] журн. – [illegible]. – С. 1342–1346.

17. Игнатьев А.О. О существовании функций Ляпунова [illegible]// Укр. мат. журн. – [illegible]. – 46, № 7. – С. [illegible].