МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

На правах рукопису

ДЖАЛЛАДОВА Ірада Агаверді кизи

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ РОЗВ"ЯЗКІВ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ З ВИПАДКОВИМИ ПЕРІОДИЧНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ.

01.01.02 - диференційні рівняння

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

дисертації на здобуття вченого ступеня кандидата фізико-математичних наук

К И Ї В - 1994

Дисертація є рукопис.

Работа виконана на кафедрі вищої математики Київського державного економічного університету

Науковий керівник	- доктор фізико-математичних наук, професор Валеев К.Г.
Офіційні опоненти	- доктор фізико-математичних наук, професор Хусаїнов Д.Я.
	- кандидат фізико-математичних наук, ст.науковий співробітник Коломієць В.Г.
Провідна організація	- Санкт-Петербурзький державний університет

Захист дисертації відбудеться "23" травня 1994 р. о 14 год., на засіданні спеціалізованої ради К 01.01.14 по присудженню вченого ступеня кандидата фізико-математичних наук в Київському університеті імені Тараса Шевченка за адресою: 252127, Київ, проспект академіка Глушкова 6, механіко-математичний факультет, ауд. 42.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці Київського університету імені Тараса Шевченка, Київ, Володимирська, 58.

Автореферат розісланий "14" квітня 1994 р.

Вчений секретар спеціалізованої ради Курченко О.О

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Запропонована робота присвячена розробленню чисельно-аналітичних методів дослідження стійкості розв"язків систем лінійних диференційних рівнянь з випадковими періодичними марковськими коефіцієнтами.

В дослідженні систем диференційних рівнянь зі змінними коефіцієнтами важливу роль відіграють асимптотичні методи, які створені в роботах К.Гаусса, К.Делоне, Ж.Лагранжа, М.Линдстедта, А.Пуанкаре. Розвиток та поширення асимптотичних методів пов"язані з іменами М.М.Боголюбова, Е.А.Гребеннікова, Г.Джакалья, Дж. Коула, М.І.Крилова, Ю.О.Митропольського, М.М.Моісєєва, А.М.Самойленка, Т.Г.Стрижак, М.І.Шкіля, І.З.Штокала та інших.

Для зниження порядку систем лінійних диференційних рівнянь, що досліджуються використована теорія інтегральних многостатностей. Способи побудови інтегральних многостатностей розроблені в роботах А.М.Ляпунова, А.Пуанкаре. Теорія інтегральних многостатностей була розвинена в роботах М.М.Боголюбова, Ю.О.Митропольського, О.Б.Ликової, В.А.Плісса та інших.

В дисертації застосована теорія лінійних систем диференційних рівнянь з періодичними коефіцієнтами, в розробленні якої приймали участь О.О.Андронов, К.Г.Валєєв, М.Г.Єругін, О.М.Ляпунов, І.Г.Малкін, А.Пуанкаре, В.М.Старжинський, В.О.Якубович та інші.

Деякі нові результати одержані для систем лінійних диференційних рівнянь з випадковими періодичними коефіцієнтами і сталим загаювальням аргумента. Теорію систем диференційних рівнянь з загаювальними аргументами створювали В.І.Зубов, М.М.Красовський, Д.І.Мартинюк, А.Д.Мишкіс, В.П.Рубанік, Ш.А.

Рябов, В.Хан, А.Е.Ельсгольц та інші.

Останнім часом велике місце в дослідженнях по якісній теорії диференційних рівнянь займають системи лінійних диференційних рівнянь з випадковими коефіцієнтами, які залежать від марковського скінченнозначного процесу. Їх вивчали В.М.Артемьєв, І.А.Кац, М.М.Красовський, А.М.Колмогоров, Г.М.Мильштейн, Ю.М.Репін, Р.З. Хасьмінський, Хусаїнов Д.Я. та інші.

Незважаючи на велику кількість робіт по дослідженню систем з випадковими коефіцієнтами, проблема побудови нових методів та поширення існуючих на більш широкі класи рівнянь у зв"язку з вирішенням прикладних завдань залишається як і раніше актуальною.

У наших роботах проведені дослідження стійкості розв"язку лінійних диференційних рівнянь з коефіцієнтами, які залежать від марковського періодичного скінченнозначного випадкового процесу у резонансних випадках. Більше уваги приділено вирішенню задач по знаходженню близьких один до одного коренів алгебраїчних та трансцендентних рівнянь, залежних від параметра, що пов"язано з дослідженням характеристичних рівнянь.

Мета роботи полягає в розробленні методів знаходження близьких до кратних коренів алгебраїчних та трансцендентних рівнянь, залежних від параметра, створенні чисельно-аналітичних методів дослідження стійкості розв"язків систем лінійних диференційних рівнянь, залежних від марковського періодичного випадкового процесу, побудови границь областей нестійкості для моментних рівнянь.

Загальні методи дослідження. Основними аналітичними засобами дослідження є метод інтегральних многостатностей, метод малого параметру, метод моментних рівнянь, асимптотичний метод, перетвір Лапласа, метод S-рядів, чисельні методи знаходження коренів алгебраїчних та трансцендентних рівнянь.

Наукова новизна. І. Побудовані нові алгоритми розкладу многочленів на множники у випадку близьких до кратних коренів з використанням ідеї підготовчої теореми Вейєрштрасса та теорії інтегральних многостатностей.

2. Побудовано новий спосіб знаходження близьких один до одного коренів аналітичної функції, яка залежить від параметра.

3. Одержані достатні умови збіжності узагальненого методу Ліна до розв"язання алгебраїчних рівнянь у випадку близьких один до одного коренів.

4. Розроблено та обгрунтовано метод виведення моментних рівнянь для лінійних систем диференційних рівнянь з випадковими періодичними коефіцієнтами.

5. Розроблено та обгрунтовано чисельний спосіб дослідження стійкості розв"язків системи лінійних диференційних рівнянь з випадковими марковськими періодичними коефіцієнтами.

6. Розроблено спосіб дослідження стійкості розв"язків систем з випадковими параметрами та з загальним аргументом.

7. Розроблені способи чисельної побудови границь областей нестійкості та чисельного знаходження характеристичних показників за параметричного резонансу.

Практична цінність роботи. Одержані результати можуть бути використані для вирішення практичних завдань у теорії стійкості, математичній економіці та ін. при проектуванні реальних систем з випадковими параметрами, а також у викладанні теорії випадкових процесів, обчислювальної математики ; розробленні чисельні способи можуть бути корисні для дослідження конкретних систем, для яких відомі методи не ефективні.

Апробація і публікація. Матеріали дисертації обговорювалися на наукових семінарах у Київському державному економічному університеті; у Київському політехнічному інституті; на українській конференції "Моделювання та дослідження стійкості систем" у м. Києві (1993 р.);у Київському університеті ім.Т.Шевченка.

Основні результати дисертації опубліковані в роботах /І-7/.

Структура дисертації. Дисертація складається із вступу, трьох розділів, які містять І5 параграфів, висновків, списку літератури, додатків, які містять результати розв"язання прикладів, представлених таблицями та графіками, а також програми.

Зміст дисертації

У вступі обгрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету роботи, міститься огляд літератури, дається короткий виклад змісту дисертації.

В першому розділі запропоновані нові обчислювальні методи відділення коренів алгебраїчних та трансцендентних рівнянь з використанням підготовчої теореми Вейєрштрасса і методу інтегральних многостатностей.

Побудовано новий алгоритм розкладу многочлена на множники, досліджено збіжність узагальненого методу Ліна для розв"язання алгебраїчних рівнянь у випадку близьких один до одного коренів. Запропоновано спосіб знаходження близьких один до одного коренів аналітичної функції, яка залежить від параметру. Результати першого розділу використовуються в третьому розділі роботи для обчислення характеристичних показників розв"язок, що досліджується у резонансному випадку. Одержані результати являють також самостійний теоретичний та практичний результат.

В § І.І. знайдені достатні умови застосування підготовчої теореми Вейєрштрасса в випадку, коли аналітична функція має спеціальний вигляд.

<u>Теорема I.2.</u> Нехай аналітична функція

$$f(z,\tau)=Q(z)+\tau\Psi(z,\tau) \qquad (I.2.)$$

де $Q(z)$ - многочлен n-го степеня, нолі якого належать області $|z|<|z_0|$, $\Psi(z,\tau)$ - аналітична від змінних z,τ функція в області:

$$|z|<z_0 \;,\; |\tau|<\tau_0$$

при деякому r_0 має в області /I.3/ n нолів.

Якщо виконуються умови:

I. $\|\Psi(z,\tau)\|\le M=const$ /I.4./

2. $|z|<z_0 \,,\; |\tau|<\min\left\{r_0\,,\,mM^{-1}\right\}$ /I.5./

$$m=\max_{|z|=z_0}|Q(z)| \;,\; Q(z)=\sum_{k=0}^{n}a_k z^k$$

то трансцендентне рівняння вигляду:

$$Q(z)+\tau\,\Psi(z,\tau)=0 \qquad /I.7./$$

приводиться до алгебраїчного відносно z рівняння:

$$\sum_{k=0}^{n}\left(a_k+\tau\, b_k(\tau)\right)z^k=0 \qquad /I.8./$$

Вирішується приклад, в якому теорема I.2. використовується для виділення групи близьких один до одного коренів аналітичної в області $|z|<z_0\,,\,|\tau|<\tau_0$ функції $f(z,\tau)=z+\exp(-z\tau)$ і вивчається поводження коренів z залежно від параметру τ після їх зіткнення в точці $z=-e$ при $\tau=1/e$.

В §I.2. запропоновано і обгрунтовано новий алгоритм обчислювального методу розкладу многочленів на множники.

Розглядається зведений многочлен n-го степеня

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k x^{n-k} \;,\; a_0=1 \;, \qquad /I.14./$$

для якого справедливий розклад на множники

$$f(x)=\varphi(x)\cdot\psi(x) \;. \qquad /I.15./$$

2-4-1003

де $\varphi(x)$, $\psi(x)$ - многочлени степеня q, $n-q$ відповідно.

Многочлен $f(x)$ чисельно розділяється на многочлен

$$\psi(x)+\delta\psi(x)=\sum_{k=0}^{p} b_k x^{p-k}+\sum_{k=1}^{p}\alpha_k x^{p-k}, \qquad /I.16./$$

де α_k $(k=\overline{1,n})$ - величини приросту до коефіцієнтів b_k многочлена ψ_k $(k=\overline{1,n})$. Остача від ділення

$$R(x,\alpha_1,\dots,\alpha_p)=\sum_{k=0}^{p-1} R_k(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_p)x^{p-1-k} \qquad /I.17./$$

вишукується близькою до 0. Для цього чисельно розв"язується система рівнянь:

$$R_k(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_p)=0 \quad, (k=\overline{1,p}). \qquad /I.18./$$

Теорема I.3. Нехай справедливий розклад на множники /I.15./. Для того, щоб многочлени $\varphi(x)$, $\psi(x)$ не мали загальних коренів необхідно та достатньо, щоб були виконані умови:

$$\left.\frac{D(R_1,R_2,\dots,R_p)}{D(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_p)}\right|_{\alpha_k=0}\neq 0 \ .\ (k=\overline{1,p}). \qquad /I.19./$$

Розроблено алгоритм чисельного засобу розкладу многочлена $f(x)$ на множники для реалізації на ПЕОМ. Докладно розглянуто випадок відділення квадратичного множника, коли многочлен $\varphi(x)$ має степінь $p=2$.

В §I.3. ідея розкладу многочлена на множники використовується для знаходження близьких один до одного коренів аналітичної в області $|z|<z_0$, $|\tau|<\tau_0$ функції $f(z,\tau)$. Функція $f(z,\tau)$ чисельно розділяється на квадратичний трьохчлен $z^2+b_1z+b_2$ з коренями z_1, z_2. Коефіцієнти b_1, b_2 визначаються із системи рівнянь:

$$\begin{cases} R_1(b_1, b_2)=0 \\ R_2(b_1, b_2)=0 \end{cases},$$

де R_1, R_2 - остатні члени в розкладу

$$f(z,\tau)=\varphi(z,\tau)(z^2+b_1 z+b_2)+R_1 z+R_2 \qquad /I.27./$$

<u>Лема I.I.</u> Нехай корені z_1, z_2 функції $f(z,\tau)$ за фіксованого τ близькі один до одного. Тоді остатні члени в розкладу /I.27./ визначаються за формулами:

$$R_1=P_1 \quad , \quad R_2=P_2+\frac{b_1}{2}P_1$$

де

$$P_1=f'(z_0,\tau)+\frac{f^{(3)}(z_0,\tau)}{3!}\gamma+\frac{f^{(5)}(z_0,\tau)}{5!}\gamma^2+\dots+O(\gamma^n)$$

$$P_2=f(z_0,\tau)+\frac{f^{(2)}(z_0,\tau)}{2!}\gamma+\frac{f^{(4)}(z_0,\tau)}{4!}\gamma^2+\dots+O(\gamma^n)$$

$$\gamma=b_1^2/4-b_2 \quad , \quad z_0=-b_1/2$$

В §I.4. знайдені достатні умови збіжності узагальненого методу Ліна для розв"язання алгебраїчних рівнянь в випадку близьких один до одного коренів.

<u>Теорема I.4.</u> Для того щоб многочлен $d(x)=x^2+ax+b$ був дільником многочлена n-го степеня $f(x)$, який має близькі до кратних корені достатньо, щоб виконувалися умови:

I. Початковий дільник $d_0(x)$ був достатньо близьким до многочлену $d(x)$

2. $f(-a/2)\neq 0$.

Більш докладно досліджена збіжність методу Ліна в випадку, коли многочлен $f(x)$ має степень $n = 3$.

В §I.3. розроблено новий алгоритм знаходження простих та відділення групи близьких до кратних коренів алгебраїчного рівняння з використанням теорії інтегральних многостатностей. Розв"язані приклади.

У другому розділі дано поширення асимптотичного методу для систем диференційних рівнянь з випадковими періодичними коефіцієнтами. Дається короткий огляд робіт авторів, які розвинули та поширили теорію асимптотичних методів.

В §2.I. приведені відомі знання про періодичні марковські процеси, необхідні для викладу наступного. Дано поняття, основні властивості періодичного процесу, запропоновані А.Я.Дороговцевим, визначення основних характеристик випадкового процесу, поняття р-стійкості для розв"язку диференційного рівняння з випадковими коефіцієнтами.

В §2.2. запропоновано асимптотичний метод побудови системи рівнянь для математичного сподівання розв"язок системи лінійних диференційних рівнянь

$$\frac{dX}{dt} = \mu A(t, \xi(t)) X \,, \qquad (2.I.)$$

де μ - малий параметр, $\xi(t)$ - випадковий періодичний процес, що набуває стани $\theta_i \ (i=\overline{1,n})$ з імовірностями $p_i \ (i=\overline{1,n})$, які задовольняють системі диференційних рівнянь

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = \sum_{s=1}^{n} a_{ks}(t) p_s(t) \,, \quad (k=\overline{1,n}) . \qquad /2.19./$$

Розглянуто випадок, коли випадковий періодичний процес є марковським скінченнозначним. Обгрунтовується використання асимптотичного методу для побудови моментних рівнянь у випадку, коли коефіцієнти залежать від марковського періодичного процесу.

Лема 2.I. Лінійна система диференційних рівнянь

$$\frac{dX(t,\mu)}{dt} = \mu \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t, \xi(t)) X(t,\mu) \qquad /2.25./$$

коефіцієнти якої залежать від марковського періодичного процесу $\xi(t)$, що набуває стани θ_i $(i=\overline{1,n})$ з імовірностями p_i $(i=\overline{1,n})$, які задовольняють системі диференційних рівнянь /2.19./ за виконанням умови

$$\|\mu A(t,\xi(t))\| < 0.1546\,\lambda \ell^{-1}, \quad -\infty < t < \infty \qquad /2.26./$$
$$\ell > 1, \quad \lambda > 0.$$

зводиться до стаціонарної системи диференційних рівнянь

$$\frac{dZ}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k Z(t), \quad Q_k = const, \; (k=1,2,\dots). \qquad /2.27./$$

В §2.3. асимптотичний метод застосовано для дослідження стійкості рішень диференційного рівняння другого порядку:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \mu^2\beta \frac{dy}{dt} + (\omega^2 + \mu a(t,\xi(t)))y = 0, \qquad /2.41./$$

де $\xi(t)$ – випадковий марковський періодичний процес, який набуває стани θ_k $(k=\overline{1,n})$ з імовірностями p_k $(k=\overline{1,n})$, що задовольняють системі диференційних рівнянь /2.19./.

Лема 2.2. Для стійкості у середньому квадратичному розв"язків диференційного рівняння /2.41./ достатньо, щоб всі характеристичні числа матриці $G(\mu)=\mu C_1 + \mu^2 C_2$ мали від"ємні дійсні частини, незалежно від членів порядку μ^3, де матриці C_1, C_2 обчислюються за формулами:

$$C_1 = [B_1(t)], \quad C_2 = [B_2(t)]$$
$$B_1(t) = \langle A(t,\xi(t))\rangle,$$
$$B_2(t) = \int_0^t \langle \mathring{A}_1(t,\xi(t))\mathring{A}_2(\tau,\xi(\tau))\rangle d\tau + \langle A_2(t,\xi(t))\rangle.$$

У прикладі досліджується стійкість у середньому квадратичному розв"язків рівняння /2.41./ в випадку, коли випадкова величина $a(t,\xi(t))$ визначається наступним способом:

$$\alpha(t,\xi(t))=\begin{cases}\alpha+\cos 2\omega t & , \ \xi(t)=\theta_1\\ \alpha-\cos 2\omega t & , \ \xi(t)=\theta_2\end{cases}$$

де $\xi(t)$ - випадковий періодичний марковський процес, який набуває два стани θ_1, θ_2 з імовірностями p_1, p_2, що задовільняють системі диференційних рівнянь:

$$\begin{cases}\dot{p}_1=-\vartheta p_1+\vartheta p_2\\ \dot{p}_2=\vartheta p_1-\vartheta p_2\end{cases} \qquad /2.50./$$

Умови стійкості у середньому квадратичному розв"язків рівняння /2.4I./ мають вигляд:

$$\frac{\vartheta}{\omega^2}\left[\frac{1}{2\vartheta^2}+\frac{1}{2(\vartheta^2+4\omega^2)}-\frac{1}{\vartheta^2+\omega^2}\right]<8\beta+o(\mu)$$

$$\left|\frac{\mu\alpha}{\omega}-\frac{\mu^2}{8\omega^2(\vartheta^2+4\omega^2)}\right|>\mu^2\sqrt{\frac{1}{(16\vartheta\omega^2)^2}-K^2}+o(\mu^3)$$

$$K\equiv\beta-\frac{1}{16\vartheta\omega^2}+\frac{\vartheta}{4\omega^2(\vartheta^2+\omega^2)}-\frac{\vartheta}{16\omega^2(\vartheta^2+4\omega^2)} \qquad /2.54./$$

В §2.4. для системи лінійних диференційних рівнянь /2.I./ чисельно побудовуються лінійні диференційні рівняння, які визначають математичне сподівання випадкового процесу. Метод побудови базується на пошуці інтегральної многостатності системи лінійних диференційних рівнянь з періодичними коефіцієнтами. Чисельно відшукується матриця монодромії та з допомогою оцінювання мультиплікаторів проводиться дослідження стійкості у середньому початкової системи диференційних рівнянь.

<u>Лема 2.3.</u> Для того, щоб марковський періодичний випадковий процес $\xi(t)$, визначений системою рівнянь /2.I9./ був ергодичним необхідно і достатньо щоб нульовий розв"язок однорідної системи рівнянь

$$\frac{dy_\kappa(t)}{dt} = \sum_{s=1}^{n-1} \left[\alpha_{\kappa s}(t) - \alpha_{\kappa n}(t) \right] y_s(t), \quad (\kappa=\overline{1,n}) \qquad /2.6I./$$

був асимптотично стійким.

Для системи рівнянь /2.I./ маємо систему моментних рівнянь:

$$\frac{dM_\kappa(t)}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \alpha_{\kappa s}(t) M_s(t) + \mu A_\kappa(t) M_\kappa(t), \quad (\kappa=\overline{1,n}) \qquad /2.66./$$

де

$$M_\kappa(t) = \int\limits_{E_m} X f_\kappa(t,X) dX, \quad dX = dx_1\, dx_2 \dots dx_m$$

$f_\kappa(t,X)$ - окремі щільності імовірності, X - розв"язок системи рівнянь /2.I./, E_m - простір вимірності m векторів $(x_1, x_2, \dots, x_m)^*$.

Система рівнянь /2.66./ перетворюється до вигляду:

$$\frac{dV_n}{dt} = \mu C_{11}(t) V_n(t) + \mu C_{12}(t) W(t) \qquad /2.73./$$

$$\frac{dW}{dt} = C(t)W(t) + \mu C_{21}(t) V_n(t) + \mu C_{22}(t) W(t)$$

де матриці $C_{il}(t)$, $(i,l=\overline{1,2})$ визначені наступним чином:

$$C_{11}(t) = \sum_{\kappa=1}^{n-1} \left[A_\kappa(t) - A_n(t) \right] \varphi_\kappa(t) + A_n(t),$$

$$C_{12}(t) = \left\{ \left[A_1(t) - A_n(t) \right] \left[A_2(t) - A_n(t) \right] \dots \left[A_{n-1}(t) - A_n(t) \right] \right\}$$

$$C_{21}(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t)A_1(t) - \varphi_1(t)\left[\sum\limits_{s=1}^{n-1} [A_s(t) - A_n(t)]\varphi_s(t) + A_n(t) \right] \\ \varphi_2(t)A_2(t) - \varphi_2(t)\left[\sum\limits_{s=1}^{n-1} [A_s(t) - A_n(t)]\varphi_s(t) + A_n(t) \right] \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_{n-1}(t)A_{n-1}(t) - \varphi_{n-1}(t)\left[\sum\limits_{s=1}^{n-1} [A_s(t) - A_n(t)]\varphi_s(t) + A_n(t) \right] \end{pmatrix}$$

$$C_{22}(t) = \| -\varphi_\kappa(t)[A_s(t) - A_n(t)] + \delta_{\kappa s} A_s(t) \|_{\kappa, s=1}^{n-1} .$$

Для норм матриць C_{il} $(i, l = \overline{1,2})$ вводяться наступні оцінки:

$$\|C_{11}(t)\| \leq L_1, \ \|C_{12}(t)\| \leq L_2, \ \|C_{21}(t)\| \leq L_3, \ \|C_{22}(t)\| \leq L_4$$

Теорема 2.4. Якщо для системи рівнянь /2.73./ виконана умова:

$$|\mu| < \mu_0 \equiv \frac{\lambda}{L_1 + 2\sqrt{c\,L_2 L_3} + c\,L_4} , \qquad /2.74./$$

$$c \geq 1 , \quad \lambda > 0 ,$$

то система рівнянь /2.73./ має інтегральну многостатність розв"язків, наведеними рівняннями

$$\frac{dV_n(t)}{dt} = \mu\, G(t,\mu) V_n(t), \quad W_\kappa(t) = \mu\, H_\kappa(t,\mu) V_n(t) \qquad /2.75./$$

де зазначено:

$$G(t,\mu) = A_n(t) + \sum_{\kappa=1}^{n-1} (A_\kappa(t) - A_n(t))(\varphi_n(t) E + \mu\, H_\kappa(t,\mu)) .$$

Теорема 2.5. Якщо виконана умова /2.74./, то будь-який розв"язок системи рівнянь /2.73./ збігається при $t \to +\infty$ до інтегральної многостатності системи /2.73./, яка визначена системою рівнянь /2.75./.

Теорема 2.6. Якщо виконана умова /2.74./, то система диференційних рівнянь /2.66./ має інтегральну многостатність розв"язків вигляду:

$$\frac{dV_n(t)}{dt} = \mu G(t,\mu) V_n(t) \qquad /2.77./$$

$$V_\kappa(t) = [\mu H_\kappa(t,\mu) + \varphi_\kappa(t) E] V_n(t), \ (\kappa = \overline{1,n}),$$

де всі матриці $G(t,\mu), H_\kappa(t,\mu)$ є 2π - періодичними і аналітичними відносно μ .

Побудований алгоритм чисельного дослідження стійкості розв"язків системи диференційних рівнянь /2.I./.

В §2.5. запропоновано два способи побудови періодичної лінійної системи моментних рівнянь для системи /2.I./:

$$\frac{dM(t,\mu)}{dt} = \mu G(t,\mu) M(t,\mu). \qquad /2.89./$$

Теорема 2.7. Для системи диференційних рівнянь /2.I./ за використанням умови /2.26./ існує система моментних рівнянь /2.89./, де матриця $G(t,\mu)$ періодична з періодом 2π і єдина.

В §2.6. асимптотичний метод побудови лінійної системи диференційних рівнянь для моментів розв"язків поширено на систему диференційних рівнянь з випадковими періодичними коефіцієнтами і з сталим загаювальним аргументом:

$$\frac{dX(t,\mu)}{dt} = \mu \sum_\kappa A_\kappa(t, \xi(t-\tau_\kappa)) X(t-\ell_\kappa) \qquad /2.108./$$

де $\xi(t)$ - випадковий марковський періодичний процес з відомими функціями розподілу, $\tau_\kappa, \ell_\kappa > 0 \ (\kappa = 1,2,\dots)$.

В прикладі досліджується стійкість розв"язків диференційного рівняння першого порядку з загаювальним аргументом:

$$\frac{dy}{dt} = \mu a(t, \xi(t)) y(t-\tau), \quad \tau > 0, \qquad /2.114./$$

де випадкова величина $a(t,\xi(t))$ визначена наступним способом:

$$a(t,\xi(t))=\begin{cases}\sin t\ , & \xi(t)=\theta_1\\ -\sin t\ , & \xi(t)=\theta_2\end{cases}$$

Випадковий процес $\xi(t)$ є марковським періодичним, який набуває два стани θ_1, θ_2 з імовірностями, що задовольняють системі рівнянь /2.10./.

Умова стійкості розв"язків рівняння /2.114./ має вигляд:

$$\tfrac{1}{2}\sin\tau > \partial\cos\tau \qquad /2.118./$$

З аналізу умови стійкості розв"язків системи диференційних рівнянь /2.114./ випливає наступний результат, який одержано, мабуть, вперше:

Розв"язки рівняння /2.114./ в першому стані $\xi(t)=\theta_1$

$$a(t,\xi(t))\equiv\sin t\ ;$$

та у другому стані $\xi(t)=\theta_2$

$$a(t,\xi(t))\equiv-\sin t\ ,$$

за наявністю достатньо малого загаювальня будуть асимптотично стійкими. При випадкових переходах із першого стану в другий за наявністю достатньо малого загаювальня $\tau>0$ розв"язки лінійного диференційного рівняння м /2.114./ можуть стати нестікими.

В третьому розділі стійкість розв"язків систем лінійних диференційних рівнянь з випадковими періодичними коефіцієнтами при параметричному резонансі досліджується методом S-рядів, запропонованим в роботах Валєєва К.Г. Чисельно побудовані границі областей нестійкості для розв"язків моментних рівнянь. Запропоновано алгоритм чисельного знаходження характеристичних показників в резонансному випадку.

В §3.І. приведені поняття S-матриць, їх властивості, поняття характеристичних показників, деякі результати по дослідженню стійкості розв"язків систем лінійних диференційних рівнянь з періодичними коефіцієнтами методом S-рядів, введені ланцюгові матричні дріби.

В §3.2. виведено рівняння для визначення характеристичних показників розв"язків системи рівнянь в резонансному випадку.

В §3.3. досліджується система диференційних рівнянь

$$\frac{dX(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 - \mu a(t,\xi(t)) & -\mu\beta_1 \end{pmatrix} X(t). \qquad /3.45./$$

де $\xi(t)$ - випадковий марковський періодичний процес, який набуває два стани θ_1, θ_2 з імовірностями p_1, p_2, що задовільняють системі лінійних диференційних рівнянь /2.50./. Випадкова величина $a(t,\xi(t))$ приймає значення /2.49./.

При $0<\mu<\varepsilon_1, |p-2\omega i|<\varepsilon_2$, де $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ - достатньо малі числа, умова стійкості системи рівнянь /3.45./ збігається з умовами стійкості /2.54./.

Лема 3.4. Для існування областей нестійкості при основному резонансі необхідно виконання умови:

$$0<\gamma^2<[(\sqrt{57}-5)/2]\cdot\omega^2.$$

З аналізу умов стійкості розв"язків системи диференційних рівнянь /3.45./ випливає результат, одержаний, мабуть, вперше:

Система диференційних рівнянь /3.45./ з коефіцієнтами, які залежать від випадкового марковського періодичного процесу, маючи нестійкі розв"язки в кожному з станів, які набуває випадковий марковський процес може мати стійкі розв"язки за рахунок збільшення кількості випадкових переходів із одного стану в другий.

Побудовані залежності характеру розв"язків системи /3.45./ від параметрів ∂, β на площині (α, μ).

В §3.4. пропонується алгоритм чисельного пошуку характеристичних показників розв"язків системи рівнянь /3.45./ в резонансних випадках. Аналітична функція апроксимується поліномом степеня n. Потім з використанням розроблених в першому розділі даної роботи методів, вишукуються близькі до кратних корені апроксимуючого алгебраїчного рівняння, яке залежить від параметру μ при різних значеннях випадкового параметру ∂. Побудовані залежності поводження характеристичних показників розв"язків системи рівнянь /3.45./ від параметрів μ та ∂. Випадковий параметр ∂ вибирається меншим, більшим та рівним "критичному".

В додатках приведені програми на мові "GW-BASIC" для ПЕОМ, реалізуючи алгоритми чисельних методів, таблиці, що містять результати аналізу, графіки границь областей нестійкості та поводження характеристичних показників.

Основні наукові результати, вміщені у дисертацію, опубліковані в наступних роботах:

I. Джалладова І.А. До запитання узагальнення підготовчої теореми Вейерштрасса. - Київ, 1992. - 7 с. - Деп. в УкрІНТЕІ 25.06.92, № 928-Ук 92.

2. Джалладова І.А. Побудова областей нестійкості розв"язків диференційного рівняння другого порядку з випадковими періодичними коефіцієнтами. Тези української конференції "Моделювання і дослідження стійкості систем". Ч.П. - Київ: товариство "Знання" Україна, 1993. - С.44.

3. Джалладова І.А. Дослідження стійкості розв"язків систем диференційних рівнянь з випадковими періодичними коефіцієнтами. - Київ, 1993. - 10 с. - Деп. в ДНТБ України 28.06.93, № 1258 - Ук 93.

4. Валеєв К.Г., Джалладова І.А. Про збіжність методу Ліна. - Київ, 1992. - 7 с. - Деп. в УкрІНТЕІ 24.06.92, № 925 - Ук 92.

5. Валеєв К.Г., Джалладова І.А. Про розклад многочлена на множники. - Київ, 1992. - 12 с. - Деп. в УкрІНТЕІ 25.06.92, № 926 - Ук 92.

6. Валеєв К.Г., Джалладова І.А. Чисельне дослідження стійкості розв"язків систем лінійних диференційних рівнянь з періодичними випадковими коефіцієнтами. - Київ, 1993. - 19 с. - Деп. в ДНТБ України 28.06.93, № 1256 - Ук 93.

7. Валеєв К.Г., Джалладова І.А. Лінійні диференційні рівняння з випадковими періодичними коефіцієнтами. - Київ, 1993. - 13 с. - Деп. в ДНТБ України 28.06.93, № 1257 - Ук 93.

Підп. до друку 01.03.94 Формат 60×84 1/16.
Папір друк. № 3 . Спосіб друку офсетний. Умовн. друк. арк. 0,93 .
Умовн. фарбо-відб. 1,04 . Обл.-вид. арк. 1,0 .
Тираж 100 . Зам. № 4-1003.

Фірма «ВІПОЛ»
252151, Київ, вул. Волинська, 60.