Академія наук України
Інститут математики

На правах рукопису

ОСТРОВСЬКА Ольга Володимирівна

Дослідження апроксимативних властивостей узагальненого методу Зигмунда

01.01.01 - математичний аналіз

Автореферат

дисертації на здобуття вченого ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ - 1994

517 Ав 29,848

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у відділі теорії функцій Інституту математики АН України.

Науковий керівник — доктор фізико-математичних наук, професор СТЕПАНЕЦЬ О.І.

Офіційні опоненти — доктор фізико-математичних наук ПЕРЕВЕРЗЄВ С.В.

кандидат фізико-математичних наук БУШЕВ Д.М.

Провідна установа — Дніпропетровський державний університет

Захист дисертації відбудеться "24" травня 1994 р. о годині на засіданні спеціалізованої ради Д 016.50.01 при Інституті математики АН України за адресою: 252601 Київ 4, ГСП, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці інституту.

Автореферат розіслано "14" квітня 1994 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради ГУСАК Д.В.

ЛННБ України ім.В.Стефаника
00802269 (R)

ЛНБ ім. В. Стефаника
АН України

АВ-29.848

Загальна характеристика роботи.

<u>АКТУАЛЬНІСТЬ ТЕМИ</u>. Значне місце в теорії наближень функцій займає задача наближення заданого класу функцій $\mathfrak{N}$ за допомогою фіксованого лінійного методу, що визначається нескінченною трикутною матрицею чисел $\Lambda = \|\lambda_k^{(n)}\|$, $n = 0, 1, \ldots$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Ця задача полягає в дослідженні величини

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{N}, U_n(\Lambda))_X \overset{def}{=} \sup_{f \in \mathfrak{N}} \|f(x) - U_n(f, x, \Lambda)\|_X, \qquad (1)$$

де $U_n(f, x, \Lambda)$ — поліном, породжений деяким лінійним методом Λ підсумовування рядів Фур'є, X — нормований простір, $\mathfrak{N} \subset X$ — заданий клас функцій.

Перший результат в цьому напрямі був одержаний А.Н.Колмогоровим в 1935 році (Zur Grössenordnung des Restgliedes Fourierschen // Ann. Math.— 1935.—36, N 2.—P. 521-526). Він встановив, що при $n \to \infty$ має місце рівність

$$\mathcal{E}(W^r, S_n)_C \overset{def}{=} \sup_{f \in W^r} \|f(x) - S_n(f, x)\|_C = \frac{4 \ln n}{\pi^2 n^r} + O\Big(\frac{1}{n^r}\Big), \qquad (2)$$

де $S_n = S_n(f, x)$ — частхові суми Фур'є, W^r — клас 2π-періодичних функцій $f(x)$, $(r-1)$-а похідна яких абсолютно неперервна, $\|f^{(r)}\| \le 1$, $r \in \mathbb{N}$.

Дослідження А.Н.Колмогорова були продовжені В.Т.Пинкевичем (О порядке остаточного члена ряда Фурье функций, дифференцируемых в смысле Вейля // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1940.—4, N 5.—С. 521-528). Він встановив, що співвідношення (2) залишаються вірними і для $\forall r > 0$ ($f^{(r)}(\cdot)$ — похідні в розумінні Вейля).

Наступний суттєвий крок в розвитку цієї теорії належить С.М.Нікольському. Він, зокрема, узагальнив ці результати на класи $W^r H_\omega$ і W_1^r, $r > 0$.

Дослідження А.Н.Колмогорова і С.М.Нікольського поклали початок новому напрямку в теорії наближення функцій. Їх результати поширювались на більш загальні класи функцій, а також різні методи підсумовування рядів Фур'є.

Важливі результати в цьому напрямку одержані Б.Надем, В.К.Дзядиком, М.П.Корнійчуком, С.Б.Стєчкіним, С.А.Теляковським, А.В.Єфімовим, О.І.Степанцем та іншими.

В 1983 році О.І.Степанцем (Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье.—Киев, 1983.—57 с.—(Препр / АН

УССР. Ин-т математики; 83.10)) була запропонована нова класифікація періодичних функцій.

Введені таким чином класи $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ при фіксованих значеннях параметрів, що їх визначають, співпадають з відомими класами W^r, W^rH_ω, W^r_β, $W^r_\beta H_\omega$ і т.д.

Вже зараз на цих класах розглянуто основні задачі теорії наближення, які раніше ставились на класах диференційовних функцій. Одержані результати носять закінчений характер в такому розумінні як вони ставились на класах функцій, диференційовних в розумінні Вейля. Вони охоплюють відомі твердження для класів диференційовних функцій, разом з тим з'являються і нові важливі факти. Частина таких результатів міститься в монографії О.І.Степанця (Классификация и приближение периодических функций.—Киев: Наук. думка, 1987.—268 с.).

Заслуговують на увагу задачі наближення цих класів функцій за допомогою лінійних методів підсумовування рядів Фур'є.

В.Т.Гаврилюк (О характеристике класса насыщения $C^{\psi}_0 L_\infty$ // Укр. мат. журн.—1986.—38, N4.—С 421-427), вивчаючи питання насичення лінійних методів, розглянула метод підсумовування рядів Фур'є, що називається аналогом сум Зигмунда і визначається нескінченною трикутною матрицею $\Lambda = \{\lambda^{(n)}_k\}$, де

$$\lambda^{(n)}_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 1 - \frac{\psi(n)}{\psi(k)}, & 1 \le k \le n-1, \\ 0, & k \ge n, \end{cases}$$

а функція $\psi(n)$ така ж, як і в визначенні класів $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$.

І.Б.Ковальська (Приближение периодичесих функций аналогами сумм Зигмунда в метрике C // Приближение классов периодических функций одной и многих переменных в метрике C и L_p.—Киев, 1988.—С. 3-28—(Препр / АН УССР. Ин-т математики; 88.14)) розглядала узагальнений метод Зигмунда, що задається трикутною матрицею Λ, елементи якої мають вигляд

$$\lambda^{(n)}_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 1 - \frac{\phi(n)}{\phi(k)}, & 1 \le k \le n-1, \\ 0, & k \ge n, \end{cases} \tag{3}$$

на класах $C^{\psi}_{\beta,\infty}$, де $\beta \in \mathbb{R}$, $\psi(v)$ опукла вниз і $\psi(v) \to 0$, $v \to \infty$ та випонується умова

$$v\,|\psi'(v)| \le C\,\psi(v). \qquad (4)$$

В дисертації вивчається наближення узагальненим методом Зигмунда $Z_n^\psi(f,x)$ підсумовування рядів Фур'є, який визначається матрицею виду (3) на класах $C^\psi_{\beta,\infty}$ та $C^\psi_\beta H_\omega$, коли $\psi(\cdot)$ опукла вниз і прямує до нуля швидше, ніж x^{-r}, $r > 0$, $x \to \infty$, при цьому умова (4) може не виконуватись.

Розглядається також задача наближення неперервних функцій, заданих на всій дійсній осі, узагальненими операторами $Z_\sigma^\psi(f,x,\Lambda)$ на класах $\hat{C}^\psi_{\beta,\infty}$, введених в 1988 році О.І.Степанцем (Приближение операторами Фурье функций, заданных на действительной оси //Докл. АН СССР.— 1988.—303.—N1.—С. 50–53).

МЕТА РОБОТИ. 1. Дослідити поведінку верхніх меж відхилень узагальнених сум Зигмунда на класах $C^\psi_{\beta,\infty}$ та $C^\psi_\beta H_\omega$ в рівномірній метриці.

2. Дослідити поведінку верхніх меж відхилень узагальнених операторів Зигмунда на класах $\hat{C}^\psi_{0,\infty}$ та $\hat{C}^\psi_{\beta,\infty}$ в рівномірній метриці.

ЗАГАЛЬНА МЕТОДИКА ВИКОНАННЯ ДОСЛІДЖЕНЬ. Основний метод дослідження є вивчення інтегральних зображень відхилень лінійних середніх рядів Фур'є, та лінійних операторів, одержаних О.І.Степанцем.

НОВИЗНА РЕЗУЛЬТАТІВ ТА ЇХ НАУКОВА ЦІННІСТЬ. Всі основні результати дисертації є новими.

Їх зміст полягає в наступному.

1. Одержані оцінки для величин $\mathcal{E}_n(C^\psi_{\beta,\infty}, Z_n^\psi)$ та $\mathcal{E}_n(C^\psi_{\beta,\infty}, Z_n^\psi)$ в рівномірній метриці, $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$. Якщо $\lim\limits_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{\phi(u)} = 0$, то для величини $\mathcal{E}_n(C^\psi_{\beta,\infty}, Z_n^\phi)$ одержана асимптотична рівність.

2. При $\psi(\cdot) = \phi(\cdot)$ одержана асимптотична рівність для величини $\mathcal{E}_n(C^\psi_\beta H_\omega, Z_n^\psi)$.

3. Одержані оцінки для величини $\mathcal{E}_\sigma(\hat{C}^\psi_{\beta,\infty}, Z_\sigma^\psi)$ та асимптотична рівність для $\mathcal{E}_\sigma(\hat{C}^\psi_{0,\infty}, Z_\sigma^\psi)$.

Робота носить теоретичний характер. Її результати можуть бути використані в деяких питаннях теорії функцій.

АПРОБАЦІЯ РОБОТИ. Результати роботи доповідались на семінарах відділу теорії функцій Інституту математики АН України.

ПУБЛІКАЦІЇ. Основні результати дисертації опубліковані в статтях [1–3].

СТРУКТУРА І ОБ'ЄМ РОБОТИ: Дисертація включає вступ, два розділи і список цитованої літератури, що містить 71 найменування. Загальний обсяг роботи 95 сторінок.

Короткий зміст дисертації

У вступі наводиться короткий огляд з теми роботи, визначаються класи $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ та $\hat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, перераховуються основні результати, одержані в дисертації.

Будемо користуватись означеннями і позначеннями, які були введені О.І.Степанцем.

Класи $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ були введені таким чином. Нехай $f(x)$—сумовна 2π-періодична функція,

$$S[f] = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx)$$

– її ряд Фур'є. Нехай $\psi(x)$ — довільна фіксована функція натурального аргументу і β — фіксоване дійсне число. Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\psi(k)}\left(a_k(f)\cos(kx+\tfrac{\beta\pi}{2}) + b_k(f)\sin(kx+\tfrac{\beta\pi}{2})\right)$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції, то цю функцію позначають через $f^{\psi}_{\beta}(x)$ і називають (ψ,β)-похідною функції $f(x)$, а множину функцій, що задовольняють ці умови, позначають L^{ψ}_{β}.

Якщо $f \in L^{\psi}_{\beta}$, а $f^{\psi}_{\beta} \in \mathfrak{N}$, то говорять, що $f(x) \in L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. Підмножину неперервних функцій $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ позначають через $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. Якщо $\mathfrak{N}$ співпадає з множиною M 2π-періодичних суттєво обмежених функцій $f^{\psi}_{\beta}(x)$, що задовольняє умову $\operatorname{ess\,sup}|f^{\psi}_{\beta}(x)| \leq 1$, то клас $C^{\psi}_{\beta}M$ позначають $C^{\psi}_{\beta,\infty}$. Якщо $\mathfrak{N} = H_{\omega}$, то $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ позначають $C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$.

В першому розділі дисертації вивчаються величини $\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,\infty}, Z^{\psi}_n)$ та $\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}, Z^{\psi}_n)$ з метою одержання для них асимптотичних рівностей.

Зазначимо, що основні результати для величин $\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,\infty}, Z_n)_C$ при $\psi(v) = v^{-r}$, $r > 0$, та цілих β відомі і належать Б.Надю (Sur une class generla de procedes de sommation pour les series de Fourier // Hung. Acta Math.— 1948.—1, N 3.—P. 14–52), при довільних дійсних β — С.А.Теляковському (О нормах тригонометрических полиномов и приближение дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье. I // Тр. мат. ин-та

АН СССР.—1961.—62.—С 61-97), Д.М.Бушеву (Приближение классов непрерывных периодических функций суммами Зигмунда.—Киев, 1984.—64 с.—(Препр/АН УССР. Ин-т математики; 84.56)) та І.Б.Ковальській (Приближение периодических функций аналогами сумм Зигмунда в метрике C // Приближение классов периодических функций одной и многих переменных в метрике C и L_p.—Киев, 1988.—С. 3-28.—(Препр/АН УССР. Ин-т математики; 88.14)).

В §1 сформульовані означення і відомі результати, які використовуються в подальшому.

Множину функцій $\psi(t)$, опуклих вниз на $[1,\infty)$ та таких, що $\psi(t)\to 0$, $t\to\infty$, позначають через $\mathfrak{M}$. Із класу $\mathfrak{M}$ за допомогою так званої функції півроспаду

$$\mu(t)=\frac{t}{\eta(t)-t},\qquad \eta(t)=\psi^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\psi(t)\right)$$

О.І.Степанцем виділені три класи функцій $\psi(t)$:
$\mathfrak{M}_C$: $K_1\le\mu(t)\le K_2$,
$\mathfrak{M}_0$: $0<\mu(t)\le K_2$, $\quad K_1,K_2=\mathrm{const}$,
$\mathfrak{M}_\infty$: $\mu(t)$ монотонно зростає.

Зауважимо, що будемо розглядати тільки класи $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ та $C_{\beta}{}_{H_\omega}$, де $\psi(\cdot)\in\mathfrak{M}_\infty$.

В §1.2 досліджується поведінка величин $\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{0,\infty},Z^{\phi}_n)_C$ та $\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,\infty},Z^{\phi}_n)_C$, при цьому вжливу роль відіграє функція $g(u)=\frac{\psi(u)}{\phi(u)}$, яка вважається опуклою на $[1,\infty)$. Доведена така лема.

Лема 1.3 *Нехай $g(u)=\frac{\psi(u)}{\phi(u)}$ — неперервна функція на $[1,\infty)$ і $\psi\in\mathfrak{M}_\infty$, $\phi(x)\to 0$, $x\to\infty$, такі, що $g(u)$ задовольняє одну з таких умов:*

1. $g(u)$ *опукла вниз і* $\lim\limits_{u\to\infty}g(u)=\infty$.
2. $g(u)$ *опукла вгору і* $\lim\limits_{u\to\infty}g(u)=C>0$.
3. $g(u)$ *опукла вгору і* $\lim\limits_{u\to\infty}g(u)=\infty$.
4. $g(u)$ *опукла вниз і* $\lim\limits_{u\to\infty}g(u)=C>0$.

Тоді

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\bar{\tau}_n(t)|\,dt<\infty,$$

де

$$\tau_n(v) = \begin{cases} vn\,\phi(n)\frac{\psi(1)}{\phi(1)}, & 0 \le v \le \frac{1}{n}, \\ (1-\lambda_n(v))\,\psi(nv), & \frac{1}{n} \le v \le 1, \\ \psi(nv), & v \ge 1. \end{cases}$$

Теорема 1.3 *Нехай* $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$ *і* $g(u) = \frac{\psi(u)}{\phi(u)}$ *задовольняє одну з умов:*

1) $g(u)$ *опукла вниз і* $\lim\limits_{u\to\infty} g(u) = \infty$;
2) $g(u)$ *опукла вгору і* $\lim\limits_{u\to\infty} g(u) = C \ge 0$;
3) $g(u)$ *опукла вгору і* $\lim\limits_{u\to\infty} g(u) = \infty$

і

$$A(\tau_n) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\tau_n(u)\cos(ut + \frac{\beta\pi}{2})\,du\right|dt, \tag{5}$$

Тоді при $n \to \infty$

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,\infty}, Z^{\phi}_n) = A(\tau_n) + O(1)\psi(n).$$

При цьому, якщо $\forall n \in \mathbb{N}\ \ \mu(n) \le n$, *то*

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\phi(n)\int\limits_{1}^{n}\frac{\psi(u)}{u\phi(u)}\,du \le A(\tau_n) \le K_3\psi(n)\ln\frac{n}{\mu(n)} + K_4\psi(n)\ln\mu(n),$$

а якщо $\forall n \in \mathbb{N}\ \ \mu(n) \ge n$, *то*

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\phi(n)\int\limits_{1}^{n}\frac{\psi(u)}{u\phi(u)}\,du \le A(\tau_n) \le K_5\psi(n)\ln n.$$

Теорема 1.4 *Нехай* $\psi \in \mathfrak{M}_\infty$, $g(u)$ *— опукла вниз і* $\lim\limits_{u\to\infty} g(u) = C$. *Тоді при* $n \to \infty$

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,\infty}, Z^{\phi}_n) = A(\tau_n) + O(1)\,\phi(n),$$

де $A(\tau_n)$ *визначається* (5).

Якщо $\forall n \in \mathbb{N}\ \ \mu(n) \ge n$, *то*

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\phi(n)\int\limits_{1}^{n}\frac{\psi(u)\,du}{u\,\phi(u)} \le A(\tau_n) \le K_5\,\phi(n)\ln n;$$

якщо $\forall n \in \mathbb{N}\ \ \mu(n) \le n$, *то*

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\phi(n)\int\limits_{1}^{n}\frac{\psi(u)\,du}{u\,\phi(u)} \le A(\tau_n) \le K_4\,\phi(n)\ln\frac{n}{\mu(n)} + K_5\,\phi(n)\ln\mu(n).$$

Теорема 1.5 *Нехай* $\sin\frac{\beta\pi}{2} = 0$, $g(u) = \frac{\psi(u)}{\phi(u)}$ *опукла вниз і* $\lim\limits_{u\to\infty} g(u) = 0$ *Тоді*

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{0,\infty}, Z^{\phi}_n)_C = \\
&= \phi(n) \sup_{f\in C^{\psi}_{0,\infty}} \|f^{\phi}_0\|_C + O(1)\Big[\sup_{f\in C^{\psi}_{0,\infty}} \|f - S_n(f)\|_C + \\
&\quad + \phi(n) \sup_{f\in C^{\psi}_{0,\infty}} \|f^{\phi}_0 - S_n(f^{\phi}_0)\|_C + \psi(n)\Big],
\end{aligned}$$

де f^{ϕ}_0 *—неперервна періодична функція, ряд Фур'є якої має вигляд*

$$S[f^{\phi}_0] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\phi(k)} A_k(f, x).$$

Якщо

$$\begin{gathered}
g(n)\ln n = o(1), \\
g(n)\ln^+(\eta_{\psi}(n) - n) = o(1),
\end{gathered}$$

де $\eta_{\psi}(n) = \psi^{-1}[\frac{1}{2}\psi(n)]$,

$$\ln^+ x = \begin{cases} \ln x, & x > 1, \\ 0, & x \le 1, \end{cases}$$

то

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{0,\infty}, Z^{\phi}_n)_C = \phi(n) \sup_{f\in C^{\psi}_{0,\infty}} \|f^{\phi}_0\|_C + o(\phi(n)).$$

Теорема 1.6 *Нехай* $\sin\frac{\beta\pi}{2} \neq 0$, $g(u) = \frac{\psi(u)}{\phi(u)}$ *опукла вниз,* $\lim\limits_{u\to\infty} g(u) = 0$ *і виконуються умови* $g(n)\ln n = O(1)$, $g(n)\ln^+(\eta_{\psi}(n) - n) = O(1)$ *та*

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\psi(k)}{k} = o(\phi(n)).$$

Тоді при $n \to \infty$ *справедлива асимптотична рівність:*

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,\infty}, Z^{\phi}_n) = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\phi(n)\sum_{k=1}^{n-2}\frac{g(k)}{k} + O(\phi(n)).$$

В §1.3 вивчається поведінка величини $\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,\infty}, Z^{\psi}_n)$ при $\psi = \phi$. Доведена така теорема.

Теорема 1.7 *Нехай $\psi(\cdot) \in \mathfrak{M}_{\infty}$, $\psi(\cdot) = \phi(\cdot)$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді при $n \to \infty$:*
якщо $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mu(n) > n$, то

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,\infty}, Z^{\psi}_n) = M\psi(n)\ln n + O(1)\,\psi(n),$$
$$\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \le M \le \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| + \frac{4}{\pi^2},$$

якщо $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mu(n) \le n$, то

$$\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\psi(n)\ln n + O(1)\,\psi(n) \le$$
$$\le \mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,\infty}, Z^{\psi}_n) \le \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\psi(n)\ln n + \frac{4}{\pi^2}\psi(n)\ln\mu(n) + O(1)\,\psi(n).$$

В §1.4 та §1.5 вивчаються величини відхилень аналогів сум Зігмунда від функцій з класів $C^{\psi}_0 H_{\omega}$ та $C^{\psi}_{\beta} H_{\omega}$. Одержані такі теореми.

Теорема 1.8 *Якщо $\sin\frac{\beta\pi}{2} = 0$, $\psi \in \mathfrak{M}_{\infty}$, то при $n \to \infty$*

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_0 H_{\omega}, Z^{\psi}_n) =$$
$$= \begin{cases} \frac{2\theta}{\pi}\,\psi(n)\displaystyle\int_0^{/2}\omega(2t)\,dt + o(1)\,\psi(n), \\ \qquad \omega(\frac{1}{n})\ln(\min(n,\mu(n))) = o(1), \\ \frac{2\theta}{\pi^2}\,\psi(n)\ln(\min(n,\mu(n)))\displaystyle\int_0^{\pi/2}\omega(\frac{2t}{n})\sin t\,dt + O(1)\,\psi(n), \\ \qquad \omega(\frac{1}{n})\ln(\min(n,\mu(n))) \to \infty, \end{cases}$$
$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_0 H_{\omega}, Z^{\psi}_n) = O(1)\,\psi(n),$$
$$\omega(\frac{1}{n})\ln(\min(n,\mu(n))) = O(1),$$

де $\frac{2}{3} \le \theta < 1$.

Теорема 1.9 *Нехай $\sin\frac{\beta\pi}{2} \ne 0$, $\psi \in \mathfrak{M}_{\infty}$, $\psi = \phi$. Якщо $\int_{\pi/n}^{1}\frac{\omega(t)}{t}\,dt \le K$, то при $n \to \infty$*

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta} H_{\omega}, Z^{\psi}_n) = O(1)\psi(n);$$

якщо

$$\omega(\frac{1}{n}) \ln \min(\mu(n), n) = o\Big(\int\limits_{\pi/n}^{\pi/2} \frac{\omega(2t)}{t}\, dt\Big),$$

то

$$\mathcal{E}_n(C^\psi_\beta H_\omega, Z^\psi_n) = \frac{\theta}{\pi}\Big|\sin\frac{\beta\pi}{2}\Big|\psi(n) \int\limits_{\pi/n}^{\pi/2} \frac{\omega(2t)}{t}\, dt +$$

$$+ O(1)\psi(n)\Big[1 + \omega(\frac{1}{n}) \ln(\min(\mu(n), n))\Big]$$

В другому розділі вивчається наближення функцій класів $\widehat{C}^\psi_{\beta,\infty}$ узагальненими операторами Зигмунда. Встановлені оцінки верхніх меж відхилень

$$\mathcal{E}_\sigma(\widehat{C}^\psi_{\beta,\infty}, Z^\psi_\sigma(f,x))_C = \sup_{f\in\widehat{C}^\psi_{\beta,\infty}} \|\rho_\sigma(f,x)\|_C = \sup_{f\in\widehat{C}^\psi_{\beta,\infty}} \|f(x) - Z^\psi_\sigma(f,x)\|_C,$$

що є узагальненням теореми 1.7 розділу 1.

Визначаються класи функцій $\widehat{L}^\psi_\beta$, введені О.І.Степанцем (Приближение целыми функциями в равномерной метрике // Приближения целыми функциями на действительной оси.—Киев, 1988.—С. 3-41.—(Препр / АН УССР. Ин-т математики; 88.27)).

Нехай $\widehat{L}_p$, $p \geq 1$, — множина функцій $\phi(x)$, заданих на всій дійсній осі $\mathbb{R}$, які мають скінченну норму $\|\phi\|_{\hat{p}}$,

$$\|\phi\|_{\hat{p}} = \sup_{x\in\mathbb{R}}\Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\phi(t+x)|^p\, dt\Big)^{1/p},$$

$\|\phi\|_{\hat{\infty}} = \|\phi\|_M = \operatorname{ess\,sup} |\phi(t)|$, тобто $\hat{L}_\infty = M$.

Нехай функція $\psi(v)$ опукла вниз при $v \geq 1$ та $\psi(v) \to 0$ при $v \to \infty$. Множину таких функцій позначимо через $\mathfrak{M}$. На відрізок $[0,1]$ $\psi(v)$ продовжена так, щоб функція (яку ми знову позначимо через $\psi(v)$) була неперервною при всіх $v \geq 0$, $\psi(0) = 0$, а її похідна $\psi'(v) = \psi'(v+0)$ мала обмежену варіацію на $[0,\infty)$. Множину таких функцій позначимо через $\mathfrak{A}$. Далі нехай

$$\hat{\psi}(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \psi(v) \cos(vt + \frac{\beta\pi}{2})\, dv,$$

де β — фіксоване дійсне число.

Через $\hat{L}^{\psi}_{\beta}$ позначимо множину функцій $f \in \hat{L}_1$, які майже для всіх $x \in \mathbb{R}$ зображаються рівністю

$$f(x) = A_0 + \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x+t)\hat{\psi}(t)\,dt, \tag{6}$$

де A_0 — деяка стала, $\phi \in \hat{L}_1$, а інтеграл розуміється як границі інтегралів $\lim \int_{-a}^{a}(\ \ )$. Якщо $f \in \hat{L}^{\psi}_{\beta}$ і при цьому $\phi \in \mathfrak{N}$, де $\mathfrak{N}$ — підмножина функцій із $\hat{L}_1$, то будемо писати $f \in \hat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. Підмножина неперервних функцій із $\hat{L}^{\psi}_{\beta}$ та $\hat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ позначається відповідно через $\hat{C}^{\psi}_{\beta}$ та $\hat{C}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$.

Якщо $\mathfrak{N}$ співпадає з множиною M суттєво обмежених функцій $g(x)$, що задовольняють умову $\operatorname{ess\,sup}|g(x)| \leq 1$, то клас функцій $\hat{C}^{\psi}_{\beta} M$ позначають через $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$.

Якщо $\phi(\cdot)$ — 2π-періодична сумовна функція, то в цьому випадку $\hat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ та $\hat{C}^{\psi}_{\beta}$ співпадають відповідно з класами $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ та $C^{\psi}_{\beta,\infty}$. В періодичному випадку, якщо виконано (6), то майже скрізь $\phi(\cdot) = f^{\psi}_{\beta}(\cdot)$.

В зв'язку з цим кожну функцію, еквівалентну функції ϕ із (6), так само як і в періодичному випадку називають (ψ,β)-похідною функції $f(\cdot)$ і позначають $f^{\psi}_{\beta}(\cdot)$.

Якщо $\mathfrak{N} = M$ і $\|f\|_{\hat{\infty}} \leq 1$, то клас неперервних функцій позначають $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$, якщо ж $f \in \hat{L}^{\psi}_{\beta}$ і $\|f^{\psi}_{\beta}\|_{\hat{1}} \leq 1$, то такий клас позначають $\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}$.

Агрегатами наближення для $f \in \hat{C}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, і, зокрема, для $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ будуть функції $U_\sigma(f,x)$:

$$\begin{aligned} U_\sigma(f,x) &= U_\sigma(f;x,\Lambda) = \\ &= A_0 + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta}(x+t)\int_{0}^{\infty}\psi(v)\lambda_\sigma(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\,dt, \end{aligned} \tag{7}$$

де $\Lambda = \{\lambda_\sigma(v)\}$ — сім'я функцій, неперервних при всіх $v \geq 0$, що залежать від дійсного параметра σ. $U_\sigma(f,x,\Lambda)$ є цілою функцією експоненціального типу $\leq \sigma$.

О.І.Степанець (Приближение целыми функциями в равномерной метрике // Приближения целыми функциями на действительной оси—Киев, 1988.—С. 3-41.—(Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 88.27)) досліджував властивості класів $\widehat{C}_{\beta}^{\psi}\mathfrak{N}$ та поведінку верхніх меж відхилень операторів Фур'є $F_{\sigma}(f,x)$ на цих класах.

Оператори Фур'є задаються за допомогою сім'ї функцій

$$\lambda_{\sigma}(v) = \begin{cases} 1, & 0 \le v \le c, \\ \frac{\sigma - v}{\sigma - c}, & c \le v \le \sigma, \\ 0, & v \ge \sigma. \end{cases}$$

В періодичному випадку $F_{\sigma}(f,x)$ є суми Фур'є порядку $[\sigma]-1$.

Якщо $\lambda_{\sigma}(v)$ має вигляд

$$\lambda_{\sigma}(v) = \begin{cases} 1 - v\frac{\psi(\sigma)}{\psi(1)}, & 0 \le v \le 1, \\ 1 - \frac{\psi(\sigma)}{\psi(v)}, & 1 \le v \le \sigma, \\ 0, & v \ge \sigma, \end{cases} \tag{8}$$

то (7) називають узагальненим оператором Зигмунда і позначають $Z_{\sigma}^{\psi}(f,x,\Lambda)$.

В §2.2 доведено такі теореми.

Теорема 2.1 *Нехай $\beta \in \mathbb{R}$, $\psi \in \mathfrak{A}_C \cup \mathfrak{A}_{\infty}$. Тоді:*
якщо $\mu(\sigma) \le \sigma\ \forall \sigma \ge 1$, то

$$\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\psi(\sigma)\ln\sigma + O(1)\psi(\sigma) \le \mathcal{E}_{\sigma}(\widehat{C}_{\beta,\infty}^{\psi}, Z_{\sigma}^{\psi}) \le$$
$$\le \frac{2\psi(\sigma)\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi}\ln\sigma + \frac{4}{\pi^2}\psi(\sigma)\ln\mu(\sigma) + O(1)\psi(\sigma), \qquad \sigma \to \infty.$$

якщо $\mu(\sigma) \ge \sigma\ \forall \sigma \ge 1$, то

$$\frac{4}{\pi^2}\psi(\sigma)\ln\mu(\sigma) + O(1)\psi(\sigma) \le \mathcal{E}_{\sigma}(\widehat{C}_{\beta,\infty}^{\psi}, Z_{\sigma}^{\psi}) \le$$
$$\le \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\ln\sigma + \frac{4}{\pi^2}\ln\mu(\sigma) + O(1)\psi(\sigma), \qquad \sigma \to \infty.$$

Наслідок 2.1 *Якщо $\mu(\sigma) = O(1)$, то при $\sigma \to \infty$*

$$\mathcal{E}_{\sigma}(\widehat{C}_{\beta,\infty}^{\psi}, Z_{\sigma}^{\psi}) = \frac{2\psi(\sigma)}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\ln\sigma + O(1)\psi(\sigma).$$

Теорема 2.2 *Нехай* $\sin\frac{\beta\pi}{2}=0$. *Тоді при* $\sigma\to\infty$ *справедлива така асимптотична рівність:*

$$\mathcal{E}_\sigma(\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}, Z^{\psi}_{\sigma}) = \frac{4}{\pi^2}\,\psi(\sigma)\ln\mu(\sigma) + O(1)\,\psi(\sigma).$$

Я висловлюю щиру подяку науковому керівнику Олександру Івановичу Степанцю за постановку задач, постійну увагу та допомогу в роботі.

Основні положення дисертації опубліковані в наступних роботах:

[1] Островская О.В. Приближение классов непрерывных периодических функций обобщенными суммами Зигмунда // Исследования по теории приближения функций.—Киев: Ин-т математики АН УССР, 1991.—С. 57-71.

[2] Островская О.В. Приближение классов периодических функций обобщенными суммами Зигмунда в метрике C // Ряды Фурье: теория и приложения.—Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992.—С. 69-87.

[3] Островська О.В. Наближення класів неперервних функцій операторами Зигмунда // Наближення класів неперервних функцій, заданих на дійсній осі.—Київ, 1994.—С.1-15.—(Препр/АН України. Ін-т математики; 94.5).

Остр

ЛНБ ім. В. Стефаника
АН України

Підп. до друку 30.03.94. Формат 60×84/16. Папір друк. Офс. друк. Ум. друк. арк. 0,93. Ум. фарбо-відб. 0,93. Обл.-вид. арк. 0,6. Тираж 100 пр. Зам. 91 Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики АН України 252601 Київ 4, ГСП, вул. Терещенківська, 3.

162681

Ав 29.848