ДНІПРОПЕТРОВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ

На правах рукопису

ЛЕВКОВИЧ Ольга Олексіївна

ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ СПРЯЖЕНОГО ТЕПЛОМАСООБМІНУ У ЕЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦІЙ

Спеціальність 05.13.16 - Використання обчислювальної техніки, математичного моделювання та математичних методів у наукових дослідженнях

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Лев

Дніпропетровськ 1994

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у відділі механіки іонізованих газів Інституту технічної механіки Академії Наук України.

Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук старший науковий співробітник **Шмукін О.О.**

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор **О.І.Єгоров**

кандидат фізико-математичних наук, доцент **О.А.Приходько**

Провідна установа: Київський державний університет імені Тараса Шевченка

Захист відбудеться "26" травня 1994 р. о 15.00 год. на засіданні спеціалізованої Вченої Ради К 03.01.02 при Дніпропетровському державному університеті за адресою: 320044, м. Дніпропетровськ-44, пр. К.Маркса 35, Дніпропетровський державний університет, факультет прикладної математики, корп. 3, ауд. 42.

З дисертацією можна ознайомитися у науковій бібліотеці Дніпропетровського держуніверситету.

Автореферат розісланий "22" квітня 1994 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради
кандидат фіз.-мат. наук, доцент В.А.Турчіна

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ.

Актуальність теми. Сучасний етап розвитку досліджень у таких галузях, як енергетика, двигунобудування, авіабудування, вимагають рішення широкого кола теплофізичних задач, проведення експериментальних досліджень по обробці теплових режимів агрегатів та систем в умовах, близьких до натурних. Проблеми взаємодії високоентальпійних струмів газу з поверхнями матеріалів мають важливе значення тому, що примежові проблеми для багатьох наук: аеродинаміки, фізики твердого тіла, теплофізики та інших явищ взаємодії гарячого газу з теплозахисним матеріалом пов'язані з протіканням численних і взаємопов'язаних процесів. У зв'язку з цим існує потреба в розробці алгоритмів рішення так званих спряжених задач, в яких на відміну від традиційного підходу тепломасообмін твердого тіла з струменем рідини розглядається як взаємозв'язана задача переносу тепла та маси у рідині та твердих тілах. Такий підхід вимагає використання як межових умов природних умов спряження температурних та концентраційних полів на межі розділу тіла з носієм (межові умови ІУ-го роду) . Будування теорії та методів розв'язання у такій постановці (спряжених задач) пов'язано із значними труднощами. Це обумовлено необхідністю врахування багатьох взаємопов'язаних процесів у системі газ-поверхня та нелінійним характером рівнянь з частинними похідними різних типів. Рішення цієї проблеми у загальному випадку грунтується на сумісному розв'язанні систем диференціальних рівнянь Нав'є-Стокса та рівняння енергії.

За останні роки досягнуто значних успіхів у розвитку методів рішення спряжених задач тепло-і масообміну (роботи А.М.Гришина, Н.І.Никитенка, А.Ш.Дорфмана, Л.О.Коздоби, О.А.Рядно та інші) . Різноманітність постановок приводить до необхідності будування уніфікованих алгоритмів, дозволяючих підвищити інформативність одержаних результатів.

Розвиток методів розв'язання задач у спряженій постановці теплообміну обумовлений потребою інженерної практики при створенні елементів конструкцій, деталей машин та енергетичних установок. Переважна більшість робіт, присвячених розв'язанню задач у спряженій постановці, використовують скінченні різниці, що може приводити до труднощів, пов'язаних з стійкістю розв'язків у випадку використання центрально-різницевої апроксимації. Збудовані алгоритми базуються на чисельно-аналітичному методі.[ж]

Суть чисельно-аналітичного методу полягає у тому, що рішення рівнянь з частинними похідними приводиться до рішення системи рівнянь у повних диференціалах у формі Коші. При чисельно-аналітичному способі дискретизації у околі вузлів сітки функція неперервного аргументу зображається у замкнутому поліноміальному вигляді редукованими відрізками рядів Тейлора. Максимальні степені рядів та порядок системи рівнянь у повних диференціалах взаємопов'язані через параметри редукування рядів Тейлора, які в свою чергу характеризують порядок чисельно-аналітичної апроксимації вихідних диференціальних рівнянь.

Мета роботи. Побудування уніфікованих алгоритмів розв'язку задач спряженого тепломасообміну, розробка чисельно-аналітичного методу для розрахунку в умовах змушеної та вільної конвекції, дослідження стійкості та ефективності розроблених алгоритмів в залежності від порядку апроксимації рівнянь та чисельно-аналітичного підходу, розв'язка конкретних практично важливих задач тепломасообміну у складних технологічних системах, створення на основі розроблених алгоритмів комплексу програм та проведення параметричних досліджень.

Наукова новизна роботи.

Застосовані математичні моделі спряженого тепломасообміну у порожнинах контейнера та у робочій зоні пресу безперервної дії.

Розроблені неявні чисельно-аналітичні схеми підвищеного порядку точності для розв'язку рівнянь в'язкого газу, маючі властивості консервативності та транспортивності. Збудовано особливі зв'язки замкнення високого порядку точності для функції вихор, введено початково-потокові зв'язки.

Збудовані уніфіковані алгоритми рішення застосованих спряжених задач тепломасообміну, у яких запропонований новий підхід зрощування температурних та концентраційних полів на межі розділу двох середовищ без пониження порядку точності використовуємої схеми.

Достовірність використовуемих математичних моделей вивчаємих процесів, розроблених алгоритмів та здобутих результатів визначається строгістю математичних припущень, порівнянням розрахункових даних з відомими експериментальними та розрахунковими результатами інших авторів.

ж Шмукин А.А. О численно-аналитическом методе решения задач механики жидкости и газа// Прикладные вопросы аэродинамики летательных аппаратов: - Киев: Наук. думка, 1984.- с. 87-93.

Практична цінність роботи полягає у розробці математичних моделей, створенні універсальних алгоритмів та комплексів програм розв'язку ряду складних промислових задач тепломасообміну у робочій зоні пресу безперервної дії при ламінуванні деревинно-стружкових плит та у порожнинах, заповнених вологим повітрям, які співторкаються з вологомісткими елементами конструкцій. Розроблені чисельно-аналітичні алгоритми мають властивості аналітичних розв'язків, дозволяючих звести систему диференціальних рівнянь з частинними похідними до системи звичайних диференціальних рівнянь, які легко розв'язуються на ЕОМ, мають уніфіковану обчислювальну схему, модульний принцип побудування. Результати досліджень використовуються на підприємствах та в організаціях м. Дніпропетровська, а саме завод Пресів та Конструкторське бюро " Південне".

Апробація роботи. Основні положення та результати роботи доповідалися та обговорювались на П,Ш Міжвідомчих конференціях по прикладній аеродинаміці (м.Дніпропетровськ, 1983,1986р.р.) , Всесоюзній нараді по аналітичним методам розрахунку процесів тепло-і масопереносу(Душанбе, 1986) , Всесоюзному семінарі по тепломасообміну та гідродинаміці тонких струменів в'язкої рідини (Дніпропетровськ, 1989) , Всесоюзній школі-семінарі по механіці рідини, газу та плазми (Москва, 1991,1992р.р.) , на наукових семінарах Інституту технічної механіки АН України (Дніпропетровськ, 1982-1993) , на Вченій раді ІТМ АН України (Дніпропетровськ, 1994).

Публікації. Головні результати дисертації опубліковані у 10 друкованних роботах.

Структура та обсяг роботи. Дисертаційна робота складається з вступу, трьох розділів, висновка, списку літератури, додатку та вміщає 219 с., включає 153 с. машинописного тексту, 48 мал. та 18 табл.

У списку літератури приведено 87 найменувань, у додатку вміщений текст розробленого комплексу програм.

ЗМІСТ РОБОТИ.

У вступі обгрунтована актуальність дисертаційної роботи, дано аналіз сучасного стану питань, пов'язаних з чисельними рішеннями спряжених задач, сформульовані її цілі та головні положення, які виносяться на захист, дано коротку анотацію змісту усіх розділів дисертації.

У першому розділі розглянуто математичні моделі, які описують спряжений тепло-та масообмін при обтіканні пластини неізотермічним потоком газу в нестаціонарній постановці та дослідження тепломасообміну в прямокутній замкненій області при умові спряження на межах розділу рідина-тверде тіло. Дано короткий облік методів розв'язання поставлених задач та обгрунтовано чисельно-аналітичний підхід до їх розв'язання. Чисельно-аналітичний метод дозволяє разом розв'язувати задачу тепломасообміну для потоку та твердого тіла.

Далі у першому розділі запропоновані декілька варіантів чисельно-аналітичного підходу до розв'язання рівнянь в'язкого газу та рівнянь теплопровідності. Збудовані схеми випробувані на модельних прикладах, розрахунки яких порівнювались з результатами інших авторів.

Одним із запропонованих методів є чисельно-аналітичний метод підвищеної точності. Побудування цього алгоритму зводиться до того, що системі диференціальних рівнянь з частинними похідними в області часу становиться в відповідність еволюційна система звичайних диференціальних рівнянь у формі Коші. Значна увага приділена дискретизації рівняння Пуасона для функції струму. Рівняння Пуасона для функції струму у основній системі розв'язується окремо від рівнянь для функції вихор.
Удосконалення цього елементу основної схеми грає особливу роль у зв'язку з необхідністю багаторазового, на кожному часовому кроці, розв'язування стаціонарного рівняння еліптичного типу. Після чисельно-аналітичної дискретизації системи рівнянь Навье- Стокса у змінних функціях струму - вихор приймає вигляд

$$\begin{cases} \frac{1}{DT1}\left[\omega_{p,n+1}^{\vartheta,k+1} + \omega O_{p,n+1}^{\vartheta,k+1}\right] + DKA_{p,n+1}^{\vartheta,k+1} = \frac{1}{Re} D\Gamma A_{p,n+1}^{\vartheta,k+1}, & (1) \\ \frac{(n+1)(n+2)}{DY2}\Psi_{p,n+3}^{\vartheta,k+1} + \frac{(k+1)(k+2)}{DX2}\Psi_{p,n+1}^{\vartheta,k+3} = \omega_{p,n+1}^{\vartheta,k+1}, & (2) \end{cases}$$

де

$$DKA_{p,n+1}^{\vartheta,k+1} = \frac{(k+1)}{DX1} u\omega_{p,n+1}^{\vartheta,k+2} + \frac{(n+1)}{DY1} V\omega_{p,n+2}^{\vartheta,k+1}, \quad p=\overline{1,2m-1}. \qquad (3)$$

$$D\Gamma A_{p,n+1}^{\vartheta,k+1} = \frac{(k+2)(k+1)}{DX2}\omega_{p,n+1}^{\vartheta,k+3} + \frac{(n+2)(n+1)}{DY2}\omega_{p,n+3}^{\vartheta,k+1}, \quad \vartheta=\overline{1,2D-1} \qquad (4)$$

m, D - параметри розбивання області по просторовим змінним;
$n=\overline{0,N-2},\ k=\overline{0,M-2}$ - цілочисловий аргумент схеми;
N, M - числа цілі, відповідні параметрів редукування.

Введення в розв'язувальний алгоритм функціонально-струмових зв'язків дозволяє побудувати таку сім'ю схем, в якій враховується повна сукупність умов однозначності для складових вектора швидкості. Граничні умови враховуються через замикальні зв'язки, які задовольняють системі алгебраїчних рівнянь при $N = M = 5$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ N & (N-1) & (N-2) & (N-3) \\ N & -(N-1) & (N-2) & -(N-3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{\vartheta,K+1}_{p,N+1} \\ A^{\vartheta,K+1}_{p,N} \\ A^{\vartheta,K+1}_{p,N-1} \\ A^{\vartheta,K+1}_{p,N-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F1 \\ F2 \\ F3 \\ F4 \end{bmatrix}, \qquad (5)$$

де $A^{\vartheta,K+1}_{p,n+1}$ – узагальнені змінні, які приймають значення Ψ, ω.

Для функції вихор будуються кінцевомірні аналоги у вигляді рівнянь (I). Сукупність замикальних зв'язків для конвективних доданків в рівнянні вихора враховує умови транспортивності, а саме перенесення фізичної субстанції тільки у напрямку складових вектора швидкості.

Умови транспортивності у схемі визначаються знаком компонент вектора u і v

$$\begin{cases} \beta_x = -I, \text{ якщо } u > 0, \\ \beta_y = -I, \text{ якщо } v > 0, \\ \beta_x = I, \text{ якщо } u < 0, \\ \beta_y = I, \text{ якщо } v < 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Схеми, які мають параметри транспортивності, дозволяють підвищити якість апроксимації частинних похідних на двоточковому шаблоні за рахунок притягнення у процедуру переносу збурення функцій та їх градієнтів. Для дискретизації конвективних диференціальних операторів запропоновано застосувати замикальні зв'язки, які задовольняють умовам

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{N} \beta_y^{n} v\omega^{\vartheta,K+1}_{p,n+1} = v\omega^{\vartheta,K+1}_{p+\beta_y,1} \\ \sum\limits_{n=1}^{N} n\beta_y^{n-1} v\omega^{\vartheta,K+1}_{p,n+1} = v\omega^{\vartheta,K+1}_{p+\beta_y,2} \end{cases} \qquad (7)$$

Побудовано особливі замикальні зв'язки для функції вихор. Особливість постановки межових умов для рівнянь Нав'є-Стокса у змінних функціях струму – вихор полягає у тому, що вони задані для функції струму і формально не задані для функції вихор. Побудова межових умов для функції вихор виходить з чисельно-аналітичних аналогів (I) після проектування їх на межові поверхні.

$$y=0,\ \omega^{\vartheta,K+1}_{0,1}(\tau) = \left[\frac{(K+1)(K+2)}{DX2}\Psi^{\vartheta,K+3}_{0,1} + \frac{1}{DY2}\left(2\Psi^{\vartheta,K+1}_{1,3} - 6\Psi^{\vartheta,K+1}_{1,4} + 12\Psi^{\vartheta,K+1}_{1,5} - 20\Psi^{\vartheta,K+1}_{1,6}\right)\right] \qquad (8)$$

$$\vartheta = \overline{1, 2D-1},$$

$$y=y_e,\ \omega^{\vartheta,K+1}_{2m,1}(\tau) = \left[\frac{(K+1)(K+2)}{DX2}\Psi^{\vartheta,K+3}_{2m,1} + \frac{1}{DY2}\left(2\Psi^{\vartheta,K+1}_{2m-1,3} + 6\Psi^{\vartheta,K+1}_{2m-1,4} + 12\Psi^{\vartheta,K+1}_{2m-1,5} + 20\Psi^{\vartheta,K+1}_{1,6}\right)\right], \quad \vartheta = \overline{1, 2D-1}.$$

На відміну від відомих схем (Полежаєв, Роуч) побудована схема є чисельно-аналітичною, у якої передача інформації від межі у внутрішні вузли сіткової області передається по самій функції та її градієнтам.

Ефективність розробленої схеми демонструється на прикладі чисельного моделювання течії в каверні з рухомою кришкою. Ця задача- одне з перших застосувань чисельних методів для рівнянь Нав'є-Стокса.

На мал. I зображено профілі поздовжної складової вектора швидкості для чисел Re = I,I00,400 (сітка 27x27) . Результати порівнювались з розв'язками з роботи Білова. Розрахунки, здобуті чисельно-аналітичним методом на рівномірній сітці (27x27) при числі Re = 400, збігаються з рішеннями з роботи Білова, які були здобуті на "гібридній" сітці 60x60. Це дає можливість говорити про те, що чисельно-аналітичний метод має більш високий порядок, ніж метод у застосованій роботі. Наступна серія малюнків 2-4 ілюструє течії у порожнині, у якій швидкість має значення

$$u(x) = -16\,x^2(1-x^2)\,. \qquad (9)$$

На мал. 3,4 приведено ізолінії функції струму та ізолінії вихору для випадку Re = 400 ($m = d$ = I0) . Результати порівнювались з тестовими розрахунками з роботи Р.Пейре,Т.Д.Тейлора. На мал. 2 приведено профілі швидкості $u(0{,}5\,,\,y)$, які отримано різноманітними чисельно-аналітичними схемами. З малюнку видно, що результати розрахунків відповідають чисельним експериментам по схемам, приведеним у застосованій роботі. Точність цих результатів можливо оцінити шляхом їх порівняння з даними розрахунків, у яких використано ермітов метод четвертого порядку точності (Бонту та ін.I978) , який вважається еталонним.

Другим більш перспективним методом є чисельно-аналітичний метод розщіплення, який використовує концепцію дискретизації методу прямих. Проводячи розщіплення диференціального рівняння та використовуючи чисельно-аналітичну дискретизацію по одній з просторових змінних та по часу, одержуємо систему диференціальних рівнянь у повних похідних

$$\varphi''(\xi) - A(\xi)\cdot\varphi'(\xi) - D(\xi)\cdot\varphi(\xi) = -F(\xi)\,. \qquad (I0)$$

Інтеграл диференціального рівняння (I0) застосовується у вигляді

$$\varphi(\xi) = C\cdot e^{\beta_1\xi} + \Gamma\cdot e^{\beta_1\xi} + \varphi^*(\xi)\,, \qquad (II)$$

де $\varphi^*(\xi)$ - частинне рішення, для побудови якого приймаються квадратичні залежності; Γ, C - константи інтегрування,визначені з умов

$$\varphi(\xi)\Big|_{\xi=\xi_{P\pm1}} = \varphi_{P\pm1,1}\,, \qquad (I2)$$

P - індекс, який відповідає номерам вузлів по змінним x чи y ..

Після визначення констант інтегрування C та Γ рішення (II) при $\xi = \xi_p$ перетворюється у систему алгебраічних рівнянь у векторної формі, маючих трьохціагональну структуру

$$\Gamma_p \cdot \varphi_{p+1,1} - \varphi_{p,1} + C_p \cdot \varphi_{p-1,1} = F_p . \qquad (13)$$

Обернення системи (I3) віцбувається методом прогонки.

При такій постановці кінцевомірні аналоги рівнянь з частинними похідними мають властивості як консервативності, так і транспортивності. Перевагами даної схеми є те, що вона: полуаналітична, умови транспортивності враховуються автоматично в наслідку представлення розв'язку у аналітичному вигляді, схема симетрична (у неї X та Y змінюються місцями від першого дробового кроку до другого), це дозволяє уніфікувати алгоритм та зменшити час розрахунку.

Даний алгоритм відтестований на прикладі чисельного моделювання течії у порожнині з рухомою кришкою та на прикладі теплової гравітаційної конвекції у прямокутній замкненій області.

Третім із розроблених алгоритмів є чисельно-аналітичний метод розв'язання рівнянь теплопровідності, заснований на методі редукування рядів. Суть цього методу полягає у наступному: після чисельно-аналітичної дискретизації рівняння теплопровідності зводиться до системи у повних диференціалах другого порядку. Далі, апроксимуючи рішення степеневими рядами, зводимо двоточкову задачу до еквівалентної задачі Коші, довизначив недостаючи умови.

Апробацію даного алгоритму проведено на прикладі рішення двовимірного стаціонарного рівняння теплопровідності. Результати розрахунків порівнювалися з точним рішенням.Порівняння дає, що відносна похибка не перебільшує 0,I%.

<u>У другому розділі</u> збудовано чисельно-аналітичні схеми різноманітного порядку апроксимацій рівнянь примежового шару для в'язкої нестисливої та стисливої рідини у стаціонарній та нестаціонарній постановці. Базуючись на цих схемах, розроблено алгоритми рішення спряжених задач теплообміну при обтіканні неізотермічних тіл. Розв'язання спряжених задач зводиться до сумісного рішення рівнянь примежового шару, рівнянь енергії та теплопровідності при межових умовах 4-го роду на межі двох середовищ.

Процес теплообміну плоского тіла з зовнішним середовищем в межах теорії примежового шару описується системою диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 , \qquad (14)$$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(T)\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x \beta (T - T_\infty), \qquad (15)$$

$$\rho c\left(\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\mu(T)\frac{\partial u}{\partial y}. \quad (16)$$

Розподіл температури у пластині описується рівняннями теплопровідності

$$C_v(T)\frac{\partial T}{\partial \tau}=\lambda(T)\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial \lambda(T)}{\partial T}\left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2\right]. \quad (17)$$

У якості умов однозначності візьмемо

$$U|_{\tau=0}=U_0(x,\tau),\quad V|_{\tau=0}=V_0(x,y),\quad T|_{\tau=0}=T_0(x,y), \quad (18)$$

$$U|_{x=0}=U_w(y,\tau),\quad V|_{x=0}=V_w(y,\tau),\quad T|_{x=x_0}=T_w(y,\tau), \quad (19)$$

$$\begin{cases} U|_{y=0}=U_w(x,\tau), & V|_{y=0}=V_w(x,\tau),\\ U|_{y=\infty}=U_e(x,\tau), & U|_{y=\infty}=V_e(x,\tau). \end{cases} \quad (20)$$

На межі у системі рідина-тверде тіло задаємо межові умови 4-го роду

$$T|_{y=0}=T_1|_{y=y_e},$$
$$-\lambda_T\frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0}=-\lambda\frac{\partial T_1}{\partial y}\Big|_{y=y_e}. \quad (21)$$

Згідно з методом чисельно-аналітичної дискретизації диференціальної задачі у частинних похідних ставиться у відповідність сім'я чисельно-аналітичних схем, заданих системою диференціальних рівнянь у повних похідних (СЗДР) /2/.

$$U'^{\,\vartheta,k+1}_{p,n+1}(\tau)=\left(DГИ^{\vartheta,k+1}_{p,n+1}(\tau)+DDИ^{\vartheta,k+1}_{p,n+1}(\tau)-DKИ^{\vartheta,k+1}_{p,n+1}(\tau)\right), \quad (22)$$

де U – чисельно-аналітична компонента існуючого вектора функції; $DГИ$, $DDИ$, $DKИ$ – дискретні аналоги кондуктивної, дисипативної та конвективної составної закону збереження імпульсу, енергії та ін.; n, k – цілочисельні аргументи, характеризуючі якість апроксимації по просторовій змінній, $n=\overline{0,N}$, $k=\overline{0,M}$ $(N,M\in Z)$.

Для СЗДР (22) ставиться задача з початковими умовами

$$U^{\vartheta,k+1}_{p,n+1}(\tau)\Big|_{\tau=\tau_0}=\varphi^{\vartheta,k+1}_{p,n+1}, \quad (23)$$

де праві частини – відомі компоненти початкової вектор-функції. Питання використання умов на межі області за у місцях спряження полів на основі межових умов четвертого роду, а також технології переходу від розрахунків у внутрішних точках до межових у стандартній сім'ї схем (22) відбувається через замикальні зв'язки. Наприклад, по координатному напрямі y маємо

$$\left\{\begin{matrix} U^{\vartheta,k+1}_{p,N+1}(\tau)\\ U^{\vartheta,k+1}_{p,N}(\tau)\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\left[U^{\vartheta,k+1}_{p+1,1}(\tau)\pm(-1)^N U^{\vartheta,k+1}_{p-1,1}(\tau)\right]-\sum_{n=0}^{N-2}\varphi^{\pm}_n U^{\vartheta,k+1}_{p,n+1}(\tau) \quad (24)$$

де $\varphi^{\pm}_n=1\pm(-1)^{N+n}$, $p=\overline{1,2m-1}$, $\vartheta=\overline{1,2D-1}$; $D,m\in Z$ цілочисельний параметр, характеризуючий густину вузлів сітки по y та x; $U^{\vartheta,k+1}_{0,1}$, $U^{\vartheta,k+1}_{2m,1}$ – компоненти межових функцій.

Замикальні зв'язки для визначення компонент $\theta_{p,N}$, $\theta_{p,N+1}$ знаходяться з умов спряження (21)

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ (NR_{1,2}+1) & [(N+1)R_{1,2}+1] & 1 & -1 \\ 1 & (N-1)/N & -B_{1,2} & \frac{N-1}{N}B_{1,2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{2m-1,N+1}(x) \\ T_{2m-1,N}(x) \\ \theta_{1,N+1}(x) \\ \theta_{1,N}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1,N+1}(x) \\ F_{1,N}(x) \\ F_{2,N+1}(x) \\ F_{2,N}(x) \end{bmatrix}, \quad (25)$$

де $R_{1,2} = 0, \ B_{1,2} = \lambda_0/\lambda \cdot DT1/DY1$.

Провоцячи чисельно-аналітичну дискретизацію стаціонарного рівняння теплопровідності, одержимо

$$T^{n}_{p,n+1}(x) = -\frac{(n+1)(n+2)}{DY2} T_{p,n+3}(x) + W_{p,n+1}, \ n=\overline{0,N-2}, N=3,5,\ldots \quad (26)$$

Таким чином, розв'язання спряженої задачі у постановці (I4)-(2I) зведено до інтегрування СЗДР у формі Коші та рівняння (26) у формі двоточкової крайової задачі. Інтегрування відбувається методом Ейлера.

Алгоритм випробувано на модельних прикладах обтікання плоскої пластини та круглого циліндра у стаціонарній та нестаціонарній постановках. Розрахунки поля температур зовнішнього середовища проводились з врахуванням умови спряження та без неї для нестисливої та стисливої течії. Порівняння розрахунків показують, що використання межових умов I,П,Ш роду приводить до істотних похибок. Одержані результати порівнювались з точним рішенням з роботи Г.Шліхтінга, відносна похибка не перевищує 0,1%.

При розв'язанні спряжених задач у постановці, заснованій на сумісному рішенні рівнянь примежового шару, енергії та теплопровідності, спіткаємось з рядом математичних труднощів, обумовлених різнотипністю рівнянь (рівняння примежового шару мають параболічний тип, а рівняння теплопровідності по змінній x - еліптичний тип) . Це приводить до необхідності розглядати різноманітні спрощення, або багатократному ітерірованню на кожному кроці інтегрування. Тому, для уникання цих труднощів доцільно використовувати математичні моделі, засновані на повних рівняннях Нав'є-Стокса.

<u>Третій розділ</u> присвячено розв'язанню реальних практичних задач, математичні моделі яких базуються на розв'язанні рівнянь Нав'є-Стокса у наближенні Бусінеску.

Використовуючи розроблені чисельно-аналітичні схеми, здобуто чисельні моделі спряженого тепло-та вологопереносу у порожнинах системи, заповнених вологим повітрям, які співторкаються з вологомісткими елементами конструкцій, та у робочій зоні пресу безперервної дії, які застосовуються у сучасних технологічних процесах.

Система рівнянь Нав'є - Стокса у наближенні Бусінеску у змінних функція струму-вихор має вигляд

$$\Delta\Psi = \omega \quad (27)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} + DKA = BA \cdot D\Gamma A - FA , \tag{28}$$

$$A = \begin{Bmatrix} T \\ c \\ w \end{Bmatrix}, \quad BA = \begin{Bmatrix} 1/(Re \cdot Pr) \\ 1/(Re \cdot Sr) \\ 1/Re \end{Bmatrix}, \tag{29}$$

$$DKA = \frac{\partial}{\partial x}(UA) + \frac{\partial}{\partial y}(VA) , \tag{30}$$

$$D\Gamma A = \Delta A , \tag{31}$$

$$FA = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{Gr}{Re^2}\left(\sin\varphi \frac{\partial \theta}{\partial y} - \cos\varphi \frac{\partial \theta}{\partial x}\right) + \frac{GrD}{Re^2}\left(\sin\varphi \frac{\partial c}{\partial y} - \cos\varphi \frac{\partial c}{\partial x}\right) \end{Bmatrix}, \tag{32}$$

де w - функція вихор, Ψ - функція струму, останні позначення загально прийняті, θ - температура, C - концентрація.

У постановці (27) - (32) система вміщує рішення широкого класу задач тепломасообміну. Одним з найбільш важливих режимів, які описуються даною системою, є режим вільної конвекції двох типів: теплової та концентраційної. Другим режимом є змушена конвекція.

У якості умов однозначності для системи (27) - (32) необхідно задати початкові та межові умови. Межові умови включають межові умови для поля швидкості, для температури та концентрації. Розглянут задачи ставляться у спряженій постановці, а саме на межі розділу двох середовищ задаються умови спряження

$$\begin{cases} \theta|_{y=y_0} = T|_{y=y_e} \\ -\lambda_\theta \frac{\partial \theta}{\partial y}\Big|_{y=y_0} = -\lambda_T \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=y_e} \end{cases} \tag{33}$$

Дослідження тепло-та масопереносу у порожнинах системи, заповнених вологим повітрям, які співторкаються з вологомісткими елементами конструкцій, пов'язано з необхідністю забезпечення у них потрібної вологості. Актуальність проблеми обумовлена тим, що фізико-хімічні властивості багатьох матеріалів в умовах волого-та теплообміну мають неминучі зміни в бік погіршення властивостей та цей процес значно поширшується у присутності вологи. Існують технологічні припущення по вміщенню вологи у порожнині контейнера. У системі "Пенал-АП-виріб" у основному реалізується процес десорбції (віддачі) Визначальну роль у динаміці встановлення процесу десорбції мають режими вільної гравітаційної конвекції, яка реалізується у порожнинах конструкці , заповнених вологим повітрям.

Побудування алгоритму розв'язання даної задачи засновано на чисельно-аналітичному методі розщіплення, описаному у першому розділі. Задача тепло-та вологопереносу у системі " АП-порожнина-контейнер" сформульована як спряжена. Алгоритм зрощування температурних та концентраційних полів на межі розділу двох середовищ дозволяє ввести умови спряження без зниження порядку точності використуємої схеми.

Питання вірного вписання межових умов IУ роду у розв'язуючий алгоритм - одне з найбільш складних та важливих питань. У даній роботі запропоновано новий підхід прощування, в якому з розрахункової процедури виключено розв'язання задач тепло-та масообміну у твердому тілі. У такій постановці інформація про розв'язання цих задач вводиться через початкові прогоночні коефіцієнти для базової задачі. З цією метою вилучаються примежові вузли, які несуть інформацію з межі у розрішаючий алгоритм. Це дає можливість уніфікувати вибір межових умов у відповідності з поставленою задачею.

Таким чином, в результаті чисельного моделювання процесів тепло-та масообміну на ЕОМ показано, що перенос тепла, маси, вологи від АП до порожнечі контейнера залежить від чисел Грасгофа, Прандтля та геометричних факторів - відношення сторін області, а також від кута нахилу розташування області до сили ваги. Результати розрахунків зображено на мал. 5-7. Рішення порівнювались з даними з роботи Д.Ши. На мал. 5 (а,б,в) показано лінії струму при різноманітному розташуванні сили по вертікалі у режимі вільної гравітаційної конвекції. З малюнків видно, що течія та перенесення тепла суттєво залежать від кута нахилу сили ваги. На мал. 6,7 зображено ізолінії концентрації при змушеній (мал. 6) та вільній (мал. 7)конвекції. Розрахунки проводились при різноманітних числах Шмідта, коефіцієнти дифузії для вологих тіл та вологого повітря приймалися $1{,}56 \sim 2{,}88 \cdot 10^{5}$ відповідно, число Грасгофа $Gr = 10^{4}$.

Другою практичною задачею, розглянутою у даній роботі, є задача спряженого теплообміну у робочій зоні пресу безперервної дії, який знаходить широке вживання у сучасній технології готування деревинностружкових плит. Для облицьовування плит використовують декоративні плівки, які клеять до поверхні деревинно-стружкової плити під дією пресу безперервної дії. Технологія цього процесу має на увазі підтримання означеного температурного режиму. Теплопідвід до виробу у пресі відбувається від гріючої плити теплопередачею крізь повітряну подушку. Для проситування таких пресів необхідно мати оцінки теплового стану виробу у зоні пресування в залежності від геометричних та конструктивних параметрів пресу, швидкості подачі виробу.

Метою проведених досліджень є математичне моделювання теплопереносу крізь повітряну подушку у двохстрічковому пресі безперервної дії, характер теплообміну у якому дуже різноманітний (вільна та змушена конвекція). Тому за умови однозначності необхідно прийняти межові умови IУ роду, а саме розглядати задачу у спряженій постановці.

На заключення відзначимо, що без додаткових дій по інтенсифікації теплопереносу крізь повітряний зазор, виріб товщиною 3 мм, проходячи крізь робочу зону навіть з малою швидкістю 1,2 м/хвил., прогрівається до температури у зоні склеювання порядку половини технологічно потрібної. Причому, суттєву роль у теплообміні грає тепловміщення стрічки на вході у робочу зону.

Результати розрахунків проводились у режимі змішаної конвекції. Визначено поле температур у зоні склеювання стрічки та матеріалу,та визначено коефіцієнт тепловіддачі Nu.

ВИСНОВКИ

1. Розроблено неявні чисельно-аналітичні схеми підвищеного порядку точності для рішення рівнянь в'язкого газу та рівнянь теплопровідності:

- схема підвищеного порядку точності відповідає ермітовому методу IV порядку точності. У даній схемі введені початково - потокові зв'язки, які дозволяють враховувати повну сукупність умов однозначності, побудовані особливі замикальні зв'язки високого порядку точності для функції вихор і для конвективних доданків у кінцевомірних аналогах враховані умови транспортивності;

- схема розщіплення, яка використовує концепцію дискретизації методу прямих, є напіваналітичною, яка не має будь-яких ефектів у відношенні апроксимації конвективних доданків, має добру збіжність, властивості консервативності та транспортивності;

- схема, заснована на методі редукування нехарактеристичної задачі Коші, яка дозволяє звести двоточкову краєву задачу до відповідній їй задачі Коші.

2. Розроблено алгоритми розв'язання спряжених задач теплообміну при обтіканні неізотермічних тіл у наближенні рівнянь примежового шару. Алгоритм віцтестовано на прикладах модельних задач. При розв'язанні спряжених задач проведені параметричні дослідження, з яких витікає, що використання межових умов I,II,III-го роду приводить до суттєвих похибок та іноді неправильних результатів.

3. На основі збудованих алгоритмів розв'язані реальні практичні задачі спряженого тепло-та вологопереносу у порожнинах системи, заповнених вологим повітрям, та у робочій зоні пресу безперервної дії, які використовуються у сучасних технологічних процесах. Розподілення температури та концентрації у твердому тілі записується у аналітичному вигляді. У даній роботі запропонований новий підхід до зрощуван-

ня температурних та концентраційних полів на межі розділу двох середовищ, суть якого полягає у тому, що із розрахункової процедури виключено розв'язання задач тепло-та масообміну у твердому тілі. У такій постановці інформація про розв'язки цих задач вводиться через початкові прогоночні коефіцієнти для базової задачі.

4. Створено комплекс програм розв'язання задач спряженого тепло-та масообміну для реальних технологічних процесів на основі розроблених алгоритмів, які дозволяють розраховувати теплові режими у робочій зоні пресу безперервної дії та вологі режими у конструкціях систем, заповнених вологим повітрям. Уніфіковано процедуру переключення межових умов I,П, IУ-го роду на поверхнях виробу у відповідальності з поставленою задачею. Результати досліджень використовуються на підприємствах м. Дніпропетровська, а саме завод Пресів та Конструкторське бюро " Південне".

Конкретна особиста участь автора в одержанні наукових результатів у опублікованих роботах.

Збудовано уніфіковані алгоритми рішення спряжених задач тепломасообміну / 2,5 /.

Розроблено математичне та програмне забезпечення для проведення чисельних розрахунків по замовленій математичній моделі / I-9 /.

Проведено параметричні дослідження теплового стану у системі тіл, які враховують умови спряженого тепломасообміну / 2,5,9/.

Основний зміст дисертації відображено у наступних публікаціях.

I. Шмукин А.А., Левкович О.А. Расчет стационарных температурных полей тел сложной формы // Прикладные вопросы аэродинамики ЛА.-Киев: Наук.думка, I984, с. 84-87.

2. Шмукин А.А., Левкович О.А. Об одном численно-аналитическом алгоритме решения задач сопряженного теплообмена // Моделирование и методы расчета процессов тепломассопереноса.-Днепропетровск:ДГУ, I990,с. II-I7.

3. Шмукин А.А., Левкович О.А. О решении уравнения Пуассона на прямоугольных областях// Математические методы тепломассопереноса.-Днепропетровск:ДГУ, I986, с.71-78.

4. Шмукин А.А., Левкович О.А. О построении численно-аналитических схем повышенной точности для уравнений Навье-Стокса в переменных функция тока-вихрь // Динамика гидросистем энергетических установок ЛА. - Киев. I99I, с. I04-II2.

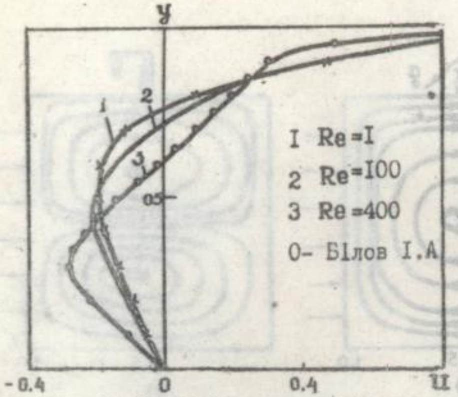
5. Шмукин А.А., Левкович О.А. Численно-аналитическое моделирование сопряженного теплообмена // Материалы Всесоюзного семинара по тепломассообмену и гидродинамике тонких струй вязкой жидкости:Тез. док. Днепропетровск: I989, с. 78-79.

6. Шмукин А.А., Левкович О.А., Лебедева В.М. О построении приближенных аналитических решений многомерных стационарных задач теплопроводности // Материалы Всесоюзного совещания по аналитическим методам расчета процессов тепло- и массопереноса: Тез.докл.-Душанбе, 1986, с. I52-I53.

7. Шмукин А.А., Левкович О.А. К вопросу численно-аналитического моделирования нестационарного отрыва пограничных слоев// Материалы Школы-семинара ЦАГИ."Механика жидкости и газа" Тез. докл. - ЦАГИ, I99Iг. с. I55-I56.

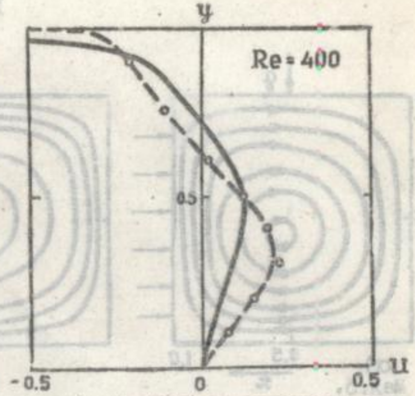
8. Шмукин А.А., Левкович О.А. К вопросу о построении составных решений сингулярно возмущенных задач механики жидкости и газа// Материалы Школы-семинара ЦАГИ " Механика жидкости и газа" Тез.докл.- ЦАГИ, I992, с. I90-I9I.

9. Шмукин А.А., Мошненко Ю.И., Сорокин Н.Н., Левкович О.А., Численно-аналитическое моделирование процессов сопряженного теплообмена в системе " жидкость-твердое тело" // П Школа-семинар "Методы математического моделирования в научных исследованиях" (Донецк, сентябрь I990г.): Тез. докл. - Донецк: ИПНН АН УССР, I990.-с.80.



Мал. I. Профілі повздовжної складової вектору швидкості у середені порожнини

$U|_{y=y_e} = 1$



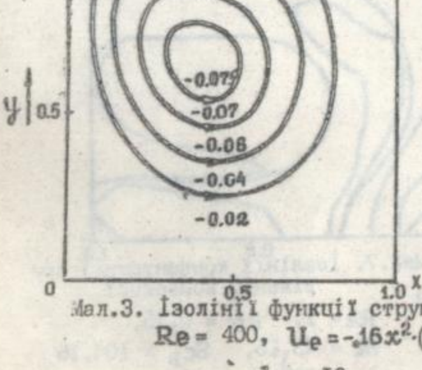
Мал.2. Профілі повздовжної складової вектору швидкості у середині порожнини.

$U|_{y=y_e} = -16x^2(1-x)^2$

--- - схема підвищеного порядку точності,

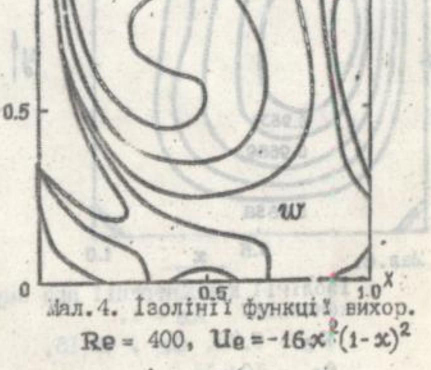
—— - схема розщіплення,

o - розв'язок Р.Пейре



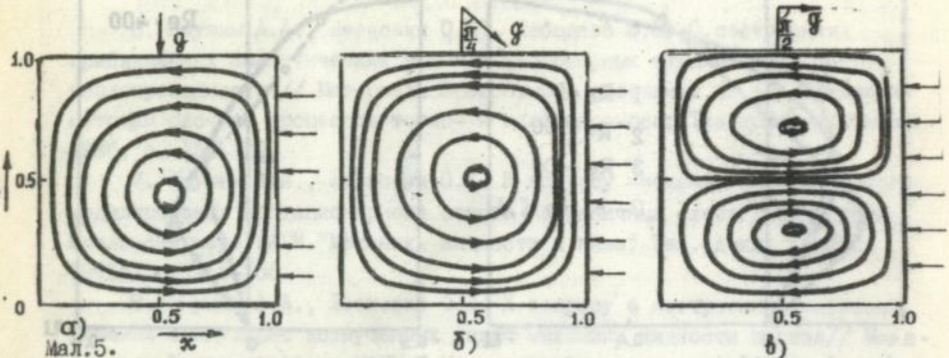
Мал.3. Ізолінії функції струму.
Re = 400, $U_e = -16x^2 \cdot (1-x)^2$

m ; d = I0



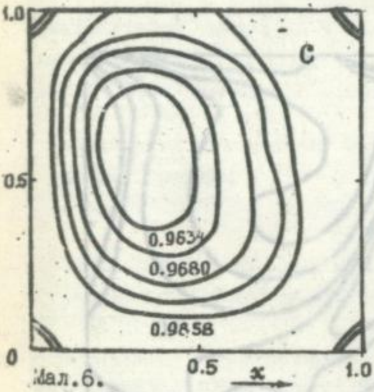
Мал.4. Ізолінії функції вихор.
Re = 400, $U_e = -16x^2(1-x)^2$

m , d = I0.



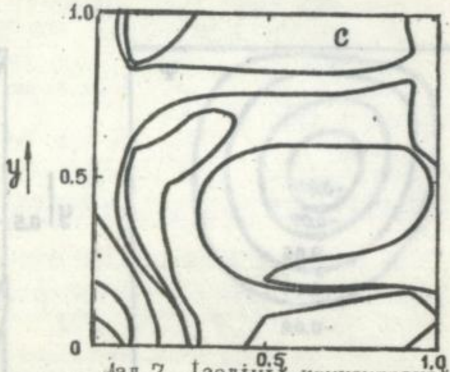
Мал.5.

Ізолінії функції струму при різноманітному розташуванні області відносно сили ваги m , d = I0, $Gr = 10^4$



Мал.6.

Ізолінії концентрації при змушеній конвекції Re = I, Pr = 0,75, Sc = 43,I5, Sc_D = I04,I6



Мал.7. Ізолінії концентрації при вільній конвекції.

Re = I, Pr = 0,75, Sc = 43,I5, Sc_D = I04,I6, $Gr = 10^4$.

Тип. Бгузак. 237-100.