МІнІстерство освІти УкраІни
Донецький державний унІверситет

На правах рукопису

БОГДАНОВ СергІй ЮрІйович

УДК 539.3

НЕЛІНІЙНА ОСЕСИМЕТРИЧНА ДЕФОРМАЦІЯ ПІДКРІПЛЕНИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ ПРИ НЕСТАЦІОНАРНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

01.02.04.- механІка деформування твердого тІла

Автореферат дисертацII на здобуття ученого ступеня
кандидата фIзико-математичних наук

Донецьк 1994

Робота виконана в ІнститутІ механІки Ім. С.П.Тимошенка АН УкраЇни

НауковІ керІвники: чл.-кор. АН УкраЇни,
доктор фІзико-математичних наук, професор
Шульга М.О.

доктор технІчних наук, професор
Луговий П.З.

ОфІцІйнІ опоненти: доктор фІзико-математичних наук, професор
Сторожев В.І.

кандидат фІзико-математичних наук, доцент
МоІсеєнко В.О.

ПровІдна установа: Інститут будІвельноЇ механІки КиЇвського державного унІверситету будІвництва І архІтектури

Захист вІдбудеться "2" червня 1994 р. о 15 годинІ на засІданнІ спецІалІзованоЇ ради К.068.06.03 при Донецькому державному унІверситетІ за адресою: 340055, м.Донецьк, вул.УнІверситетська, 24

З дисертацІєю можна ознайомитися в бІблІотецІ Донецького державного унІверситету.

Автореферат розІсланий "26" квІтня 1994р.

Вчений секретар
спецІалІзованоЇ ради ЛИСОВСЬКИЙ К.В.

I. ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність дослідження. Тонкостінні елементи конструкцій в формі оболонок різної конфігурації, що знаходять широке застосування в ракето-машино-і суднобудуванні, працюють в умовах імпульсної та ударної взаємодії, великих швидкостей навантажень та деформацій і інших складних фізико-механічних факторів. Для придання більшої жорсткості конструкції тонкостінна її частина підкріплюється ребра.

Підкріплені ребрами жорсткості тонкостінні оболонки з матеріалів з високою міцністю можуть виконувати своє функціональне призначення при геометрично нелінійних деформаціях обшивки. Достовірні оцінки міцності і жорсткості таких конструктивних елементів можна одержати в рамках нелінійної теорії оболонок великого прогину, причому при динамічних навантаженнях механіко-математична модель тонкостінної оболонки повинна зберегти властивості поширення пружних збурень. Динамічні крайові задачі для підкріплених оболонок можуть мати розривні розв"зки і одержання як математичного обгрунтовання їх існування так і розробка ефективних чисельних методив знаходження цих розв"язків має важливе фундаментальне і прикладне значення.

Мета роботи полягае в постановці і математичному обгрунтуванні осесиметричних нелінійних динамічних задач для підкріплених ребрами жорсткості оболонок обертання, розробці чисельної методики їх розв"язку, дослідження нелінійних осесиметричних деформацій циліндричних, конічних, сферичних оболонок при різних типах нестаціонарних навантажень і умов закріплення.

Наукова новизна полягае в формуванні нелінійних крайових задач динаміки оболонок обертання, підкріплених шпангоутами на основі гіпотез типу Тимошенка і варіаційного принципу Гамільтоа-Остроградського, математичному доведенні існування роз"язку крайових задач, розробці чисельної методики їх розв"язку на основі консервативних однорідних різницевих схем, дослідженні стійкості нелінійних різницевих схем, їхреалізації на ЕОМ; дослідження поведінки циліндричних, конічних, сферичних оболонок при різних типах нестаціонарних навантажень і граничних умовах.

Достовірність результатів досліджень забезпечується постановкою задач на основі варіаційних принципів, математичним доведенням існування розв"язків крайових задач, побудовою консервативних різницевих схем і дослідженням їх стійкості, контролюваною точністю обчислень, узгодженістю результатів з за альними закономірностями перебігу динамічних процесів в деформованих телах і співпаданням їх в окремих випадках з вIдомими в лIтературI.

Практична цIннIсть. РозробленI алгоритми I пакети прикладних програм дозволяют одержати розв"язки з необхIдною степеню точностI I детально дослIдIти основнI закономIрностI нелIнIйного деформування ребристих оболонок при нестацIонарному навантаженнI. ОдержанI результати використовувались в IнженернIй практицI конструкторськими бюро спецIального призначення при розрахунку на мIцнIсть рIзного типу Iнженерних конструкцIй.

Апробацiя роботи. МатерIали дисертацIйноI роботи доповIдались та обговорювались на

-семIнарI вIддIлу електропружностI Iнституту механIки АН УкраIни;

-III Всесоюзной конференции по нелIнейной теории упругости. Сыктывкар, 1989 год;

-II республIканскому семIнарI "МIцнIсть та формозмIнювання елементIв конструкцIй при дII динамIчних физико-хIмIчних полIв"(КиIв, 1990р.)

-III республIканскому семIнарI "ДинамIчна мIцнIсть трIщиностIйкIсть конструкцIйних матерIалIв при одноразовому Iмпульсному навантаженнI (КиIв, 1991 р.).

-ХУII науковIй конференцII молодих вчених Iнституту механIки АН УкраIни (КиIв, 1992р.).

ПублIкацII. За матерIалами дисертацII опублIковано 9 робIт.

Структура дисертацII. Робота складається Iз вступу, трьох роздIлIв, висновкIв, списка лIтератури, що мIстить 112 назв. Загальний об"єм дисертацII становить 111 сторIнок.

II. ЗМIСТ РОБОТИ

У вступI вIдзначається актуальнIсть роботи, проведено аналIз математичних моделей методIв I результатIв дослIджень по темI дисертацII. Результати дослIдження динамIчноI поведIнки тонкостIнних пIдкрIплених конструкцIй систематизованI в роботах В.Л.Агамирова, I.Я.АмIро, В.О.Заруцького, В.Г.Паламарчука, В.Г.Баженова, Г.П.Жигалко, Л.М.ДмитрIєвой, I.В.АндрIанова, В.О.ЛеснIчей, Л.I.Маневича, О.Е.Богдановича, П.З.Лугового, Egle D.M., Sewall J.L., Jones R.M.

Як випливає з аналIзу приведених робIт, питання про вплив геометричноI нелIнIйностI на поведIнку пIдкрIпленоI оболонки при нестацIонарних навантаженнях вивчено недостатньо, причому в бIльшостI робIт для описання деформацII оболонки (обшивки) використовувалась класична теорIя КIрхгофа-Лява.

Серед робIт по нестацIонарному навантаженню пIдкрIплених оболонок з врахуванням дискретного розмIщення ребер необхIдно вIдзначити роботи О.Е.Богдановича, Т.В.КошкIноI, О.К.Мишонкова, П.З.Лугового,

З.Ф.Мейша, Л.Г.Романенка, В.Г.Баженова, О.В.Ігонічевої, В.К.Ломунова, О.К.Перцева, Э.Г.Платонова, Wu R., Witmer C., Bert C.W., Fisher C.A., Ross C.A., Sierakovsky R.L., Ebioglu I.K., Strickland W.S., Suzuki S.
На основі проведеного аналізу проблеми дається обгрунтовання актуальності теми, визначається мета дослідження, викладається короткий зміст роботи по главах, наукова новизна і практична цінність результатів, що виносяться на захіст.

В першому розділі викладені основні положення геометрично нелінійної теорії типу Тимошенка для оболонок, кривих стержнів і оболонок з ребрами жорсткості. При виводі рівнянь руху підкріплених оболонок використовувався варіаційний принцип Гамільтона-Остроградського.-

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (K - \Pi + A)\,dt = 0$$

Повна потенціальна і кінетична енергія системи є сумами енергій оболонки і ребер

$$\Pi = \Pi_0 + \sum_{r=1}^{\ell} \Pi_r, \quad K = K_0 + \sum_{r=1}^{\ell} K_r$$

При виводі рівнянь руху використовувались умови жорсткого з"єднання оболонки і ребер в інтегральному вигляді

$$u_r = \int_0^L [u(\alpha) + h_r \varphi(\alpha)]\,\delta(\alpha - \alpha_r)\,d\alpha,$$

$$w_r = \int_0^L w(\alpha)\,\delta(\alpha - \alpha_r)\,d\alpha, \quad \varphi_r = \int_0^L \varphi(\alpha)\,\delta(\alpha - \alpha_r)\,d\alpha$$

В результаті стандартних перетворень одержуємо систему нелінійних рівнянь руху підкріплених оболонок

$$\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(B T_{\alpha\alpha}\right) + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha} T_{\beta\beta} + k_\alpha Q_{\alpha z} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sum_{r=1}^{\ell} \rho_r A_r \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + h_r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right)\delta(\alpha - \alpha_r)$$

$$\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(B Q_{\alpha z}\right) + k_\alpha T_{\alpha\alpha} + k_\beta T_{\beta\beta} + \frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(B T_{\alpha\alpha}\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right) =$$

$$= \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \sum_{r=1}^{l} \rho_r A_r \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta(\alpha - \alpha_r)$$

$$\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial \alpha}(B M_{\alpha\alpha}) + Q_{\alpha z} + \sum_{r=1}^{l} \frac{M_r}{R_r} \delta(\alpha - \alpha_r) = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} +$$

$$+ \sum_{r=1}^{l} \rho_r A_r \left[h_r \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + h_r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) + \frac{J_r}{A_r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right] \delta(\alpha - \alpha_r)$$

СпІввІдношення пружностІ

$$T_{\alpha\alpha} = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + k_\alpha w + \frac{1}{2}\theta_\alpha^2 + \nu \left(\frac{u}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha} + k_\beta w \right) \right]$$

$$T_{\beta\beta} = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{u}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha} + k_\beta w + \nu \left(\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + k_\alpha w + \frac{1}{2}\theta_\alpha^2 \right) \right]$$

$$Q_{\alpha z} = G_{\alpha z} h \left(\varphi + \frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial \alpha} - k_\alpha u \right)$$

$$M_{\alpha\alpha} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{A}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \nu \frac{\varphi}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha} \right)$$

$$M_{\beta\beta} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\varphi}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha} + \nu \frac{1}{A}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right)$$

$$T_r = E_r A_r \left(\frac{w_r}{R} + \frac{1}{2}\varphi_\beta^2 \right), \quad \varphi_\beta = -\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \beta}$$

$$M_r = E_r I_r \varkappa_r, \quad \varkappa_r = \frac{\varphi_r}{R}$$

ДодаючІ початковІ умови

$$u\big|_{t=0} = u_0, \quad w\big|_{t=0} = w_0, \quad \varphi\big|_{t=0} = \varphi_0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1, \quad \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = w_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varphi_1 .$$

та граничні умови (в кожному конкретному випадку свої)одержимо повну постановку початково-крайової задачі для підкріпленої оболонки.

<u>У другому розділі</u> досліджується проблема розв"язності нелінійних осесиметричних задач підкріплених оболонок обертання при нестаціонарному навантаженні. На початку розділу дається короткий аналіз стану проблеми, приведено означення функціональних просторів, які використовуються при доведенні теореми існування розв"язків поставленої задачі.

<u>Теорема</u>. Нехай $u_0 \in W_2^1(0,L)$, $w_0 \in W_2^1(0,L)$, $\varphi_0 \in W_2^1(0,L)$
$u_1 \in L_2(0,L)$, $w_1 \in L_2(0,L)$, $\varphi_1 \in L_2(0,L)$, $P(\alpha,t) \in L_2(0,T;L_2(0,L))$.
Тоді існує розв"язок задачі (I)-(2) $\{u, w, \varphi\}$ в класі функцій $u \in L_\infty(0,T; \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,L))$, $w \in L_\infty(0,T; \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,L))$,

$$\varphi \in L_\infty(0,T; \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,L)),\quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L_\infty(0,T; L_2(0,L)),$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} \in L_\infty(0,T; L_2(0,L)),\quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} \in L_\infty(0,T; L_2(0,L)).$$

з нульовими граничними умовами і початковими умовами (2).
Доведення проводиться за схемою, що запропонована Ж.-Л.Ліонсом і складається з трьох станів:
I)побудова наближених розв"язків методом Фаедо-Гальоркіна;2)одержання апріорних оцінок цих розв"язків і доведення обмежності множини побудованих розв"язків;3)граничний перехід.

Наближені розв"язки шукаються у вигляді

$$u^N(\alpha,t) = \sum_{k=1}^{N} u_k^N(t)\,\psi_k(\alpha)$$

$$w^N(\alpha,t) = \sum_{k=1}^{N} w_k^N(t)\,\psi_k(\alpha)$$

$$\varphi^N(\alpha,t) = \sum_{k=1}^{N} \varphi_k^N(t)\,\psi_k(\alpha)$$

де $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ -повна ортонормована система в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,L)$. Для визначення невідомих коефіцієнтів будується система Гальоркіна. На основі відомих теорем коефіцієнти цієї системи визначаються однозначно. Для наближених розв"язків виводяться апріорні оцінки, що мають такий вид

$$\frac{\rho h}{2}\left\|\frac{du^N}{dt}(t)\right\|^2+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{l}\sum_{k=1}^{N}\rho_r A_r\psi_k^2(\alpha_r)\left\|\frac{du_k^N}{dt}(t)\right\|^2+$$

$$+\sum_{r=1}^{l}\sum_{k=1}^{N}\rho_r A_r h_r\psi_k^2(\alpha_r)\left(\frac{d\varphi_k^N}{dt}(t),\frac{du_k^N}{dt}(t)\right)+\sum_{k=1}^{N}\int_0^t\Big(Q_{\alpha zk}^N,$$

$$\frac{du_k^N}{dt}\Big)dt'+\sum_{k=1}^{N}\int_0^t\left((BT_{\alpha\alpha}^N)_k,\frac{du_k^N}{dt}\right)dt'+\sum_{k=1}^{N}\int_0^t\Big(\Big(\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}T_{\beta\beta}^N\Big)_k,$$

$$\frac{du_k^N}{dt}\Big)dt'\leq\frac{\rho h}{2}\left\|\frac{du^N}{dt}(0)\right\|^2+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{l}\sum_{k=1}^{N}\rho_r A_r\psi_k^2(\alpha_r)\times$$

$$\times\left\|\frac{du_k^N}{dt}(0)\right\|^2+\varepsilon\sum_{r=1}^{l}\sum_{k=1}^{N}\rho_r h_r A_r\psi_k^2(\alpha_r)\left\|\frac{d\varphi_k^N}{dt}(0)\right\|^2+$$

$$+\frac{1}{4\varepsilon}\sum_{r=1}^{l}\sum_{k=1}^{N}\rho_r h_r A_r\psi_k^2(\alpha_r)\left\|\frac{du_k^N}{dt}(0)\right\|^2+\varepsilon\sum_{r=1}^{l}\sum_{k=1}^{N}\rho_r h_r\times$$

$$\times A_r\psi_k^2(\alpha_r)\int_0^t\left\|\frac{d\varphi_k^N}{dt}\right\|^2dt'+\frac{1}{4\varepsilon}\sum_{r=1}^{l}\sum_{k=1}^{N}\rho_r h_r A_r\psi_k^2(\alpha_r)\times$$

$$\times\int_0^t\left\|\frac{d^2u_k^N}{dt^2}\right\|^2dt'$$

$$\frac{\rho h}{2}\left\|\frac{dw^N}{dt}(t)\right\|^2+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{l}\sum_{k=1}^{N}\rho_r A_r\psi_k^2(\alpha_r)\left\|\frac{dw_k^N}{dt}(t)\right\|^2+$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\int_0^t\left((BQ_{\alpha z}^N)_k,\frac{dw_k^N}{dt}\right)dt'+k_\alpha\sum_{k=1}^{N}\int_0^t\left(T_{\alpha\alpha k}^N,\frac{dw_k^N}{dt}\right)dt'+$$

$$+k_\beta\sum_{k=1}^{N}\int_0^t\left(T_{\beta\beta k}^N,\frac{dw_k^N}{dt}\right)dt'+\sum_{k=1}^{N}\int_0^t\left(\Big(\frac{1}{A}T_{\alpha\alpha}^N\frac{\partial w^N}{\partial\alpha}\Big)_k,\frac{dw_k^N}{dt}\right)dt'\leq$$

$$\leq \frac{\rho h}{2}\left\|\frac{dw^N}{dt}(0)\right\|^2+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\ell}\sum_{k=1}^{N}\rho_r A_r h_r\left\|\frac{dw_k^N}{dt}(0)\right\|^2+$$

$$+\int_0^t\|L_k\|^2 dt'+\int_0^t\left\|\frac{dw_k^N}{dt}\right\|^2 dt'$$

$$\frac{\rho h^3}{24}\left\|\frac{d\varphi^N}{dt}(t)\right\|^2+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\ell}\sum_{k=1}^{N}(\rho_r h_r^2 A_r+\rho_r J_r)\psi_k^2(\alpha_r)\times$$

$$\times\left\|\frac{d\varphi_k^N}{dt}(t)\right\|^2+\sum_{r=1}^{\ell}\sum_{k=1}^{N}\rho_r h_r A_r\psi_k^2(\alpha_r)\left(\frac{d\varphi_k^N}{dt}(t),\frac{du_k^N}{dt}(t)\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\int_0^t\left((BM_{\alpha\alpha}^N)_k,\frac{d\varphi_k^N}{dt}\right)dt'+\sum_{k=1}^{N}\int_0^t\left(Q_{\alpha z k}^N,\frac{dw_k^N}{dt}\right)dt'+$$

$$+\sum_{r=1}^{\ell}\sum_{k=1}^{N}\int_0^t\left(\frac{M_r(\alpha_r)\psi_k^2(\alpha_r)}{R_r^2},\frac{d\varphi_k^N}{dt}\right)dt'\leq\rho\frac{h^3}{24}\left\|\frac{d\varphi^N}{dt}(0)\right\|^2+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\ell}\sum_{k=1}^{N}(\rho_r h_r^2 A_r+\rho_r J_r)\psi_k^2(\alpha_r)\left\|\frac{d\varphi_k^N}{dt}(0)\right\|^2+$$

$$+\varepsilon\sum_{r=1}^{\ell}\sum_{k=1}^{N}\rho_r h_r A_r\psi_k^2(\alpha_r)\left\|\frac{d\varphi_k^N}{dt}(0)\right\|^2+\frac{1}{4\varepsilon}\sum_{r=1}^{\ell}\sum_{k=1}^{N}\rho_r h_r\times$$

$$\times A_r\psi_k^2(\alpha_r)\left\|\frac{du_k^N}{dt}(0)\right\|^2+\varepsilon\sum_{r=1}^{\ell}\sum_{k=1}^{N}\rho_r h_r A_r\psi_k^2(\alpha_r)\int_0^t\left\|\frac{du_k}{dt}\right\|^2 dt'+$$

$$+\frac{1}{4\varepsilon}\sum_{r=1}^{\ell}\sum_{k=1}^{N}\rho_r h_r A_r\psi_k^2(\alpha_r)\int_0^t\left\|\frac{d^2\varphi_k^N}{dt^2}\right\|^2 dt'$$

З цих нерІвностей випливає, що правІ частини всІх трьох нерІвностей обмеженІ деякою константою, яка залежІть вІд u_0 , w_0 , φ_0 , u_1 , w_1 , φ_1 . Тому наближенІ розв"язки та Іх похІднІ по часу обмеженІ

$$\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u^N}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,L)}+\|u^N(t)\|^2_{W_2^1(0,L)}\le C_1$$

$$\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial w^N}{\partial t}(t)\right\|^2_{L_2(0,L)}+\|w^N(t)\|^2_{W_2^1(0,L)}\le C_2$$

$$\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial \varphi^N}{\partial t}(t)\right\|^2_{L_2(0,L)}+\|w^N(t)\|^2_{W_2^1(0,L)}\le C_3$$

З обмежностI множини наближених розв"язкIв випливає його слаба компактнIсть в гIльбертовому просторI.Таким чином виконанI всI умови для граничного переходу.ДалI переходом до границI в системI ГальоркIна доводиться,що u , w , φ є розв"язком задачI (I)-(2).При доведеннI збIжностI нелIнIйних членIв до вIдповIдних границь суттєво використовується ряд лем Ж.-Л.ЛIонса.

З третьому роздIлI вивчається напружено-деформований стан пIдкрIплених шпангоутами оболонок обертання при дII нестацIонарних навантажень.Для розв"язку рIвнянь руху пIдкрIплених оболонок обертання використовується метод скIнченних рIзниць.РIзницева схема розв"язку рIвнянь руху будувалася за допомогою Iнтегро-Iнтерполяцийнного метода побудови рIзницевих схем,розробленого в роботах О.А. Самарського,А.М.Тихонова для чисельного розв"язку рIвняння теплопровідностI з розривною правою частиною.Для побудови рIзницевих схем при розв"язку задач динамIки цилIндричних оболонок з врахуванням дискретного розмIщення ребер цей метод вперше було застосовано I розвинуто П.З.Луговим I В.Ф.Мейшем.РIзницева схема будується таким чином.На вIдрIзку $[0\ ,L]$ вводиться рIвномIрна сIтка $\omega_h=\{x_i=ih,\ h=L/N,\ i=1,\dots N\}$ на вIдрIзку $[0\ ,T]$ -сIтку $\omega_\tau=\{t_j=j\tau,\ j=1,\dots\}$.ПотIм на вIдрIзку $[\alpha_i;\alpha_{i+1}]$ осереднюються спIввIдношення пружностI,а Iнтеграли апроксимуються по формулах трапецIй.Таким чином,всI зусилля-моменти вIднесенI до промIжноI точки $\alpha_{i+1/2}$.РIвняння руху (I) пIдкрIпленоI оболонки обертання записанI в зусиллях-моментах.Тому цIлком природньо рIвняння руху (I) осереднювати на вIдрIзку $[\alpha_{i-1/2},\alpha_{i+1/2}]$.ПIсля всIх перетворень рIзницева схема набуде вигляду:

$$(BT_{\alpha\alpha})_{\bar{\alpha},i+1/2} - \frac{T_{\beta\beta,i-1/2} + T_{\beta\beta,i+1/2}}{2} B_{\bar{\alpha},i+1/2} +$$

$$+ \frac{(k_\alpha)_{i-1/2} A_{i-1/2} B_{i-1/2} Q_{\alpha z,i-1/2} + (k_\alpha)_{i+1/2} A_{i+1/2} B_{i+1/2} Q_{\alpha z,i+1/2}}{2} =$$

$$= \rho h A_i B_i u_{\bar{t}t,i} + \frac{1}{\Delta\alpha} \sum_{r=1}^{l} \rho_r A_r (u_{\bar{t}t,i} + h_r \varphi_{\bar{t}t,i}) \frac{\delta_{i-1r} + 2\delta_{ir} + \delta_{i+1r}}{4}$$

$$(BQ_{\alpha z})_{\bar{\alpha},i+1/2} - \frac{(k_\alpha)_{i-1/2} A_{i-1/2} B_{i-1/2} T_{\alpha\alpha,i-1/2} + (k_\alpha)_{i+1/2} A_{i+1/2} B_{i+1/2} T_{\alpha\alpha,i+1/2}}{2} -$$

$$- \frac{(k_\beta)_{i-1/2} A_{i-1/2} B_{i-1/2} T_{\beta\beta,i-1/2} + (k_\beta)_{i+1/2} A_{i+1/2} B_{i+1/2} T_{\beta\beta,i+1/2}}{2} -$$

$$- \frac{1}{\Delta\alpha} \sum_{r=1}^{l} \frac{E_r A_r}{R_r} w_i \frac{\delta_{i-1r} + 2\delta_{ir} + \delta_{i+1r}}{4} + (BT_{\alpha\alpha} w_{\bar{\alpha},i})_{\bar{\alpha},i+1/2} +$$

$$+ \frac{A_{i-1/2} B_{i-1/2} P_{i-1/2} + A_{i+1/2} B_{i+1/2} P_{i+1/2}}{2} = \rho h A_i B_i w_{\bar{t}t,i} +$$

$$+ \frac{A_i B_i}{\Delta\alpha} \sum_{r=1}^{l} \rho_r A_r w_{\bar{t}t,i} \frac{\delta_{i-1r} + 2\delta_{ir} + \delta_{i+1r}}{4}$$

$$(BM_{\alpha\alpha})_{\bar{\alpha},i+1/2} - \frac{M_{\beta\beta,i-1/2} + M_{\beta\beta,i+1/2}}{2} B_{\bar{\alpha},i+1/2} -$$

$$- \frac{A_{i-1/2} B_{i-1/2} Q_{\alpha z,i-1/2} + A_{i+1/2} B_{i+1/2} Q_{\alpha z,i+1/2}}{2} -$$

$$- \frac{1}{\Delta\alpha} \sum_{r=1}^{l} \frac{E_r A_r}{R_r} \varphi_i \frac{\delta_{i-1r} + 2\delta_{ir} + \delta_{i+1r}}{4}$$

$$= \rho \frac{h^3}{12} \varphi_{tt,i} A_i B_i + \frac{1}{\Delta\alpha} A_i B_i \sum_{r=1}^{l} \rho_r A_r \Big[h_r (u_{tt,i} + h_r \varphi_{tt,i}) + \frac{J_r}{A_r} \varphi_{tt,i} \Big] \frac{\delta_{i-1r} + 2\delta_{ir} + \delta_{i+1r}}{4}$$

Співвідношення пружності у різницевій формі

$$T_{\alpha\alpha,i-1/2} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \Big[\frac{1}{A_{i-1/2}} u_{\bar{\alpha},i} + \frac{(k_\alpha)_{i-1} w_{i-1} + (k_\alpha)_i w_i}{2} + \frac{1}{2} (\theta_{\alpha,i})^2 + \frac{\nu}{2} \Big(\frac{v_{i-1}}{A_{i-1} B_{i-1}} + \frac{v_i}{A_i B_i} \Big) + \frac{\nu}{2} \big((k_\beta)_{i-1} w_{i-1} + (k_\beta)_i w_i \big) \Big]$$

$$T_{\beta\beta,i-1/2} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \Big[\frac{1}{2} \Big(\frac{v_{i-1}}{A_{i-1} B_{i-1}} + \frac{v_i}{A_i B_i} \Big) B_{\bar{\alpha},i} + \frac{1}{2} \big((k_\beta)_{i-1} w_{i-1} + (k_\beta)_i w_i \big) + \frac{\nu}{A_{i-1/2}} u_{\bar{\alpha},i} + \frac{\nu}{2} \big((k_\alpha)_{i-1} w_{i-1} + (k_\alpha)_i w_i \big) + \frac{\nu}{2} (\theta_{\alpha,i})^2 \Big]$$

$$Q_{\alpha z,i-1/2} = G_{\alpha z} h \Big[\varphi_{\alpha,i-1/2} + \frac{1}{2} (\theta_{\alpha,i-1} + \theta_{\alpha,i}) \Big]$$

$$M_{\alpha\alpha,i-1/2} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \Big[\frac{1}{A_{i-1/2}} \varphi_{\bar{\alpha},i} + \frac{\nu}{2} \Big(\frac{\varphi_{i-1}}{A_{i-1} B_{i-1}} + \frac{\varphi_i}{A_i B_i} \Big) B_{\bar{\alpha},i} \Big]$$

$$M_{\beta\beta,i+1/2} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \Big[\frac{1}{2} \Big(\frac{\varphi_{i-1}}{A_{i-1} B_{i-1}} + \frac{\varphi_i}{A_i B_i} \Big) B_{\bar{\alpha},i} + \frac{\nu}{A_{i+1/2}} \varphi_{\bar{\alpha},i} \Big]$$

Значення зусиль та моментів в точці i 1/2 одержується з попередніх виразів для значень зусиль в точках i -1/2 заміною індексів у переміщень з i на i -1.

Побудована різницева схема однорідна і дозволяє обчислювати як силові, так і кінематичні характеристики поширення хвильових процесів в підкріплених оболонках при дії нестаціонарних навантажень. КонсервативнIсть побудованоI рIзницевоI схеми дозволяе дослIджувати хвильовий процесс на великому часовому IнтервалI, в той же час як неконсервативнI схеми породжують фIктивнI джерела енергII, що призводять до накопичення помилок, а в деяких випадках мае мIсце хибна збIжнIсть.

Проведено дослIдження стIйкостI рIзницевоI схеми для системи рIвнянь руху. ОсобливIсть в даному випадку полягае в тому, що побудована схема-нелIнIйна. Тому умови стIйкостI було отримано за допомогою сIмбIозу принципу заморожуваних коефIцIентIв дослIдження стIйкостI рIзницевих схем з змIнними коефIцIентами I методу енергетичних нерIвностей. РIзницева схема записуеться в канонiчному виглядI

$$B\vec{y}_{\overset{\circ}{t}} + \tau^2 R\vec{y}_{\bar{t}t} + A\vec{y} = \vec{f}, \quad \vec{y}(0)=\vec{y}_0, \quad \vec{y}(\tau)=\vec{y}_1$$

ЗгIдно з теорIею О.А.Самарского, рIзницева схема стIйка по початкових даних, якщо для однорIдноI схеми (при $\vec{f}=\vec{\theta}$) виконуються нерIвностI:

$$A=A^{*}\geq 0, \quad R=R^{*}\geq 0, \quad B\geq 0, \quad R-\frac{1}{4}A\geq 0$$

ЗвIдси було одержано умову стIйкостI рIзницевоI схеми для рIвнянь руху пIдкрIпленоI цилIндричноI оболонки

$$\frac{\tau}{\Delta\alpha}\leq \min\left\{\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\left[\frac{E}{\rho(\Delta\alpha)(1-\nu^2)}\left(4+\frac{w_\alpha^2}{2\varepsilon}\right)+\frac{4E\nu\varepsilon}{(\Delta\alpha)^2R\rho(1-\nu^2)}\right]}},\right.$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\left[\frac{E\left((w_\alpha)^2+2w_\alpha\varepsilon\right)}{\rho(\Delta\alpha)^2}+\frac{E\nu}{R\rho(1-\nu^2)}\left(\frac{1}{4\varepsilon}+\frac{2\varepsilon w_\alpha}{(\Delta\alpha)^2}+\frac{w_\alpha}{8\varepsilon}\right)+\right.}}\cdots$$

$$\left.\cdots\frac{}{\frac{2G_{\alpha z}}{\rho(\Delta\alpha)^2}\left(2+\frac{1}{\varepsilon}\right)+\frac{E_rA_r}{R_r^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\left[\frac{G_{\alpha z}}{\rho}(2+\varepsilon)(\Delta\alpha)^2+\frac{Eh^2}{3\rho(1-\nu^2)}+\frac{I_r}{R_r}\right.}}\right\}$$

Умова стIйкостI рIзницевоI схеми залежит вIд рIшення рIзницевоI задачI, що одержуеться на кожному попередньому шарI; в цьому суттева вIдмIннIсть умови стIйкостI для лIнIйноI схеми (це збIгаеться з висновками Р.Д.РIхтмайсра по стIйкостI нелIнейних рIзницевих схем).

Для апостерIорного дослIдження якостI побудованого алгоритму

проведено порІвняння з результатами Л.Г.Романенко,який одержав аналІтичний розв"язок задачІ при дІІ навантаження,нормального до поверхнІ оболонки.Параметри оболонки І ребра такІ: $L=1,5м$;
$R=0,6м$; $h=3\cdot10^{-2}м$; $H_p=0,1м$; $A_p=0,015м^2$;

$$P(\tau)=P_0[\eta(\tau)-\eta(\tau-\tau_0)]$$

де P_0 -амплІтуда навантаження: $\tau_0=0,5$ - час дІІ навантаження; $\tau=\frac{t\cdot c}{L}$ -час,що плине, $\eta(\tau)$ -функцІя ХевІсайда.ПропорІвнення результатІв,що отриманІ по методицІ,розробленоІ в данІй роботІ з результатами Л.Г.Романенко дало Іх добру збІжнІсть, що свІдчить про коректнІсть розробленоІ в данІй роботІ методики. За допомогою розробленоІ методики було дослІджено реакцІю пІдкрІпленоІ цилІндричноІ оболонки на дІю рІзних видІв нестацІонарних навантажень.ДослІджувалась поведІнка пІдкрІплених цилІндричних оболонок при дІІ розподІлених навантажень.Параметри оболонки и ребра
$h/L=1/60$, $h_p/L=1/60$, $\rho_p/\rho=1$, $E_p/E=1$, $\nu=0,3$
Навантаження мас вигляд $P(t)=P_0/E\sin(\pi t/t_0)[\eta(t)-\eta(t-t_0)]$
Як показали розрахунки,при спІввІдношеннІ $P_0/E\leq10^{-5}$ лІнІйна І нелІнІйна теорІя оболонок дають при розрахунках результати,що практично не вІдрІзняються.ДослІджувалась також повІдІнка пІдкрІплених цилІндричних оболонок при рІзного роду крайових навантаженнях.Було розглянуто випадки,коли вІльний торець оболонки пІдкрІплений ребром І коли не подкрІплений.В обох випадках при розглядІ граничних умов використовусться Іх динамІчна апроксимацІя,тобто спІльно розв"язуються рІвняння вІльного края,що завантажений одним з видІв навантаження І система рІвнянь руху пІдкрІпленоІ цилиндричноІ оболонки.Параметри оболонки І ребра $h/L=\frac{1}{60}$, $h_p/L=\frac{1}{60}$, $\rho_p/\rho=1$
$E_p/E=1$, $R/L=5/12$, $\nu=0,34$,
Навантаження задасться у виглядІ

$$P(t)=P_0/E\sin(\pi t/t_0)[\eta(t)-\eta(t-t_0)]$$

t_0 -час дІІ навантаження.ДослІджено вплив ребра жорсткостІ на прогин ІІ серединноІ поверхнІ при дІІ повздовжнього навантаження,динамІку змІни прогинов в пІдкрІпленІй та непІдкрІпленІй частинах.Виявлено випадки при яких спІввІдношеннях P_0/E необхІдно враховувати геометричну нелІнІйнІсть деформування матерІалу.ДослІджено поведІнку оболонки при пІдкрІпленнІ ІІ двома ребрами.Встановлення ребер жорсткостІ приводить до значного зменшення ~~кратів~~ прогинов оболонки.КрІм того,у випадку непІдкрІпленого торця спостерІгасться деяка вІдмІннІсть результатІв,що отриманІ по лІнІйнІй та нелІнІйнІй теорІям оболонок,в зонІ вІльного торця.Встановлення ребра жорсткостІ на неподкрІпленому торцІ приводить до значного зменшення прогІну оболонки на цьому торцІ.ДослІджено поведІнку пІдкрепленоІ цилІндричноІ оболонки при дІІ на ІІ вІльний торець поперечного та повздовжньо-поперечного навантаження,виявлено,яким чином впливає встановлення ребра жорсткостІ на кинематичнІ та силовІ характеристики оболонки при поширеннІ в нІй пружних хвиль.Виявлено,що прогин оболонки зменьшується в зону встановлення ребра,спостерІгається пІдвищення значень повздовжнього зусилля $T_{\alpha\alpha}$,в той час як на зусиля $T_{\beta\beta}$ встановлення ребра практично не має впливу.

Вивчено поведІнку пІдкрІплених коничних оболонок при дІІ рІзного виду нестацІонарних навантажень І умов закрІплення.Розрахунки проводились для оболонок з такими параметрами обшивки І ребер
$h/L = 1/80,\ h_r/L = 4/80,\ \rho_r/\rho = 1,\ E_r/E = 1,\ \nu = 0{,}3,\ R_0/L = 5/12,\ \alpha_0 = \pi/12$
кут конусностІ.Розглядалась поведІнка пІдкрІпленоІ коничноІ оболонки при дІІ розподІленого навантаження.Навантаження має вигляд

$$P(t) = (P_0/E)\sin(\pi t/t_0)\left[\eta(t) - \eta(t - t_0)\right]$$

де t_0 -час дІІ навантаження.Виявлено що при спІввІдношеннІ $P_0/E \leq 10^{-5}$ лІнІйна І нелІнІйна теорІя оболонок дають практично одІнаковІ результати.Вивчено реакцІю оболонки на рІзного роду торцевІ навантаження.Параметри оболонок І ребер-тІ же самІ,що в попереднІй задачІ.Виявлено закономІрностІ розповсюдження хвильових процесІв в пІдкрІплених коничних оболонках,вплив на характеристики цІх процесІв фІзико-механичних параметрІв ребер.Вивчено пружну реакцІю пІдкрІпленоІ сферІчноІ оболонки на дІю розподІленого навантаження.
Параметри оболонки І ребер
$h/R = 1/60,\ h_r/R = 4/60,\ \rho_r/\rho = 1,\ E_r/E = 1,\ \nu = 0{,}3$
Оболонка жорстко закрІплена в полюсІ І вздовж найбІльшоІ паралелІ.
Ребро розмІщенне на паралелІ $\theta = \frac{\pi}{4}$.Навантаження має вигляд

$$P(t) = (P_0/E)\sin(\pi t/t_0)\left[\eta(t) - \eta(t - t_0)\right]$$

Було проведено порІвняння результатІв,що одержанІ по лІнІйнІй та нелІнІйнІй теорІІ оболонок.ПроведенІ розрахунки дозволяють зробити висновки,що лІнІйна І нелІнІйна теорІІ дають при розрахунках практично однаковІ результати,якщо

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ДИСЕРТАЦІІ

І.З варІацІйного принципу ГамІльтона-Остроградського І гипотез типу Тимошенка для оболонок І стержнІв одержанІ нелІнІйнІ осесиметричнІ динамІчнІ узагальненІ задачІ для пІдкрІплених шпангоутами оболонок обертання.На основІ принципу ГальоркІна,нерІвностей енергетичного типу І лем компактностІ Лионса доведено Існування

розв"язку с формульованих задач в класI $L_\infty(0,T;W_2^1(0,L))$.
2.Розроблений алгоритм чисельного розв"язку з використанням однорIдних консервативних чисельних схем,дослIджено питання стIйкостI побудованоI нелIнIйноI рIзницевоI схеми (для цилIндричноI оболонки) I показано,що константа Куранта залежить вIд розв"язку рIзницевоI задачI.
3.Розроблений алгоритм реалIзовано в виглядI обчислювальних програм на ЕОМ I дослIджено нелIнIйнI коливання цилIндричноI,конIчноI I сферичноI оболонок, пIдкрIплених одним або двома шпангоутами,при Iмпульсному рIвномIрно-розподIленому навантаженнI,повздовжньому ударI по вIльному торцю оболонки(другий кIнець жорстко закрIплений), поперечному ударI по вIльному торцю оболонки (другий торець жорстко закрIплений),повздовжньо-поперечному навантаженнI на вIльний торець оболонки (другий торець жорстко закрIплений).ДослIджено залежнIсть прогинIв,зусиль T_{22} , $T_{\beta\beta}$ вIд механичних I геометричних параметрIв оболонки I пIдкрIплюючого ребра.

ПроведенI розрахунки дозволяють зробити висновки,що при дII рIвномIрно розподIленого навантаження на оболонки з великим модулем Юнга (сталь,алюмIнIй) лIнIйна теорIя оболонок дають дуже близькI результати,коли оболонки находяться в пружнIй зонI.Це характерно як для цилIндричноI,так I для коничноI,та сферичноI оболонки. Встановлення ребер приводить до того,що в зонI Iх встановлення пIдвищується значення зусилля T_{22} .При торцевих навантаженнях в деяких випадках спостерIгається вIдмIннIсть результатIв,що одержанI по лIнIйнIй та нелIнIйнIй теорII оболонок.Особливоце характерно для вIльного краю оболонки.НелIнIйна теорIя дае бIльш низькI значення прогинIв.

ОсновнI результати дисертацIйноI роботи вIдображенI в таких публIкацIях:

I.Богданов С.Ю.О существовании решений задач динамики подкрепленных оболочек//Численные методы механики сплошной среды.Тезисы докладов III Всесоюзной школы молодых ученых(п.Абрау-Дюрсо 27/У/-I/УI/I99I).Красноярск,I99I,С.III.

2.Богданов С.Ю.Нелинейная осесимметричная деформация подкрепленной цилиндрической оболочки при импульсных торцевых воздействиях//Труды ХУII науч.конф.мол.ученых Ин-та механики АН Украины,Киев, I9-22 мая I992г.

3.Богданов С.Ю.Нелинейные осесимметричные деформации подкрепленных цилиндрических оболочек при торцевых воздействиях//III Республиканский семинар "Динамическая прочность и трещиностойкость конструкционных материалов при однократном импульсном нагружении,Киев, I-3 октября I99Iг.:Тез.докладов.-Киев,Ин-т проб.проч.Ан Украины, I99I -С.4.

4.Богданов С.К.,Мейш В.Ф.Численное решение нелинейных уравнений движения подкрепленных оболочек при нестационарных воздействиях//Республиканский семинар "Прочность и формоизменение элементов конструкций при воздействии динамических физико-химических полей".Киев,25-27 сентября I990 года:Тез.докл.-Киев,Ин-т проб.проч. АН УССР,I990.-С.I3.

5.Луговой П.З.,Мейш В.Ф.,Богданов С.К.Построение разностных схем для уравнений движения подкрепленных цилиндрических оболочек с разрывными коэффициентами//Краевые задачи математической ~~физики~~ физики.Киев:Наук.думка.-I989.-С.I36-I40.

6.Луговой П.З.,Мейш В.Ф.,Богданов С.В.Численное решение задач динамики ребристых оболочек вращения//Вычислительная и прикладная математика,I992,Вып.74,С.45-48.

7.Мейш В.Ф.,Богданов С.К.Нелинейная деформация подкрепленной цилиндрической оболочки при нестационарных воздействиях//3-я Всесоюзная конференция по нелинейной теории упругости.Сыктывкар,I989.-Сыктывкар:Сыктывкарский гос.ун-т-I989,С.78-79.

8.Мейш В.Ф.,Богданов С.К.Численное моделирование поведения подкрепленных цилиндрических конструкций при импульсном нагружении //В сб.:Теория и практика совершенствования технологии взрывных работ.Киев:Наук.думка,I990.-С.27-32.

9.Богданов С.К.,Мейш В.Ф.Единственность и непрерывная от начальных данных решений уравнений движения подкрепленных оболочек вращения типа Тимошенко//В сб.:Моделирование динамики деформируемых сред-Киев:Наук.думка,I993-С.I23-I26.

Підп. до друку 29.03.94. **Формат** $60\times84^{1}/_{16}$.
Папір друк. № 3 . Спосіб друку офсетний. Умовн. друк. арк. 0,93.
Умовн. фарбо-відб. 1,16 . **Обл.-вид. арк.** 1,0 .
Тираж 100 . **Зам. №** 4-1482.

Фірма «ВІПОЛ»
252151, Київ, вул. Волинська, 60.