ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ І.І.МЕЧНИКОВА

На правах рукопису

МІТЕЛЬМАН Ігор Михайлович

ВЛАСТИВОСТІ ГІПЕРКОМПЛЕКСНОГО АНАЛОГА ІНТЕГРАЛА З ЯДРОМ КОШІ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

01.01.01 - математичний аналіз

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Одеса 1994

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі математичного аналізу Одеського державного університету імені І.І.Мечникова.

Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук, доцент
ШАПІРО Михайло Веніамінович

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
КАКІЧЕВ Валентин Андрійович
кандидат фізико-математичних наук, доцент
СКОРОХОД Сергій Федорович

Провідна організація: Харківський державний університет

Захист відбудеться "3" червня 1994 року о 15 год на засіданні Спеціалізованої вченої ради Д 05.01.01 по фізико-математичним наукам /математика/ в Одеському державному університеті за адресою: 270100, м.Одеса, вул. Петра Великого, 2.

З дисертацією можна ознайомитися у науковій бібліотеці Одеського державного університету /270100, м.Одеса, вул. Радянської Армії, 24/.

Автореферат розісланий "30" квітня 1994 року.

Вчений секретар
Спеціалізованої вченої ради О.М.Стоколос

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Поряд з класичною теорією голоморфних функцій багатьох комплексних змінних, яка знайшла багаточисленні застосування у різноманітних галузях математики, механіки, теоретичної фізики, в сучасному математичному аналізі розвивається /В.С.Виноградов, R.Delanghe, F.Brackx, F.Sommen, J.E.Gilbert, M.A.Murrey, V.Souchek, H.Malonek та ін./ і інший - гіперкомплексний - підхід до багатовимірної ситуації, при якому здійснюється дослідження властивостей функцій із значеннями в алгебрах Кліффорда.

Тіло дійсних кватерніонів $\mathbb{H}$ утворює кліффордову алгебру найменшої /після поля комплексних чисел $\mathbb{C}$/ вимірності - єдину асоціативну некомутативну скінченномірну алгебру над $\mathbb{R}$ без дільників нуля. При цьому задачі кватерніонної теорії функцій є змістовною та адекватною моделлю для багатьох проблем багатовимірного аналізу. Тому клас гіперголоморфних /моногенних/ кватерніоннозначних функцій, що визначається як ядро запровадженого Гр.К.Мойсилом, Н.Теодореско, Р.Фуетером аналога оператора Коші-Рімана, а також їх інтегральні зображення, гіперкомплексні аналоги інтеграла з ядром Коші, оператори сингулярного інтегрування, аналоги крайової задачі Рімана та деяких її узагальнень, крайові задачі для відповідних диференціальних операторів, варіанти формул Гільберта вивчалися у матричній та кватерніонній формі багатьма авторами /А.В.Біцадзе, М.Л.Василевський, В.С.Виноградов, А.Д.Джураєв, М.М.Крилов, М.В.Шапіро, В.І.Шевченко, F.Brackx, C.A.Deavours, K.Gürlebeck, K.Nôno, W.Sprössig, A.Sudbery та ін./. Подальші узагальнення ідей Гр.К.Мойсила, Н.Теодореско, Р.Фуетера розглядалися також і в роботах В.С.Владимирова, І.В.Воловича, Л.Є.Фрейдензона.

Інтерес до ідей та методів теорії гіперголоморфних кватерніоннозначних функцій, інтегралів з кватерніонним ядром Коші викликаний не тільки їх застосуванням в багатовимірному комплексному аналізі /В.А.Байков, М.Л.Василевський, В.С.Виноградов, М.Насер, М.В.Шапіро, K.Nôno, F.Sommen та ін./, теорії крайових задач для еліптичних систем диференціальних рівнянь у частинних похідних /В.Є.Балабаєв, А.В.Біцадзе, А.Д.Джураєв, М.М.Тарханов, А. І. Янушаускас, K.Gürlebek, W.Sprössig та ін./, але й їх застосуванням: в теорії геофізичних полів /М.Д.Василевський, М.С.Жданов, М.В.Шапіро/, в теорії пружності, механіці суцільних середовищ /Б.Д.Аннін, Ю.М.Грігор"ев, В.М.Кутрунов, В.В.Наумов, А.М.Цалік та ін./. В роботах В.В.Кравченко, М.В.Шапіро встановлений природний зв"язок спеціального класу гіперголоморфних бікватерніонних функцій із гармонічними у часу електромагнітними полями в однорідних ізотропних середовищах. За допомогою інтегральних зображень функцій з згаданого вище класу гіперголоморфності були отримані нові інтегральні зображення для електродинамічних характеристик. Гіперкомплексними /у тому числі і кватерніонними/ методами факторизуються /В.В.Кравченко, В.Г.Кравченко, М.В.Шапіро, K.Gürlebeck, Huang Liede, F.Sommen, W.Sprössig та ін./ деякі диференціальні оператори, які грають важливу роль у математичній фізиці /наприклад - оператор Гельмгольца/, досліджуються відповідні крайові задачі.

Гіперкомплексний варіант голоморфних функцій, інтеграла з ядром Коші, які будуються у межах кватерніонного аналізу, є точними структурними аналогами відповідних понять теорії функцій одного комплексного змінного. Цей факт дозволяє застосовувати при дослідженні властивостей гіперголоморфних кватерніоннозначних функцій та їх інтегральних зображень, сингулярних інтегралів методи, адекватні розвиненим в $\mathbb{C}^4$-аналізі; звідки вже як наслідки одержуються розв"язки найрізноманітніших задач багатовимірного аналізу. І якщо такі задачі удається зв"язати з задачами гіперкомплексного /зокрема - кватерніонного/ аналізу, то доцільність застосування зазначеного підходу продемонстрована в багатьох роботах. Крім того, перенесення понять, методів одновимірного аналізу на гіперкомплексну ситуацію має суттєво-самостійне значення та супроводжується отриманням і в межах останнього нових результатів.

Беручи до уваги означене вище, тема дисертації, що є частиною досліджень кафедри математичного аналізу Одеського державного університету за комплексною темою "Багатовимірні інтегральні оператори, теорія гіперкомплексних функцій та деякі питання комплексного аналізу" /державний реєстраційний номер 0187.0002903/, являє собою актуальну.

<u>Об"єкт дослідження</u>. У даній дисертації досліджуються певні властивості інтегралів з кватерніонним ядром Коші

$$\mathcal{K}_{\psi}^{(m)}(x) := (-1)^{m-1} \operatorname{sgn}\psi \, |S^{m-1}|^{-1} \cdot |x|^{-m} \sum_{k=4-m}^{3} \overline{\psi^k} x_k \qquad /I/$$

/$m \in \{3;\ 4\}$, $|S^{m-1}|$ - $(m-1)$ - вимірний об"єм одиничної сфери S^{m-1} в $\mathbb{R}^m$, $\psi := \{\psi^{4-m}, \ldots, \psi^3\}$ - структурний $\mathbb{H}$ -вектор - упорядкований набір кватерніонів /при $m=3$ - суто уявних/, які утворюють в $\mathbb{R}^m$ ортонормовану систему, $\operatorname{sgn}\psi$ вважається рівним +1 або -1 в залежності від погодженості орієнтації базису ψ і каноничного базису в $\mathbb{R}^m$/. Такі інтеграли з одного боку зв"язані з теорією /ліво-/ ψ -гіперголоморфних функцій, що складають ядро еліптичного диференціального оператора

$$^{\psi}\mathcal{D}: f \in C^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{H}) \mapsto \sum_{k=4-m}^{3} \psi^k \frac{\partial f}{\partial x_k}, \qquad /2/$$

а з іншого, при відповідному виборі класу гіперголоморфності,- з інтегральними операторами, кожний з яких звичайно є предметом с а м о с т і й н о г о вивчення в межах "традиційних" підходів:

з інтегральним оператором з двохвимірним ядром Мартінеллі-Бохнера

$$\omega_{MB}^{(2)}(\zeta - u) := (4\pi^2 |\zeta - u|^4)^{-1} \left[(\bar{\zeta}_1 - \bar{u}_1) d\bar{\zeta}[1] \wedge d\zeta - (\bar{\zeta}_2 - \bar{u}_2) d\bar{\zeta}[2] \wedge d\zeta \right], \qquad /3/$$

з інтегральним оператором

$$\vec{C}[\vec{f}](t) := \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \left\{ \operatorname{grad} \frac{1}{|\tau - t|} \times [\vec{n}^{(2)}(\tau) \times \vec{f}(\tau)] - \operatorname{grad} \frac{1}{|\tau - t|} (\vec{n}^{(2)}(\tau) \cdot \vec{f}(\tau)) \right\} dS_\tau, \qquad /4/$$

який розглядається в теорії лапласових в області $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ полів. Крім цього, при $m = 3$, $\psi = \{i_1, i_2, i_3\} =: \psi_{St}$ оператор $MT := -\mathcal{D}^{\psi_{St}} Z_{\mathbb{H}}$ /$\mathcal{D}^{\psi}[f] := \sum_{k=4-m}^{3} \partial_k f \cdot \psi^k$, $Z_{\mathbb{H}}$ - оператор кватерніонного спряження/ - кватерніонна форма запису диференціального оператору Мойсила-Теодореско. Аналог інтеграла Коші, який виникає у теорії голоморфних за Мойсилом-Теодореско вектор-функцій трьох дійсних змінних, вивчався А.В.Біцадзе. У його роботах досліджувався /у матричній термінології/ трьохвимірний аналог інтегральної формули Коші, властивості сингулярних інтегралів /формули Сохоцького-Племеля, формула Пуанкаре-Бертрана/, відповідні крайові задачі та їх практичне застосування.

Мета роботи.

а/ Впровадження поняття гіпердиференційовності $\mathbb{H}$-значних функцій вздовж гіперплощини в $\mathbb{R}^4$, яке погоджується з гіперголоморфністю, що визначається за допомогою кватерніонного оператора Коші-Рімана ${}^{\psi}\mathcal{D}$.

б/ Установлення характеру взаємозв"язку між ψ-гіперголоморфністю $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{H}$-функцій та голоморфністю $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$-відображень, між інтегралами з ядром $\mathcal{K}_{\psi}^{(4)}$ та інтегралами з ядром $\omega_{MB}^{(2)}$ і з ядром

$$\omega^{(2)}(\zeta-u) := -(4\pi^2|\zeta-u|^4)^{-1}[(\bar{\zeta}_1-\bar{u}_1)d\zeta[2]\wedge d\bar{\zeta} + (\bar{\zeta}_2-\bar{u}_2)d\zeta[1]\wedge d\bar{\zeta}]; \qquad /5/$$

вивчення властивостей інтегралів з ядром $\omega^{(2)}$.

в/ Здобуття формул для гіперпохідних інтегралів /у тому числі і сингулярних/ з кватерніонним ядром $\mathcal{K}_{\psi}^{(4)}$ і, як наслідків, відповідних властивостей інтегралів з двохвимірним ядром Мартінеллі-Бохнера.

г/ Здобуття аналога формули Пуанкаре-Бертрана для повторних сингулярних інтегралів з кватерніонним ядром /I/ і як наслікiв цього - формул переставлення порядку інтегрування та обернення для ряду багатовимірних сингулярних інтегралів, інших властивостей останніх.

Метою дисертаційної роботи є і розвиток нових для гіперкомплексного аналізу та його застосувань технічних прийомів, зв"язаних, зокрема, із застосуванням гіперкомплексних методів до досліджень властивостей голоморфних функцій кількох комплексних змінних, їх інтегральних зображень.

Методика досліджень. В основному - застосовуються апарат гіперкомплексного /кватерніонного/ аналізу та методи теорії сингулярних інтегралів; при розгляданні застосувань кватерніонного аналізу використовуються елементи теорії голоморфних функцій кількох комплексних змінних та їх інтегральних зображень; використовуються також і елементи класичної теорії потенціалу, властивості гармонічних функцій.

Наукова новизна та основні результати, які виносяться на захист.

Основними результатами роботи є такі:

1. Наведено узагальнюючих рівність $df=\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial \bar z}d\bar z$ співвідношень для $\mathbb{H}$-значних диференціальних форм $(m-1)$-вимірного об"єму в $\mathbb{R}^m$ /$m\in\{3;\ 4\}$/, що погоджені із класами ψ-гіперголоморфності. Указан прийом, який надає можливість у подальших міркуваннях позбутися певної асиметрії у комплексних та дійсних наслідках кватерніонної теорії функцій.
2. Сформульовано означення гіперпохідної кватерніоннозначної функції чотирьох дійсних змінних вздовж гіперплощини в $\mathbb{R}^4$, доведені теореми про властивості цієї гіперпохідної. Зокрема, установлений аналогічний комплексно-одновимірному випадку зв"язок між гіперголоморфністю і гіпердиференційовністю вздовж гіперплощини.
3. Описано класи ψ-гіперголоморфних $\mathbb{R}^4\to\mathbb{H}$-функцій, які містять в собі як властиву підмножину клас $A(\mathbb{C}^2;\ \mathbb{C}^2)$ голоморфних $\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$-відображень. Доведено, що $A(\mathbb{C}^2;\ \mathbb{C}^2)$ є перерізом двох таких різних класів ψ-гіперголоморфності.
4. Отримані формули для гіперпохідних інтегралів /у тому числі і сингулярних/ з кватерніонним ядром Коші $\mathcal{K}_\psi^{(4)}$ і, як наслідків, відповідних властивостей інтегралів з двохвимірним ядром Мартінеллі-Бохнера.
5. З"ясовано, при яких умовах форма $\omega_{MB}^{(2)}$ є комплексною складовою кватерніонної форми Коші $\mathcal{K}_\psi^{(4)}(x)\sigma_{\psi,x}^{(3)}$.
6. Доведено теорему про зведення інтеграла з ядром $\omega^{(2)}$ до потенціалу простого шару у $\mathbb{C}^2$ та критерій голоморфного продовження з межі однозв"язної області $\Omega\subset\mathbb{C}^2$ у термінах інтегралів з ядром $\omega^{(2)}$, який пояснює деякі установлені іншими авторами властивості таких інтегралів.
7. Доведено за класичною "комплексно-одновимірною" схемою В.Д.Купрадзе аналог формули Пуанкаре-Бертрана для повторних сингулярних інтегралів з кватерніонним ядром /1/. Як наслідки цього результату одержані формули переставлення порядку інтегрування та обернення для сингулярних інтегралів, зв"язаних із системами типу систем Мойсила-Теодореско /при цьому узагальне-

ний результат А.В.Біцадзе, отриманий їм іншим методом/, із теорією лапласових полів; одержані також і певні властивості повторних сингулярних інтегралів з ядрами $\omega^{(2)}_{MB}$ і $\omega^{(2)}$. Показано також, як у межах кватерніонного аналізу доводиться двохвимірний варіант теореми Аронова-Китманова про голоморфність функцій, які зображені своїм інтегралом Мартінеллі-Бохнера.

Результати, які виносяться на захист, є новими. Крім того, у дисертації розглянуті змістовні приклади застосування гіперкомплексних /кватерніонних/ методів для розв"язання деяких задач багатовимірного аналізу; при цьому одержані нові доведення відомих фактів, а також - ряд нових результатів.

Теоретична та практична цінність. Дана дисертація носить теоретичний характер. Результати дисертаційного дослідження, методи, які розвинені в роботі, можуть використовуватися у гіперкомплексному аналізі, при вивченні гіперкомплексними методами властивостей голоморфних функцій багатьох комплексних змінних та їх інтегральних зображень; при вивченні властивостей багатовимірних сингулярних інтегральних операторів. Крім того, результати дисертації можуть знайти практичне використання при дослідженні задач математичної та теоретичної фізики, теоретичної механіки.

Публікації і апробація роботи. Основні результати дисертації відображені в 5 опублікованих роботах, список яких наведено в кінці автореферата. Результати, які включено до дисертаційної роботи, одержані автором самостійно. В спільних публікаціях [1,3,4] науковому керівнику належать постановки задач та підходи до розв"язання деяких з них. Безпосередні доведення теорем проведені автором даної дисертації.

Основні результати дисертації доповідалися на конференції молодих вчених Одеського державного університету /Одеса, 1988 р./, на конференціях "Гаховські читання" /Одеса, 1990 р. і 1991 р./, на Всесоюзній школі з теорії функцій /Одеса, 1991 р./, на шістнадцятій Всесоюзній школі з теорії операторів в функціональних просторах /Нижній Новгород, 1991 р./, на міжнародній конференції, присвяченій пам"яті академіка М.П.Кравчука /Київ, 1992 р./, на семінарі "Лінійні оператори" Одеського держуніверситету /керівник - професор Василевський М.Л./, на семінарі з теорії функцій Одеського держуніверситету /керівник - професор Стороженко Е.О./, на Одеському міському семінарі з крайових задач та сингулярних інтегральних рівнянь /керівник - професор Литвинчук Г.С./, на семінарі з теорії функцій Харківського держуніверситету /керівник - член-кореспондент АН України, професор Ронкін Л.І./.

Структура та обсяг роботи. Дисертаційна робота складається із вступу, трьох глав, які поділені на дванадцять параграфів, списку літератури, який містить 79 найменувань. Зазначимо, що теореми, твердження і т.п. в дисертації завжди виділяються в окремі пункти: наприклад, запис "теорема 3.10" означає, що ця теорема розташована у пункті 10^{0} третього параграфа.

Робота викладена на 133 сторінках.

ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У вступі наводиться стислий огляд робіт за темою дисертації, а також викладаються основні результати, які були отримані автором.

У першій главі вивчаються ψ-гіперголоморфні і гіпердиференційовні кватерніоннозначні функції чотирьох дійсних змінних, впроваджується необхідне для подальшого поняття похідної за трьохвимірним "напрямком", який виділяється гіперплощиною, розглядаються класи гіперголоморфних функцій, які містять сім"ю усіх голоморфних $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$-відображень.

У §1 містяться деякі позначення і основна інформація про різноманітні способи зображення кватерніонів. Зазначимо, що допоміжні результати, які використовуються у роботі, наводяться в основному у початку кожної з глав.

У §2 наводяться означення кватерніонних операторів Коші-Рімана ${}^{\psi}\mathcal{D}$, $\mathcal{D}^{\psi}$ та $\mathbb{H}$-значних диференціальних форм $\sigma^{(m-1)}_{\psi,x}$ $(m-1)$-вимірного об"єму в $\mathbb{R}^m$, які узгоджені із структурним $\mathbb{H}$-вектором ψ , в якому один з кватерніонів $\psi^p = i_0$, а решта - суто уявні, тобто $Sc(\psi^k)= 0$, $k \neq p$. Причому для позбавлення певної асиметрії в результатах, що отримуються далі, запропоновано визначати диференціальну форму $\sigma^{(2)}_{\psi,x}$ за допомогою формули, яка залежить від того, який з кватерніонів структурного $\mathbb{H}$ -вектора ψ дорівнює дійсній одиниці i_0 :

$$\sigma^{(2)}_{\psi,x} := -\mathrm{sgn}\,\psi \begin{cases} -\psi^1 dx[1;0]+\psi^2 dx[2;0]-\psi^3 dx[3;0], & p=0 \\ \psi^0 dx[0;1]-\psi^2 dx[2;1]+\psi^3 dx[3;1], & p=1 \\ -\psi^0 dx[0;2]+\psi^1 dx[1;2]-\psi^3 dx[3;2], & p=2 \\ \psi^0 dx[0;3]-\psi^1 dx[1;3]+\psi^2 dx[2;3], & p=3. \end{cases} \qquad /6/$$

До цього розглядався лише випадок p = 0.

У цьому ж параграфі виписується необхідна для подальших міркувань формула

$$d_x(f(x)\sigma^{(2)}_{\psi,x} g(x)) = \frac{1}{2}\big(D^{\overline{\psi}}[f](x)\sigma^{(3)}_{\psi,x} g(x) + D^{\psi}[f](x)\sigma^{(3)}_{\overline{\psi},x} g(x) + f(x)\sigma^{(3)}_{\psi,x}\,{}^{\overline{\psi}}D[g](x) + f(x)\sigma^{(3)}_{\overline{\psi},x}\,{}^{\psi}D[g](x)\big), \qquad /7/$$

яка узагальнює співвідношення /М.Л.Василевський, М.В.Шапіро/

$$d_x(\sigma^{(2)}_{\psi,x} f(x)) = \frac{1}{2}\big(\sigma^{(3)}_{\psi,x}\,{}^{\overline{\psi}}D[f](x) + \sigma^{(3)}_{\overline{\psi},x}\,{}^{\psi}D[f](x)\big), \qquad /8/$$

що є у свою чергу кватерніонним варіантом рівності

$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar z}d\bar z$ із $\mathbb{C}^1$ -аналізу.

Крім того, розгортається техніка застосовування результатів кватерніонного аналізу до теорії функцій двох комплексних змінних: наводиться комплексна форма запису кватерніонних операторів Коші-Рімана, рівностей для диференціальних форм $\sigma^{(3)}_{\psi,x}$, $\sigma^{(2)}_{\psi,x}$.

Центральним у першій главі є §3, в якому надано означення /лівої/ ψ -гіперпохідної функції $f:\Lambda\cap\{x\in\mathbb{R}^4:|x-x^0|<\varepsilon\}\to\mathbb{H}$ вздовж гіперплощини $\Lambda:=\{x\in\mathbb{R}^4:\gamma(x):=\sum_{k=0}^{3} n_k x_k + d = 0\}$ /$d\in\mathbb{R}$, $\vec n=(n_0,n_1,n_2,n_3)$ - одиничний вектор нормалі до Λ у точці $x^0\in\Lambda$ /.

Функція f називається ліво- ψ -гіпердиференційовною у точці x^0 вздовж Λ , якщо існує $h\in\mathbb{H}$ такий, що для кожної послідовності невироджених орієнтовних 3-паралелепіпедів $\{\Pi_n\}_{n=1}^{\infty}$

$/\Pi_n := \{x^0+\sum_{k=1}^{3} h_k^{(n)} t_k \in \mathbb{R}^4 : (t_1,t_2,t_3)\in[0;1]^3\}, \partial\Pi_n := \{x^0+\sum_{k=1}^{3} h_k^{(n)} t_k \in \mathbb{R}^4 : (t_1,t_2,t_3)\in\partial([0;1]^3)\}/$, які задовольняють умовам $\Pi_n \subset \Lambda$ та $\operatorname{diam}\Pi_n \to 0$, $n \to \infty$, виконується співвідношення

$$\lim_{n\to\infty}[(\int_{\Pi_n}\sigma^{(3)}_{\psi,x})^{-1}\cdot\int_{\partial\Pi_n}\sigma^{(2)}_{\psi,x}f(x)] = h. \qquad /9/$$

Кватерніон $h =: {}'f_{\psi,\Lambda}(x^0)$ називається лівою ψ-гіперпохідною функції f у точці x^0 вздовж Λ.

Беручи до уваги геометричний зміст диференціальних форм $\sigma^{(3)}_{\psi,x}$ і $\sigma^{(2)}_{\psi,x}$, можна інтерпретувати $\int_{\Pi_n}\sigma^{(3)}_{\psi,x}$ і $\int_{\partial\Pi_n}\sigma^{(2)}_{\psi,x}f(x)$ як "приріст аргументу" та "приріст функції" відповідно /зазначимо, що таке тлумачення використовувалося A.Sudbery, але не набуло у нього посутнього розвитку/.

Далі у §3 доводяться

Теорема 3.10. Будь-яка функція $f\in C^1(V(x^0);\mathbb{H})$ / $V(x^0)$ - чотирьохвимірний окіл точки x^0 / є ліво- ψ -гіпердиференційовна у точці x^0 вздовж кожної гіперплощини $\Lambda\ni x^0$, причому

$$'f_{\psi,\Lambda}(x^0)=\tfrac{1}{2}{}^{\bar\psi}\mathcal{D}[f](x^0)-\tfrac{1}{2}n^2_{\bar\psi}{}^{\psi}\mathcal{D}[f](x^0),\ n_{\bar\psi}:=\sum_{k=0}^{3}\overline{\psi^k}n_k. \qquad /10/$$

і

Теорема 3.11. Нехай $\{f,g\}\subset C^1(V(x^0);\mathbb{H})$ і $f|\Lambda\cap V(x^0)=g|\Lambda\cap V(x^0)$. Тоді $'f_{\psi,\Lambda}(x^0)={}'g_{\psi,\Lambda}(x^0)$.

Теорема 3.13 установлює аналогічний комплексно-одновимірному випадкові зв"язок між гіперголоморфністю і гіпердиференційовністю вздовж гіперплощини:
Функція $f\in{}^{\psi}\mathfrak{M}(V(x^0);\mathbb{H}):=\ker{}^{\psi}\mathcal{D}(V(x^0))$ в тому і тільки в тому випадку, коли для будь-якої точки $y\in V(x^0)$ $'f_{\psi,\Lambda}(y)$ не залежить від вибору гіперплощини $\Lambda\ni y$.

Зазначимо, що в пункті 3.12° указано /для стандартно-гіперголоморфного випадку і $\Lambda:=\{x=(x_0,x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^4 : x_0=0\}\cong\mathbb{R}^3$ / на природний зв"язок операції гіпердиференціювання вздовж Λ з класичними диференціальними операціями grad, div, rot в $\mathbb{R}^3$.

В пунктах 3.15° - 3.19° описано класи ${}^{\psi}\mathfrak{M}$ ψ-гіперголоморфності / $\psi^p = i_0$ при деякому $p\in\{\overline{0,3}\}$, $Sc(\psi^k)=0$, $k\neq p$/, які містять в собі всі голоморфні $\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$-відображення. Доведе-

но, що для кожного такого класу існує таке $\theta \in [0; 2\pi)$, що ${}^{\psi}\mathfrak{M} = {}^{\psi_\theta}\mathfrak{M}$, де $\psi_\theta := \{i_0, i_1, i_1 e^{i_1\theta} i_2, e^{i_1\theta} i_2\}$.
При цьому для $f \in {}^{\psi}\mathfrak{M}$ ${}'f_\psi(z) := \frac{1}{2}\, {}^{\overline{\psi}}\mathcal{D}[f](z) = \frac{\partial f}{\partial x_p}(z)$, $z = (x_0 + i_1 x_1;\ x_2 + i_1 x_3) \in \mathbb{C}^2$.

В деяких роботах з кватерніонного аналізу виділявся /але один/ клас гіперголоморфності, який містить як властиву підмножину $A(\mathbb{C}^2; \mathbb{C}^2)$. В дисертації ж доводиться

Твердження 3.17. Нехай $\{\theta_1; \theta_2\} \subset [0; 2\pi)$, $\theta_1 \neq \theta_2$. Тоді $A(\mathbb{C}^2; \mathbb{C}^2) \cong {}^{\psi_{\theta_1}}\mathfrak{M} \cap {}^{\psi_{\theta_2}}\mathfrak{M}$.

У другій главі у розвиток ідей та методів §§2 - 3 доводяться формули диференціювання інтегралів

$$ {}^{\psi}K[f](x) := \int_{\partial\Omega} \mathcal{K}_{\psi}^{(4)}(\tau - x)\, \sigma_{\psi,\tau}^{(3)}\, f(\tau) \qquad /11/ $$

з кватерніонним ядром Коші, тобто переноситься на кватерніонну ситуацію відомий результат теорії інтегралів з комплексно-одновимірним ядром Коші:

$$ \left(\int_\gamma f(\tau)(\tau - u)^{-1} d\tau\right)'_u = \int_\gamma f'(\tau)(\tau - u)^{-1} d\tau, \qquad /12/ $$

де $\gamma \subset \mathbb{C}$ - замкнений контур. При $u \notin \gamma$ у лівій частині /12/ - похідна голоморфної функції, при $u \in \gamma$ - похідна сингулярного інтеграла вздовж контура інтегрування. Розв"язання цієї задачі у межах гіперкомплексного підходу вимагає застосування і результатів §2, і впровадженої у §3 операції гіпердиференціювання вздовж гіперплощини.

Основний гіперкомплексний результат другої глави -

Теорема 4.3. Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ - скінченна однозв"язна область, $\partial\Omega := \{x \in \mathbb{R}^4 : \rho(x) = 0\}$, $\rho \in C^1(\mathbb{R}^4; \mathbb{R})$, $\operatorname{grad} \rho|\partial\Omega(t) \neq 0\ \forall t \in \partial\Omega$.
Тоді при $f \in C^1(\partial\Omega; \mathbb{H})$ і $x \notin \partial\Omega$ ${}'({}^{\psi}K[f])_\psi(x) = {}^{\psi}K[{}'f_{\psi,T}](x)$. /13/
/$T(\tau)$ - дотична гіперплощина до $\partial\Omega$ у точці $\tau \in \partial\Omega$ /.

Із цієї теореми отримані аналоги формул Сохоцького-Племеля для граничних значень гіперпохідної інтеграла /11/. Як застосування попередньої теореми у §5 доводиться формула для гіперпохідної вздовж поверхні інтегрування сингулярного інтеграла з ядром $\mathcal{K}_{\psi}^{(4)}$:

Теорема 5.3. Якщо в умовах теореми 4.3 $\rho \in C^{2,\mu}(\mathbb{R}^4; \mathbb{R})$, $\mu \in (0; 1)$, $f \in C^{1,\mu}(\partial\Omega; \mathbb{H})$, то для $t \in \partial\Omega$ ${}'({}^{\psi}K[f])_{\psi, T(t)}(t) = {}^{\psi}K[{}'f_{\psi,T}](t)$. /14/

В пункті 5.5^0 зазначено, що для області $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^4 : x_0 < 0\}$

теорема 5.3 є відбиттям властивостей сингулярних інтегралів з ядрами Рісса.

§6 роботи присвячений умовам, при яких форма $\omega^{(2)}_{MB}$ є комплексною складовою кватерніонної форми Коші.

Формула

$$\int_{\partial\Omega}\omega^{(2)}(\zeta-u)f(\zeta)=2\int_{\partial\Omega}g(\zeta,u)|\operatorname{grad}\rho(\zeta)|^{-1}\frac{\partial(f,\rho)(\zeta)}{\partial(\zeta_1,\zeta_2)}\,dS_{\partial\Omega} \qquad /15/$$

/ $g(\zeta,u)$ - фундаментальний розв"язок оператора Лапласа $\Delta_{\mathbb{C}^2}$ /, яка доведена в пункті 7.2°, показує, що інтеграл з двохвимірним неголоморфним ядром Мартінеллі-Бохнера /подібно до логарифмічного потенціалу подвійного шару в $\mathbb{R}^2$ / за допомогою потенціалу простого шару в $\mathbb{C}^2$ добудовується до гіперголоморфного в $\mathbb{H}\setminus\partial\Omega$ інтеграла /II/. Тим самим стає можливим вивчати інтегральне зображення Мартінеллі-Бохнера в $\mathbb{C}^2$ гіперкомплексними методами, які аналогічні розвиненим в $\mathbb{C}^1$-аналізі.

Особливість комплексно-двохвимірного випадка, яка описана у §7, надає, наприклад, можливість довести теорему 7.5 - критерій голоморфного продовження з межі скінченної однозв"язної області $\Omega\subset\mathbb{C}^2$ у термінах інтегралів з ядром $\omega^{(2)}$.

У §§8 - 9 дисертації за допомогою результатів §§3 - 5 отримані формули диференціювання інтегралів з ядрами $\omega^{(2)}_{MB}$ і $\omega^{(2)}$:

Теорема 8.5. Нехай $\Omega\subset\mathbb{C}^2$ - скінченна однозв"язна область з межою $\partial\Omega=\{z\in\mathbb{C}^2:\rho(z)=0\}$, $\rho\in C^1(\mathbb{R}^4;\mathbb{R})$, $\operatorname{grad}\rho|\partial\Omega(z)\neq 0\ \forall z\in\partial\Omega$. Тоді при всіх $z\notin\partial\Omega$ для $f\in C^1(\partial\Omega;\mathbb{C})$ здійснюються рівності /к$\in\{1;\,2\}$ /:

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial N_1[f](z)}{\partial z_k}&=N_1\Big[\frac{\partial f}{\partial\zeta_k}(\zeta)-|\operatorname{grad}\rho(\zeta)|^{-2}\frac{\partial\rho}{\partial\zeta_k}(\zeta)\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial\rho}{\partial\zeta_j}(\zeta)\cdot\frac{\partial f}{\partial\bar\zeta_j}(\zeta)\Big](z)-\\&\quad-Z_{\mathbb{C}}N_2\Big[Z_{\mathbb{C}}\Big[\frac{\partial\rho}{\partial\zeta_k}(\zeta)\cdot|\operatorname{grad}\rho(\zeta)|^{-2}\frac{\partial(f,\rho)(\zeta)}{\partial(\bar\zeta_1,\bar\zeta_2)}\Big]\Big](z),\\\frac{\partial N_2[f](z)}{\partial z_k}&=N_2\Big[\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\zeta_k}-|\operatorname{grad}\rho(\zeta)|^{-2}\frac{\partial\rho}{\partial\zeta_k}(\zeta)\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial\rho(\zeta)}{\partial\zeta_j}\cdot\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\bar\zeta_j}\Big](z)-\\&\quad-Z_{\mathbb{C}}N_1\Big[Z_{\mathbb{C}}\Big[\frac{\partial\rho(\zeta)}{\partial\zeta_k}\cdot|\operatorname{grad}\rho(\zeta)|^{-2}\frac{\partial(f,\rho)(\zeta)}{\partial(\bar\zeta_1,\bar\zeta_2)}\Big]\Big](z),\end{aligned}\right. \qquad /16/$$

де $Z_{\mathbb{C}}$ - оператор комплексного спряження.

$$N_1[f](z) := \int_{\partial\Omega} \omega_{MB}^{(2)}(\zeta - z) f(\zeta) \quad ; \quad N_2[f](z) := \int_{\partial\Omega} \overline{\omega^{(2)}(\zeta - z)} f(\zeta).$$

Відповідні формули виписані в дисертації для формальних похідних по $\overline{z}_k$.

Одночасно з роботою І.М.Мітельмана і М.В.Шапіро [1] О.М.Китманов анонсував аналогічний результат для інтегралів з n-вимірним ядром Мартінеллі-Бохнера, який спирається на зв"язок інтеграла Мартінеллі-Бохнера з потенціалами. В запропонованій дисертації реалізується, очевидно, із структурної точки зору зовсім інший - більш адекватний, на наш погляд, ролі інтегрального зображення Мартінеллі-Бохнера - підхід. Зазначимо мимохідь, що в роботах О.М.Китменова остаточні рівності для формальних похідних інтеграла Мартінеллі-Бохнера наведені із спотворенням.

Нехай $F_k, F_{\overline{k}}, G_k, G_{\overline{k}}$ /$k \in \{1; 2\}$/ - формальні диференціальні оператори, які визначені рівностями

$$F_{k(\overline{k})}[f](u) := \frac{\partial f(u)}{\partial u_k (\partial \overline{u}_k)} - |\mathrm{grad}\, \rho(u)|^{-2} \frac{\partial \rho(u)}{\partial u_k (\partial \overline{u}_k)} \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \rho(u)}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial f(u)}{\partial \overline{u}_j},$$

$$G_{k(\overline{k})}[f](u) := \frac{\partial \rho(u)}{\partial u_k (\partial \overline{u}_k)} \cdot |\mathrm{grad}\, \rho(u)|^{-2} \cdot \frac{\partial (f, \rho)(u)}{\partial (\overline{u}_1, \overline{u}_2)}.$$

Тоді для $\rho \in C^{2,\mu}(\mathbb{R}^4; \mathbb{R})$, $\mu \in (0; 1)$, $f \in C^{1,\mu}(\partial\Omega; \mathbb{C})$ при всіх $u \in \partial\Omega$ здійснюються такі співвідношення /$k \in \{1; 2\}$/

$$\begin{aligned}
&F_k[N_1[f]](u) - Z_{\mathbb{C}} G_{\overline{k}}[Z_{\mathbb{C}} N_2[f]](u) = N_1[F_k[f]](u) - Z_{\mathbb{C}} N_2[Z_{\mathbb{C}} G_k[f]](u),\\
&F_k[Z_{\mathbb{C}} N_2[f]](u) + Z_{\mathbb{C}} G_{\overline{k}}[N_1[f]](u) = -Z_{\mathbb{C}} N_1[Z_{\mathbb{C}} G_k[f]](u) - N_2[F_k[f]](u),\\
&F_{\overline{k}}[N_1[f]](u) - Z_{\mathbb{C}} G_k[Z_{\mathbb{C}} N_2[f]](u) = N_1[F_{\overline{k}}[f]](u) - Z_{\mathbb{C}} N_2[Z_{\mathbb{C}} G_{\overline{k}}[f]](u),\\
&F_{\overline{k}}[Z_{\mathbb{C}} N_2[f]](u) + Z_{\mathbb{C}} G_k[N_1[f]](u) = -Z_{\mathbb{C}} N_1[Z_{\mathbb{C}} G_{\overline{k}}[f]](u) - N_2[F_{\overline{k}}[f]](u).
\end{aligned} \qquad /17/$$

Співвідношення /17/ становлять зміст теореми 9.1, яка отримана як комплексний наслідок теореми 5.3, і є новими властивостями сингулярних інтегралів з ядром $\omega_{MB}^{(2)}$.

Третя глава дисертації присвячена кватерніонному аналогу формули Пуанкаре-Бертрана й отриманню із нього формул переставлення порядку інтегрування та обернення для багатовимірних сингулярних інтегралів, які зв"язані з інтегралами з ядром /I/.

У §10 отримана формула Пуанкаре-Бертрана для сингулярних інтегралів з ядром /I/, причому доведення проводиться за схемою, яка відмінна від застосованої А.В.Біцадзе при вивченні аналога інтеграла Коші, зв"язаного з теорією системи Мойсила-Теодореско. А саме: реалізується "комплексно-одновимірна" схема В.Д.Купрадзе, яка грунтується на використовуванні кватерніонного варіанта рівності $\int_{\partial\Omega}(\tau-t)^{-1}(\tau-\tau_1)^{-1}d\tau=0,\ \{t;\tau_1\}\subset\partial\Omega,\ t\neq\tau_1.$ /18/

Ця рівність у $\mathbb{C}^1$ -аналізі легко доводиться розкладанням підінтегральної функції на найпростіші дробі; проте, в роботах А.І.Сербіна була допущена помилка, яка полягала якраз у тому, що для інтегралів з ядром Мартінеллі-Бохнера аналог /18/ насправді не здійснюється. Точний аналог важливого співвідношення /18/ установлюється в межах саме гіперкомплексного підходу:

<u>Теорема 10.3</u>. Нехай Γ - гладка гіперповерхня без краю, яка обмежує скінченну однозв"язну область $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ $/m\in\{3;\ 4\}$ /. Тоді для $\{t\ ;\tau_1\}\subset\ \Gamma$ $/t\neq\tau_1$ / виконується рівність

$$\int_{\Gamma_\tau}\mathcal{K}_\psi^{(m)}(\tau-t)\,\sigma_{\psi,\tau}^{(m-1)}\,\mathcal{K}_\psi^{(m)}(\tau-\tau_1)=0. \qquad /19/$$

Сама ж формула Пуанкаре-Бертрана для інтегралів з кватерніонним ядром Коші становить зміст <u>теореми</u> 10.8: якщо Γ - ляпуновська гіперповерхня без краю в $\mathbb{R}^m$ $/m\in\{3;\ 4\}$ /, то для $f\in C^{0,\mu}(\Gamma\times\Gamma;\mathbb{H})$ у кожній точці $t\in\Gamma$ здійснюється рівність

$$\int_{\Gamma_{\tau_1}}\int_{\Gamma_\tau}\mathcal{K}_\psi^{(m)}(\tau-t)\sigma_{\psi,\tau}^{(m-1)}\mathcal{K}_\psi^{(m)}(\tau_1-\tau)\sigma_{\psi,\tau_1}^{(m-1)}f(\tau_1,\tau)+\frac{1}{4}f(t,t)= \qquad /20/$$

$$=\int_{\Gamma_\tau}\int_{\Gamma_{\tau_1}}\mathcal{K}_\psi^{(m)}(\tau-t)\sigma_{\psi,\tau}^{(m-1)}\mathcal{K}_\psi^{(m)}(\tau_1-\tau)\sigma_{\psi,\tau_1}^{(m-1)}f(\tau_1,\tau).$$

Теоремі 10.8 передують традиційні /за М.І.Мусхелішвілі, А.І.Сербіним та ін.; у максимально загальній постановці - за С.Г.Міхліним/ міркування щодо переставлення сингулярного інтегрального оператора з ядром /I/ і інтегрального оператора із слабкою особливістю.

Результати §10 надали можливість у §11 виписати формули переставлення порядку інтегрування та обернення для сингулярних інтегралів, які зв"язані з зображенням розв"язків еліптичних систем лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних із сталими коефіцієнтами

$$\begin{pmatrix} D_0 & -D_1 & -D_2 & -D_3 \\ D_1 & D_0 & -D_3 & D_2 \\ D_2 & D_3 & D_0 & -D_1 \\ D_3 & -D_2 & D_1 & D_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f^0 \\ f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{pmatrix} = 0; \quad D_j = \sum_{k=4-m}^{3} \psi_j^k \partial_k ; \ \psi^k = \sum_{s=1}^{3} \psi_s^k i_s, \ k \in \{1;2;3\}, \quad \{\psi_s^k\} \subset R; \ \psi^0 = i_0 \ \text{/при } m = 4\text{/},$$

що узагальнюють систему Мойсила-Теодореско. Крім того, у §II розглянуті наслідки теорем I0.3 і I0.6 для сингулярних інтегралів, які зв"язані з теорією ге фізичних полів.

У §I2 дисертації йдеться про застосування результатів §I0 до вивчення властивостей сингулярних інтегралів з ядрами $\omega_{MB}^{(2)}$ і $\omega^{(2)}$. В пункті I2.2^0 наведені співвідношення /$\{z;\zeta\} \subset \Gamma, z \neq \zeta$/

$$\int_{\Gamma_\xi} \omega_{MB}^{(2)}(\xi - z)\omega_{MB}^{(2)}(\zeta - \xi) = \int_{\Gamma_\zeta} \omega^{(2)}(\xi - z)\overline{\omega^{(2)}(\zeta - \xi)}, \qquad /21/$$

$$\int_{\Gamma_\xi} \omega_{MB}^{(2)}(\xi - z)\omega^{(2)}(\zeta - \xi) = -\int_{\Gamma_\xi} \omega^{(2)}(\xi - z)\overline{\omega_{MB}^{(2)}(\zeta - \xi)}. \qquad /22/$$

за допомогою яких установлений взаємозв"язок результатів §I0 дисертації з рівностями, що отримані раніше М.Л.Василевським і М.Р.Шапіро: $N_1^2 = \frac{1}{4} I + (Z_{\mathbb{C}} N_2)^2, \ N_1 Z_{\mathbb{C}} N_2 \quad + Z_{\mathbb{C}} N_2 \ N_1 \quad = 0.$ /23-24/

Із результатів §§I0, I2 і результатів, які нещодавно були отримані О.М.Китмановим, Б.Б.Преновим, М.М.Тархановим, випливає, наприклад, така властивість інтегралів з ядром $\omega^{(2)}$:

$$\int_{\Gamma_\xi}\int_{\Gamma_\zeta} \omega^{(2)}(\xi - z)\overline{\omega^{(2)}(\zeta - \xi)} f(\zeta, \xi) = \int_{\Gamma_\zeta}\int_{\Gamma_\xi} \omega^{(2)}(\xi - z)\overline{\omega^{(2)}(\zeta - \xi)} f(\zeta, \xi), \ z \in \Gamma. \qquad /25/$$

Крім того, у §I2 за допомогою рівності /23/ і результатів §7 у межах гіперкомплексного аналізу отримано просте доведення двохвимірного варіанту теореми Аронова-Китманова про голоморфність в $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ функції $f \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{C})$, яка зображена своїм інтегралом Мартінеллі-Бохнера.

Автор вдячний науковому керівнику Михайлові Веніаміновичу Шапіро за постановку задач та постійну увагу до роботи.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ДИСЕРТАЦІЇ ВІДОБРАЖЕНІ В ПУБЛІКАЦІЯХ:

1. Мительман И.М., Шапиро М.В. Производные интегралов с ядром Мартинелли-Бохнера и кватернионная теория функций// XVI Всесоюзная школа по теории операторов в функциональных пространствах: тезисы докладов. - Нижний Новгород, 1991. - С.154.

2. Мительман И.М. Кватернионный интеграл Коши и некоторые свойства интегралов с двумерным ядром Мартинелли-Бохнера// Международная конференция, посв. памяти акад. М.Ф.Кравчука: тезисы докладов. - Киев, 1992. - С.132.

3. Mitelman I.M., Shapiro M.V. Differentiation of the Martinelli-Bochner integrals and the notion of hyperderivability.- México, 1992.- 29 p.- (Preprint / Depart. of Math., CINVESTAV del IPN; No 107).

4. Mitelman I.M., Shapiro M.V. Formulae of changing of integration order and of inversion for some multidimensional singular integrals and hypercomplex analysis.- México, 1993.- 17 p. (Preprint / Depart. of Math., CINVESTAV del IPN; No 116). а також опубліковано у Journal of Natural Geometry (London).- 1994, No 5.- P. 11 - 27.

5. Мительман И.М. Гиперпроизводная сингулярного интеграла с кватернионным ядром Коши и некоторые свойства сингулярных интегралов с ядром Мартинелли-Бохнера в $\mathbb{C}^2$/ Одесский ун-т.- Одесса, 1993. - 34 с. - Деп. в ГНТБ Украины 06.12.93 № 2371 - Ук93.

Подп.к печати 21.03.94г. Формат 60х84 1/16.
Об"ем 0,7уч.изд.л. 1,0п.л. Заказ № 315. Тираж 80экз.
Гортипография Одесского управления по печати,цех№3.
Ленина 49.