ХАРЬКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Бабий Владимир Иванович

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ СЖАТИЙ И НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КРИВЫЕ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

01.01.01 - математический анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание
ученой степени кандидата
физико-математических наук

Харьков - 1994

Диссертация является рукописью.

Работа выполнена в Харьковском государственном университете

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор Харьковского института инженеров железнодорожного транспорта Ковалишина Ирина Васильевна

доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического моделирования Харьковского государственного университета, профессор Руткас Анатолий Георгиевич.

Ведущая организация - Институт математики АН Украины, г. Киев.

Защита состоится "03" июне 1994 г.. в 17^{00} час. на заседании специализированного совета К 053.06.02. Харьковского государственного университета (310077, г.Харьков,пл.Свободы, 4, ауд.6 -48).

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке ХГУ.

Автореферат разослан "26" апреля 1994 г.

Ученый секретарь
специализированного совета А.С.Сохин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Объектом исследования в диссертационной работе являются нестационарные кривые, порождаемые задачей Коши в гильбертовом пространстве H вида $\frac{dx}{dt} = iAx,\ x|_{t=0} = x_0$, где A - неунитарный оператор, причем степень неунитарности описывается нестрицательным числом $r = \dim \overline{(I - A^*A)H}$. При помощи скалярного произведения $\langle z_t, z_s \rangle$ строится корреляционная теория некоторых классов случайных процессов, рассматриваемых как кривые в соответствующем гильбертовом пространстве.

Такой подход к исследованию случайных процессов реализован А.Н.Колмогоровым в случае $A = A^*$, т.е. для стационарных в широком смысле случайных процессов. А.Н.Колмогоров построил корреляционную и спектральную теорию стационарных случайных процессов на основе спектральных разложений самосопряженных или унитарных операторов. Впоследствии подход А.Н.Колмогорова был развит в работах К.Бохнера, Г.Крамера, М,Лоэва, К.Карунена. А.М.Яглома, Ю.А.Розанова, М.С.Пинскера и др., в которых эффективно использован гильбертов подход к исследованию стационарных или тесно связанных с ними случайных процессов.

В 1971 г. М.С.Лившицем и А.А.Янцевичем на основе спектральной теории несамосопряженных операторов с конечномерным подпространством неэрмитовости построена корреляционная теория нестационарных случайных процессов конечного ранга нестационарности.

Треугольные и универсальные модели операторов, сконструированные М.С.Лившицем, А.В.Кужелем, М.С.Бродским, оказались адекватным аппаратом для построения корреляционной спектральной теории широких классов нестационарных случайных процессов, причем была дана вероятностная интерпретация таких понятий, как размерность неэрмитова подпространства, спектр оператора, характеристическая оператор-функция. Аналогично, на основе спектральной теории неунитарных операторов, созданной в работах М.С.Лившица, А.В.Кужеля, С.Надя, К.Фойяша, В.Г.Поляцкого, В.М.Бродского, И.Ц.Гохберга, А.А.Янцевичем и Б.Беррабахом построена корреляционная и спектральная теория широких классов нестационарных последовательностей гильбертовых пространств.

Другими аргументами для выбора темы диссертационной работы являются возможность применения развиваемых математических методов к задачам фильтрации и прогноза процессов, а также тесная связь с теорией аналитических функций в случае ограниченного оператора.

Цель работы. Построить универсальные модели квазиунитарных операторов и на их основе создать корреляционную и спектральную теорию нестационарных кривых бесконечного ранга нестационарности.

Методы исследования являются в основном спектрально-аналитическими: теория квазиунитарных операторов в гильбертовом пространстве, теория аналитических функций, уравнения в частных производных математической физики.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

I. Построение универсальных моделей сжатий.

2. Представления эрмитово неотрицательных ядер, отвечающих нестационарным кривым в гильбертовом пространстве бесконечного ранга.

3. Выделение и реализация классов нестационарных кривых в гильбертовых пространствах, конструируемых при помощи треугольных и универсальных моделей операторов.

4. Методы продолжения линейных систем до ассоциированных с операторными узлами.

5. Установление связи между гауссовскими аналитическими случайными процессами и каноническими разложениями целых функций.

6. О порядке убывания произведения Бляшке в верхней полуплоскости.

7. Связь между вполне регулярностью роста функции и слабой сходимостью некоторого семейства функций.

Научная новизна. В основные положения, выносимые на защиту, включены только новые результаты. Построенные универсальные модели квазиунитарных сжатий используются для введения и исследования новых классов нестационарных кривых в гильбертовых пространствах. Изложены также новые результаты автора по теории роста голоморфных функций в верхней комплексной полуплоскости, тесно связанные со свойствами выборочных функций аналитических случайных процессов.

Обоснованность и достоверность результатов и выводов обусловлена использованием строгих математических методов.

Диссертация выполнена в русле важнейшей научно-исследовательской темы "Теория несамосопряженных и неунитарных операторов с приложениями в теории линейных систем и случайных функций" (гос. рег. № 0182.4029433).

Теоретическая и практическая значимость. Работа связана с построением универсальных моделей сжатий и их использованием в корреляционной теории нестационарных кривых в гильбертовых пространствах бесконечного ранга. Построенная в диссертационной работе корреляционная теория некоторых классов нестационарных случайных процессов может быть использована при моделировании нестационарных случайных сигналов и случайных сред в радиофизике, а также для анализа и синтеза линейных систем в пространствах состояний.

Апробация работы и публикации. Результаты диссертации докладывались на семинарах по теории линейных операторов на кафедре высшей математики и информатики Харьковского государственного университета, на семинарах по теории функций многих косплексных переменных проф. Л.И.Ронкина, на IУ Международном симпозиуме "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики и сингулярные интегральные уравнения" (май 1993 г., г. Харьков), на Всесоюзной конференции по теории функций в г. Черноголовка (1986 г.), на школе по теории функций в г. Донецке (1986 г.).

Основные результаты диссертации опубликованы в 7 работах, приведенных в конце автореферата.

Объем и структура работы. Диссертация изложена на 138 страницах машинописного текста, состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы из 68 наименований работ советских и зарубежных авторов и 2 рисунков.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе строятся универсальные модели сжимающих операторов. В § I главы I рассматриваются некоторые свойства преобразования Кэли операторов.

В § 2 главы I строятся универсальные модели сжимающих операторов.

Пусть T - квазиунитарное сжатие ранга $\rho_T < \infty$, такое что оператор $(I-T)$ - обратим в узком смысле. Обозначим через $\{\lambda_k\}_{k=1}^{N}$ - последовательность собственных значений оператора T внутри единичного круга. Рассмотрим оператор $A = i(I+T)(I-T)^{-1}$.

Известно, что для детерминанта характеристической оператор-функции $W_A(\lambda)$ оператора A имеет место представление

$$\det W_A(\lambda)=\prod_{k=1}^{N}\frac{\lambda-\overline{\lambda}_k}{\lambda-\lambda_k}\exp\left\{i\int_0^{\ell}\frac{dx}{\lambda-\alpha(x)}\right\}\quad(\ell>0),\tag{0.1}$$

где $\left\{\lambda_k=i\frac{1+\xi_k}{1-\xi_k}=a_k+i\frac{1-|\xi_k|^2}{|1-\xi_k|^2},\ \operatorname{Im}a_k=0\right\}$ – последовательность невещественных собственных значений оператора A, $\alpha(x)$ – ограниченная неубывающая функция на $[0,\ell]$.

Определим в $L^2([0,a],\mu)$ (где $\mu(x)$ – специальным образом построенная мера) оператор $\hat{A}$:

$$\hat{A}f(x)=\hat{\alpha}(x)f(x)+i\int_x^a f(t)\,d\mu(t),\tag{0.2}$$

где $\hat{\alpha}(x)$ на $[0,\ell)$ – ступенчатая, непрерывная слева, комплекснозначная функция, точки разрыва которой c_k $(k=1,2,\dots,N)$, и скачок в этих точках $\lambda_k=i(1+\xi_k)(1-\xi_k)^{-1}$, а на $[\ell,a]$ $\hat{\alpha}(x)=\alpha(x-\ell)$, где функция $\alpha(x)$ взята из представления (0.1).

Теорема I.5. Пусть T – простое квазиунитарное сжатие ранга $r_T\le r<\infty$, такое что оператор $(I-T)^{-1}$ существует в узком смысле. Тогда существует унитарный оператор S, действующий в гильбертовом пространстве $\mathfrak{M}$, такой что T – унитарно эквивалентен сужению оператора $\tilde{S}=\tilde{T}\oplus S$, действующему в пространстве $\underbrace{L^2([0,a],\mu)\oplus\dots\oplus L^2([0,a],\mu)}_{r}\oplus\mathfrak{M}$, на некоторое инвариантное подпространство. Оператор $\tilde{T}$ задается формулой $\tilde{T}=\underbrace{\hat{T}\oplus\dots\oplus\hat{T}}_{r}$, $\hat{T}=(\hat{A}-iI)(\hat{A}+iI)^{-1}$, где $\hat{A}$ имеет вид (0.2).

В § 3 главы I строится универсальная модель для системы дважды перестановочных операторов сжатия и доказывается

теорема I.6. Пусть $T_1,\dots,T_n$ – система дважды перестановочных операторов сжатия, действующих в гильбертовом пространстве H и удовлетворяющих условиям:

1. Операторы $T_1,\dots,T_n$ вполне неунитарные.

2. Непрерывный спектр каждого T_k $(k=1,2,\dots,n)$ сосредоточен в точке $\tau=-1$.

3. Дискретный спектр каждого T_k может иметь предельные точки лишь в точке $\tau=-1$.

4. $\overline{\bigcup\limits_{r_1,\dots,r_n\ge0}T_1^{r_1}\cdots T_n^{r_n}H_0}=H$, $H_0=\bigcap\limits_{s=1}^{n}(I-T_s^*T_s)H$.

Тогда система $T_1,\dots,T_n$ унитарно эквивалентна сужению на инвариантное относительно всех операторов $\tilde{T}_1,\dots,\tilde{T}_n$ подпространство модельного пространства $\tilde{H}$ системе $\tilde{T}_1,\dots,\tilde{T}_n$, которые строятся только по спектру.

Во второй главе рассматриваются ассоциированные открытые системы. В первом параграфе изучаются линейные дискретные системы, ассоциированные с локальным узлом X :

$$\begin{cases} i x_{n+1} + A x_n = \varphi u_n \\ v_n = u_n - i\varphi^+ x_n \qquad \left(X=(A,H,\varphi,E,J), \frac{A-A^*}{i} = \varphi\varphi^+, \varphi^+ = J\varphi^*, J=J^*, J^2=I\right) \end{cases} \tag{0.3}$$

для которой закон "сохранения энергии" имеет вид

$$\langle x_{n+1}, x_n\rangle + \langle x_n, x_{n+1}\rangle = \|u_n\|^2 - \|v_n\|^2.$$

Во второй параграфе получен закон "сохранения энергии" вида $\left\|\frac{dh}{dt}\right\|^2 - \|h\|^2 = \|u\|^2 - \|v\|^2$ для линейных непрерывных открытых систем, ассоциированных с метрическим узлом M .

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} = Th + \Phi u \ , \ u|_{t=0} = u_0 \\ v = Ku + \Psi h \end{cases} \tag{0.4}$$

$$\left(M = \begin{pmatrix} T & \Phi \\ \Psi & K \end{pmatrix}, I - T^*T = \Psi^+\Psi, I - K^+K = \Phi^+\Phi, T^*\Phi = -\Psi^+K\right).$$

В третьем параграфе произвольная линейная дискретная система вида (0.3) расширяется до системы, ассоциированной с локальным узлом только за счет внешнего пространства, причем внутреннее состояние исходной системы совпадает с внутренним состоянием расширенной при специальном входе вида $u = (u_1(n), 0, 0, u_2(n), 0)$, а выход исходной системы совпадает с 4-й компонентой выхода расширенной системы. Аналогично, произвольная линейная непрерывная система вида (0.4) расширяется до системы, ассоциированной с метрическим узлом, тоже только за счет внешнего пространства. Внутреннее состояние исходной системы совпадает с внутренним состоянием расширенной системы при входе вида $(y(t), 0, 0)$, а выход исходной системы совпадает со 2-й компонентой выхода расширенной системы.

Четвертый параграф посвящен построению правил сцепления открытых систем для рассмотренных выше двух специальных случаев.

В § 5 построена более общая теория расширения линейных систем до ассоциированных с операторными узлами.

Вводится понятие $L'L$ -продолжения.

<u>Определение 2.4</u>. Назовем локальный узел $\widetilde{X} = (T, H, \Phi, \widetilde{E}, \widetilde{\mu})$ $L'L$-продолжением линейного узла $X = (T, H, \varphi, \Psi, E)$, если существуют такие линейные отображения $L: E \to \widetilde{E}$ и $L': \widetilde{E} \to E$, удовлетворяю-

щие условию $L'L=I$, что $L'\Phi=\Psi$, $\Phi^{+}L=\varphi$. Поставим в соответствие метрическому узлу X два уравнения: $h_{n+1}=Th_n+\varphi u_n$, $h_0=0$; $v_n=\Psi h_n+Ku_n$. Эта пара отображений $H\oplus E\to H$, $H\oplus E\to H\oplus F$ является ассоциированной открытой системой.

Определение 2.5. Открытая система $F_{\widetilde{X}}(\widetilde{R},\widetilde{S})$ называется $L'L$-продолжением открытой системы $F_X(R,S)$, если внутренние пространства у них совпадают и существуют линейные отображения $L:E\to\widetilde{E}$ и $L':\widetilde{E}\to E$, удовлетворяющие условию $L'L=I$, такие что $R=\widetilde{R}L$; $S=L'\widetilde{S}L$.

Теорема 2.1. Всякий линейный узел X обладает $L'L$-продолжением $\widetilde{X}$, при этом открытая система, ассоциированная с $\widetilde{X}$, является $L'L$-продолжением открытой системы, ассоциированной с X.

Теорема 2.2. Пусть заданы линейные узлы X_m $(m=1,\dots,n)$. У них существуют такие L'_mL_m-продолжения $\widetilde{X}_m$, что локальный узел $\widetilde{X}=\widetilde{X}_1\vee\dots\vee\widetilde{X}_n$ является L'_nL_1-продолжением узла $X=X_1\vee\dots\vee X_n$.

Далее вводится понятие оцепления по подпространству и доказывается, что сцепление по подпространству локальных узлов есть локальный узел (теорема 2.3).

В этом параграфе рассмотрено также продолжение с боковыми каналами связи.

Третья глава содержит четыре параграфа.

В первом параграфе получен критерий линейной представимости.

Определение 3.1. Кривая ξ_t называется эволюционно представимой в гильбертовом пространстве H_ξ, если она является решением дифференциального эволюционного уравнения $L_t\xi_t=iA\xi(t)$, где A - линейный ограниченный оператор, а оператор L_t имеет вид $L_t=\sum_{k=0}^{n}c_k(t)\frac{d}{dt^k}$, где $c_k(t)$ - скалярные комплекснозначные функции.

Рассмотрим теперь операторы A, слабо отклоняющиеся от операторов, удовлетворяющих соотношению $A^*A=\alpha I\,(\alpha>0)$, означающие по сути дела условие унитарности (для $\widetilde{A}=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}A$). Класс операторов с $A^*A=\alpha I\ (\alpha>0)$ обозначим через Z_A. По аналогии с работами М.С.Лившица и А.А.Янцевича введем инфинитезимальную корреляционную функцию $W(t,s)=\left(\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}-\alpha\right)K(t,s)$ и назовем рангом нестационарности max ранг квадратичных форм вида

$\sum\limits_{l,m} W(t_l,t_m)a_l\bar{a}_m$. Очевидно, что $W(t,s)$ и ранг характеризуют отклонение нестационарной кривой от кривой класса Z_A. Для кривых вида $z_t=e^{itA}z_0$ легко получить, что
$W(t,s)=-\langle (I-A^*A)z_t,z_s\rangle$, таким образом отклонение кривой от класса Z_A тесно связано с отклонением оператора A от унитарного, а именно справедливо следующее утверждение.

Теорема (о ранге) 3.1. Для того чтобы эволюционно представимый процесс $z_t=e^{itA}z_0$ был процессом "конечного ранга нестационарности", необходимо и достаточно, чтобы подпространство неунитарности $G_A=\overline{(I-A^*A)H}$ было конечномерным, при этом $\dim G_A$ совпадает с максимальным рангом всех квадратичных форм
$\sum\limits_{l,m} W(t_l,t_m)a_l\bar{a}_m \quad (-\infty<t_1,\dots,t_n<\infty \quad , \quad n=1,2,\dots)$.

В § 2 изучаются кривые $z_t=e^{itA}z_0$ с унитарным оператором A.

Рассмотрим случайный процесс z_t как кривую в гильбертовом пространстве H, воспроизводящим ядром которого является корреляционная функция $K(t,s)=\langle z_t,z_s\rangle_H$. Поскольку ядро $K(t,s)$ по сути определяет кривую z_t в H (с точностью до унитарного отображения), то характерные свойства z_t проявляются в свойствах $K(t,s)$.

Пусть z_t - случайный процесс в H, порождаемый задачей Коши $\frac{dz_t}{dt}=A(t)z_t \; ; \; z_t\big|_{t=0}=z_0$.

Пусть $K(t,s)=\langle z_t,z_s\rangle$ удовлетворяет уравнению
$\frac{\partial^2 K}{\partial t\partial s}-\alpha K=0\ (\alpha>0)$. Тогда $A^*A=\alpha I$.

Теорема 3.2. Для того чтобы функция $K(t,s)$ являлась корреляционной функцией линейно представимой кривой в гильбертовом пространстве $z_t=e^{itA}z_0$, с $AA^*-\alpha I=0\ (\alpha>0)$ необходимо и достаточно, чтобы она имела вид
$K(t,s)=\int^{2\pi}\exp\{i(t-s)\sqrt{\alpha}\cos\lambda-(t+s)\sqrt{\alpha}\sin\lambda\}\,dF(\lambda)$,
где $F(\lambda)$ - неубывающая функция ограниченной вариации.

Теорема 3.3. Для того чтобы комплекснозначная функция $K(t,s)$ была корреляционной функцией эволюционно представимого процесса, необходимо и достаточно, чтобы:

1) $K(t,s)$ была эрмитово неотрицательная;

2) $K(t,s)$ - 2^h раз непрерывно дифференцируемая функция;

3) $\exists \mu \in (0,\infty)$, такая что

$$\left|\sum_{l,m=1}^{N_1,N_2} L(t_l,t_m)a_l\bar{b}_m\right| \le \mu \sum_{l,j=1}^{N_1} K(t_l,t_j)a_l\bar{a}_j \sum_{m,n=1}^{N_2} K(t_m,t_n)b_m\bar{b}_n,$$

где $L(t,s)=L_t K(t,s)$.

В § 3 изучаются нестационарные кривые первого ранга $z_t=e^{itA}z_0$ с $\dim \overline{(I-A^*A)H}=1$.

Пусть z_t - линейно представимая кривая в гильбертовом пространстве. Ее можно представить в виде $z_t=e^{itA}z_0$. Корреляционную функцию вычисляет по формуле $K(t,s)=\langle z_t, z_s\rangle$. Пусть для оператора A выполняется условие $I-A^*A=\langle\cdot, g\rangle g$, где g - каналовый элемент A , тогда $\frac{\partial^2 K}{\partial t\partial s}-K=-\Psi(t)\overline{\Psi(s)}$, где

$$\Psi(t)=\langle e^{itA}z_0,g\rangle=-\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma e^{it\lambda}\langle z_0, f_{\bar\lambda}\rangle d\lambda,\ f_{\bar\lambda}=(A^*-\bar\lambda I)^{-1}g,$$

а Γ - произвольный замкнутый контур, охватывающий весь спектр оператора A .

В случае чисто дискретного спектра вычисление значения резольвенты на каналовом элементе сводится к решению неоднородного линейного разностного уравнения I-го порядка вида

$$\tilde{h}_{k+1}-\tilde{h}_k+\frac{\tilde{h}_k\bar{\sigma}_k}{\bar\lambda_k-\lambda}=\frac{\xi_k-\xi_{k+1}}{\xi_k\xi_{k+1}}, \quad k\ge 2$$

с начальным условием $\tilde{h}_2=\frac{(\bar\lambda_2-\lambda)f_\lambda(2)\bar\sigma_2}{\xi_2}$.

Доказана следующая теорема.

<u>Теорема 3.4</u>. Для того чтобы функция $K(t,s)$ была корреляционной функцией случайного процесса $z_t=e^{itA}z_0$ в пространстве $l_2(\beta)$, где A - квазиунитарный оператор ранга $\rho=1$ с чисто дискретным спектром, необходимо и достаточно, чтобы $K(t,s)$ удовлетворяла уравнению

$$\frac{\partial^2 K}{\partial t\partial s}-K=-\Psi(t)\overline{\Psi(s)}$$

где $\Psi(t)=\sum_{k=1}^{\infty} z_0(k)\Lambda_k(t)$, а $\Lambda_k(t)$ строятся только по спектру оператора A .

В случае квазиунитарного оператора первого ранга вида (0.2) с $\alpha(x)=0$ имеет место теорема:

<u>Теорема 3.5</u>. Для того чтобы функция $K(t,s)$ была корреляционной функцией случайного процесса $z_t=e^{itA}z_0$ в пространстве $L^2_{[0,l]}$, где A - квазиунитарный оператор вида (0.2) ранга $\rho=1$, необходимо и достаточно, чтобы $\frac{\partial^2 K}{\partial t\partial s}-K=-\Psi(t)\overline{\Psi(s)}$,

где $\Psi(t)=\int_0^{\ell} z_0(x)\,F(x,t)\,dx$,
а $F(x,t)=\sqrt{2}\,e^{-(x+it)}\,J_0(2\sqrt{2itx})$.

В § 4 изучаются нестационарные кривые "конечного" ранга. Обозначим класс таких кривых через $K_r(\lambda_j\,;\alpha(x))$. Используя универсальные модели и результаты предыдущего параграфа, получаем следующие теоремы. В случае дискретного спектра:

Теорема 3.6. Для того чтобы функция $W(t,s)$ была инфинитезимальной корреляционной функцией линейно представимой кривой с инфинитезимальным производящим оператором класса $K_r(\lambda_j)$, необходимо и достаточно, чтобы $W(t,s)$ имела вид

$$W(t,s)=\sum_{\alpha=1}^{r}\Phi_\alpha(t)\overline{\Phi_\alpha(s)}\,,\ \text{где}\ \Phi_\alpha(t)=\langle e^{itA}z_0, g_\alpha\rangle.$$

В случае операторов A вида (0.2) с $\alpha(x)=0$:

Теорема 3.7. Для того чтобы функция $W(t,s)$ была инфинитезимальной корреляционной функцией линейно представимой кривой с инфинитезимальным производящим оператором класса $K_r(0)$, необходимо и достаточно, чтобы $W(t,s)$ имела вид

$$W(t,s)=\sum_{\alpha=1}^{r}\Phi_\alpha(t)\overline{\Phi_\alpha(s)},\ \text{где}\ \Phi_\alpha(t)=\sqrt{2}\int_0^{\ell} z_{0\alpha}(\xi)\,e^{-(\xi+it)}\times$$
$$\times J_0(2\sqrt{2it\xi})\,d\xi\ ,\quad z_{0\alpha}(\xi)\in L^2[0,\ell].$$

Рассмотренные ранее процессы вида $\xi_t=e^{itA}\xi_0$ в случае ограниченного оператора A являются аналитическими случайными процессами, так как корреляционная функция $K(t,s)$ является аналитической функцией двух переменных во всей плоскости. Известно, что для гауссовских процессов аналитичность корреляционной функции является необходимым и достаточным условием аналитичности процесса.

В § I главы IУ исследован вопрос о представлении случайного аналитического процесса в виде

$$\xi_t=t^m e^{g(t)}\prod_{n=1}^{N\leq\infty}\left(1-\frac{t}{a_n}\right),\ a_n\neq 0, \qquad (0.5)$$

где $g(t)$ - комплексный гауссовский целый случайный процесс, a_n - корни ξ_t, отличные от нуля, m - порядок корня в нуле.

Для целых случайных функций $g(t)$ вида $g(t)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k t^k$ где $M(c_k\overline{c_j})=\begin{cases}\sigma_k^2, & k=j\\ 0, & k\neq j\end{cases}$, доказана следующая теорема:

Теорема 4.1. Для того чтобы аналитический случайный процесс допускал представление (0.5), необходимо и достаточно, чтобы его корреляционная функция имела вид

$$K(t,s)=(ts)^m \exp\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k^2 (t+s)^{2k}\right\} \prod_{n=1}^{N\leq\infty} \left(1-\frac{t}{a_n}\right)\left(1-\frac{s}{a_n}\right).$$

Во втором параграфе изучается поведение в верхней плоскости $\mathbb{C}^+=\{z\in\mathbb{C}: \operatorname{Im} z>0\}$ канонического произведения, стоящего в правой части разложения (0.5).

<u>Определение 4.I</u>. Пусть $f(z)$ - функция, голоморфная в $\mathbb{C}^+$ Порядком такой функции называется число $\rho_f=\max(\inf\{\mu\}, \inf\{\nu\})$, где $\{\mu\}$ - множество таких чисел $\mu>0$, что имеет место асимптотическая оценка

$$\sup_{0<\theta<\pi} |f(re^{i\theta})| < \exp(r^\mu)$$

а $\{\nu\}$ - множество таких чисел $\nu>0$, для которых

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^\nu} \equiv 0 \quad (0<\theta<\pi).$$

Для функции $f(z)$ конечного порядка с корнями $z_k=r_k e^{i\theta_k}$, $k=1,2,\ldots$ (нумерация произвольная), следуя Н.В.Говорову, введем в рассмотрение считающую функцию ее корней, т.е. функцию $\hat{n}_f(t)=\hat{n}(t)=\sum_{|z_k|<t} \sin\theta_k$. Порядок этой функции обозначим $\rho(\hat{n})$, т.е. положим $\rho(\hat{n})=\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \frac{\ln\hat{n}(t)}{\ln t}$. Обозначим также через $\rho(\ln|f|,\theta)$ порядок функции $f(z)$ на луче $\arg z=\theta$, определяя его равенством

$$\rho(\ln|f|,\theta)=\inf\left\{\mu: \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^\mu}=0\right\}.$$

Для функций конечного порядка в $\mathbb{C}^+$ Н.В.Говоровым была получена теорема о факторизации, а именно было показано, что всякая голоморфная и порядка $\rho\geq 0$ функция $F(z)$ в верхней полуплоскости $\mathbb{C}^+$ представлена в виде

$$F(z)=e^{i(a_0+a_1z+\ldots+a_qz^q)} \prod_{|z_n|<1} \frac{z-z_n}{z-\bar{z}_n} \prod_{|z_n|>1} E_q(z,z_n) \times$$

$$\times \exp\frac{1}{\pi i}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(tz+1)^{q+1} u(t)}{(t^2+1)^{q+1}(t-z)}dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(tz+1)^{q+1}\, d\varphi(t)}{(t^2+1)^{q+1}\,(t-z)}\right],$$

где $z_n=r_n e^{i\theta_n}$ - нули $F(z)$, q - наименьшее целое, для которого сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\theta_n}{r_n^{q+1}}$

$$E_q(z, z_n) = \frac{1 - \frac{z}{z_n}}{1 - \frac{z}{\bar z_n}} \times \frac{\exp\left[\frac{z}{z_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{q}\left(\frac{z}{z_n}\right)^q\right]}{\exp\left[\frac{z}{\bar z_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\bar z_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{q}\left(\frac{z}{\bar z_n}\right)^q\right]} -$$

первичный множитель Вейерштрасса-Неванлинны, a_k - вещественные постоянные, $u_t = \lim\limits_{y \to +0} \ln|f(t+iy)|$, $\varphi(t)$ - граничная неубывающая сингулярная функция.

Одним из множителей этого разложения является каноническое произведение $f(z) = \prod\limits_{|z_n|<1} \frac{z - z_n}{z - \bar z_n} \prod\limits_{|z_n|>1} E_q(z, z_n)$. Из результатов Н.В.Говорова следует (хотя в явном виде не сформулировано), что если $q \geq 1$, то $\rho_f = \rho(\hat n)$. При $q = 0$ и, следовательно, $\int\limits_0^\infty \frac{d\hat n(t)}{t} < \infty$ каноническое произведение совпадает с произведением Бляшке для полуплоскости. Очевидно, что в этом случае

$$\rho(\ln|f|, \theta) = \inf\left\{\mu : \lim_{r \to \infty}\left[-\frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^\mu}\right] = 0\right\},$$

а $\rho_f = \sup\limits_{0<\theta<\pi} \rho(\ln|f|, \theta)$.

В четвертой главе доказана следующая теорема.

Теорема 4.2. Пусть $f(z)$ - голоморфная функция в верхней полуплоскости $\mathbb{C}^+$, являющаяся произведением Бляшке, а $\hat n(t)$ - считающая функция ее корней $z_k = r_k e^{i\theta_k}$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда $\rho_f \leq \rho(\hat n)$.

Уточнить этот результат, заменив неравенство $\rho_f \leq \rho(\hat n)$ равенством $\rho_f = \rho(\hat n)$ (справедливым, как отмечалось выше, при $q \geq 1$) нельзя, так как справедлива следующая

теорема 4.3. Пусть числа $\eta, \beta \in \mathbb{R}$ удовлетворяют условию $0 \leq \eta < \beta \leq 1$, а в остальном произвольные. Тогда существует функция $f(z)$ - произведение Бляшке, - такая что $\rho_f = \eta$, а $\rho(\hat n) = \beta$.

В третьем параграфе показано, что вполне регулярность роста функции $f(z)$ в верхней полуплоскости $\mathbb{C}^+$ эквивалентна некоторой слабой сходимости семейства функций $t^{-\rho} \ln|f(tz)|$.

Теория целых функций вполне регулярного роста, созданная Б.Я.Левиным и А.Пфлюгером, была распространена Н.В.Говоровым на функции, голоморфные в полуплоскости $\mathbb{C}^+$ и, следовательно, на функции, голоморфные в произвольном угле. При этом были обнаружены явления, существенно отличающие случай функций в $\mathbb{C}^+$ от случая целых функций.

Л.И.Ронкиным было установлено, что функция, голоморфная в верхней полуплоскости и не более чем нормального типа при порядке $\rho>1$ будет иметь вполне регулярный рост в $\mathbb{C}^+$ тогда и только тогда, когда $\forall \varphi(z)\in C(\overline{B}_1)$, где $B_R=\{z\in\mathbb{C}^+ : |z|<R\}$

$$\exists \lim_{t\to\infty} t^{-\rho}\int\limits_{B_1\setminus B_{1/t}} \ln|f(tz)|\,|z|^{-2}\varphi(z)\sin(\arg z)\,d\sigma_z =$$

$$=\int\limits_{B_1} \mathcal{L}_f(z)\,|z|^{-2}\varphi(z)\sin(\arg z)\,d\sigma_z .$$

Здесь $d\sigma_z$ - элемент площади в $\mathbb{C}$, а $\mathcal{L}_f(z)$ - индикатор функции $f(z)$, т.е.

$$\mathcal{L}_f(z)=\overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-\rho}\ln|f(tz)|,\ z\in\mathbb{C}^+.$$

При изучении оценок индикатора снизу рассматривается сходимость последовательности функций $\{t_j^{-\rho}\ln|f(t_j z)|\}$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{C}^+)$. Справедлива следующая

<u>теорема 4.4</u>. Пусть $f(z)$ - голоморфная функция в полуплоскости $\mathbb{C}^+$ и не более чем нормального типа при порядке $\rho>0$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) $f(z)$ - функция вполне регулярного роста в $\mathbb{C}^+$;

2) $\exists \lim\limits_{t\to\infty} t^{-\rho}\int\limits_{B_1\setminus B_{1/t}} \ln|f(tz)|\,|z|^{-2}\varphi(z)\,d\sigma_z$ $\forall\varphi\in C(\overline{B}_1)$;

3) $\exists \lim\limits_{t\to\infty} t^{-\rho}\int\limits_{B_1} \ln|f(tz)|\,|z|^{-2}\varphi(z)\,d\sigma_z$ $\forall\varphi\in\mathcal{D}(B_1)$ *).

Отметим, что из этой теоремы вытекает как следствие соответствующий результат Л.И.Ронкина и в случае $0<\rho<1$.

---

*) Как обычно, $\mathcal{D}(B_1)$ - пространство функций $\varphi(z)\in C^\infty(B_1)$ с компактным носителем в B_1.

Основные публикации по теме диссертации:

1. Бабий В.И. О порядке убывания произведения Бляшке в полуплоскости / ХГУ.- Х., 1986.- 17 с. Библиогр.: с. 17.- Деп. в УкрНИИНТИ 12.07.86 № 1696 - Укр 86.

2. Бабий В.И. О голоморфных функциях вполне регулярного роста в полуплоскости / ХГУ.- Х., 1986.- 15 с. Библиогр.: с. 15. Деп. в УкрНИИНТИ 12.07.86 № 1697 - Укр 86.

3. Бабий В.И. О голоморфных функциях вполне регулярного роста в полуплоскости // Теория функций, анализ и их прил.- Харьков : Вища школа, 1987.- Вып. 47.- С. 120-125.

4. Бабий В.И., Бендука Б., Янцевич А.А. Универсальные модели сжимающих операторов / ХГУ.- Х., 1993.- 15 с. Библиогр.: с. 15.- Деп. в ГНТБ Украины 27.04.93 № 859 - Укр 93.

5. Бабий В.И. Об одном классе нестационарных кривых в гильбертовом пространстве. Часть I / ХГУ.- Х., 1993.- 16 с. Библиогр.: с. 16.- Деп. в ГНТБ Украины 27.04.93 № 860 - Укр 93.

6. Бабий В.И. Об одном классе нестационарных кривых в гильбертовом пространстве. Часть II / ХГУ.- Х., 1993.- 20 с. Библиогр.: с. 20.- Деп. в ГНТБ Украины 29.04.93 № 861 - Укр 93.

7. Бабий В.И. Интегральные и суммационные уравнения в теории нестационарных случайных процессов / VI Международный симпозиум "Метод дискретных особенностей в задачах математической физики", тезисы докладов, II, Харьков, май 1993.

Подп. к печ. 14.04.94. Формат 60×84$^1/_{16}$. Бумага тип. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,0. Уч.-изд. л. 1,0. Тираж 100 экз. Зак. № 766. Бесплатно.

Харьковское межвузовское арендное полиграфическое предприятие.
310093, Харьков, ул. Свердлова, 115.

Ав 29.854