ХАРКІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

На правах рукопису

Анощенко Ольга Олексіївна

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ, ЩО ОПИСУЮТЬ РУХ СУСПЕНЗІЇ В РІДИНІ

01.01.02 — диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Харків — 1994

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Харківському державному університеті,
м.Харків

Науковий керівник:	член-кор. АН України, доктор фіз.-мат. наук, професор ХРУСЛОВ Євген Якович,
Офіційні опоненти:	доктор фіз.-мат. наук, професор ЧУЄШОВ Ігор Дмитрович,
	кандидат фіз.-мат. наук, завідуючий лабораторією УкрНЦОВ ЛЬВОВ Віталій Андрійович
Провідна організація:	Інститут прикладної математики і механіки АН України, м.Донецьк

Захист дисертації відбудеться 3 червня 1994р. о 15^{15} годині на засіданні спеціалізованої вченої ради К 053.06.02 Харківського державного університету (310077, Харків, пл.Свободи, 4, ауд. 6-48).

З дисертацією можна ознайомитись у Центральній науковій бібліотеці ХДУ.

Автореферат розісланий 26 квітня 1994 р.

Вчений секретар
спеціалізованої
вченої ради Сохін А.С.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. В останні роки потреби екології, а також широке коло технічних задач викликали великий інтерес до процесів руху твердих дрібних частинок у рідині й газі. Це, наприклад, пов'язано з проблемою перенесення радіоактивних дрібнодисперсних твердих зависей водяними та повітряними потоками, з питаннями будови транспортних повітропроводів, пилеуловлювачів і т.д. У багаточисленних публікаціях з цього питання, серед яких можна відзначити, наприклад, монографії Н.О. Михайлової, С.Соу, А.Форт'є, розглядаються, як правило, двохфазні моделі, що описують процес руху дрібнодисперсних зависей малої концентрації. Характерною рисою цих моделей є те, що дрібнодисперсна тверда завись вважається суцільним середовищем і рух суспензії розглядається як рух двох взаємодіючих та взаємопроникаючих рідких фаз (несуча рідина та рідина зависі). Така двохфазна модель, проте, придатна лише у випадку однакових за розмірами та питомою густиною частинок зависі. Звичайно, можливі її узагальнення на n-фазні моделі, але при великому розкиді розмірів частинок ці моделі також непридатні.

Інший тип математичної моделі руху твердих дрібних частинок у в'язкій нестисливій рідині, був запропонований у роботах В.А.Львова. У цій моделі тверда фаза описується функцією розподілу $F_\delta(x, v, r, t) = 1/\delta\, F(x, v, r/\delta, t)$ частинок за координатами $x = (x_1, x_2, x_3)$, швидкостями $v = (v_1, v_2, v_3)$, радіусами r (δ- характерний розмір частинок). Для швидкості несучої рідини $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ виведено "усереднене" рівняння руху, що описує асимптотичну поведінку розв'язку відповідної крайової задачі для системи Нав'є-Стокса в областях з дрібнозернистою межею при малих δ. Це рівняння, що містить у собі невідому функцію розподілу $F(x, v, a, t)$, замикається рівнянням Ліувілля для $F(x, v, a, t)$. У результаті одержана замкнута система рівнянь, яка у випадку сферичних частинок зависі має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u\nabla_x)u - \nu \Delta u + \gamma \int_{\varepsilon}^{1}\int a(u(x,t) - v)F(x, v, a, t)dvda - \nabla p = f(x,t), \qquad (1)$$

$$div\, u = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (v\nabla_x)F + \frac{\beta}{a^2} div_v[(u(x,t) - v)F] = 0, \qquad (3)$$

де $\epsilon > 0$, $\gamma = 6\pi\nu$, $\beta = \dfrac{18\rho\nu}{\rho_1\delta^2}$, ρ і ν - густина і характерний розмір частинок зависі.

Система рівнянь (1)–(3) є еволюційною і, звичайно, виникає питання про розв'язність та єдиність розв'язків різних початково-крайових задач для цієї системи.

Подібні питання для еволюційних рівнянь параболічного й гіперболічного типів вивчені досить повно. У роботах О.О.Ладиженської, О.А.Олійник, М.Й.Вішика, Ф.Браудера, В.О.Солоннікова, Н.М.Уральцевої, Б.В.Базалія та ін. розроблені досить загальні методи їх дослідження. У значно меншій мірі вивчені ці питання для систем рівнянь, що не відносяться до певного типу, хоча вони досить часто зустрічаються в застосуваннях. Кожна така задача вимагає індивідуального підходу, розробки нового або істотної модифікації відомого методу дослідження. Цим питанням присвячені роботи багатьох математиків, наприклад, М.Ф.Морозова, О.В.Кажихова, І.Д.Чуєшова. Сюди належать і, так звані,системи складового типу, до яких можно віднести й систему (1)–(3).

Крім того, ця система має ще деякі особливості. А саме, частина рівнянь розглядається у координатному просторі $\mathbb{R}^3$, а частина - у фазовому просторі $\mathbb{R}^6$. У цьому плані дана система схожа на систему рівнянь Власова і містить у собі як переваги, так і трудноші, зв'язані з вивченням останньої. З іншого боку, наявність рівнянь (1), (2) спричиняє всю складність дослідження, що притаманна системі рівнянь Нав'є-Стокса.

Система рівнянь Власова, що описує еволюцію функції розподілу частинок двокомпонентної плазми, вивчалась А.А.Арсеньєвим. Він довів теорему існування в цілому слабкого розв'язку, а також теорему існування та єдиності класичного розв'язку цієї системи. В обох випадках істотно використовувалась можливість явного обернення рівняння Ліувілля.

Різні питання існування та єдиності розв'язків початково-крайових задач для системи рівнянь Нав'є-Стокса вивчались у працях Ж.Лере, Є.Хопфа, О.О.Ладиженської, В.О.Солоннікова, Ж.-Л.Ліонса, Р.Темама та багатьох інших. Математична модель, що описує рух неоднорідної в'язкої нестисливої рідини, яка відноситься до систем складового типу, розглядалась у роботі О.О.Ладиженської та В.О.Солоннікова, а також у книзі С.М.Антонцева, О.В.Кажихова, В.М.Монахова, у якій була запропонована оригінальна модифікація метода Галеркіна.

Метою роботи є дослідження початково-крайових задач для системи рівнянь (1)-(3). Розглядаються два типи межових умов, що відповідають випадку абсолютно непружної межі області та випадку дзеркальновідбиваючої межі.

Загальна методика роботи. У дисертації застосовано методи теорії диференціальних рівнянь в частинних похідних, а також функціонального аналізу.

Наукова новизна. У дисертації одержано такі нові результати:

а) введено означення узагальненого розв'язку початково-крайової задачі для системи (1)-(3) у випадку абсолютно непружної межі області;

б) доведено теорему існування узагальненого розв'язку в цілому;

в) доведено теорему існування узагальненого розв'язку в цілому у випадку дзеркальновідбиваючої межі області;

г) доведено теорему єдиності узагальненого розв'язку у цілому для двовимірної задачі;

д) доведено існування класичного роз'вязку в цілому для плоскопаралельного руху рідини;

е) доведено існування та єдиність розв'язку у малому в гельдеровських класах функцій для тривимірної задачі.

Теоретична та практична цінність результатів. Результати, одержані в дисертації, та розвинені в ній методи можуть бути застосовані для довдення теорем існування та єдиності початково-крайових задач для систем рівнянь, які описують рух суспензії в полях різноманітної природи із загальними межовими умовами. Одержані результати можуть бути використані у механіці руху частинок із значною дисперсією їх розмірів і густини.

Апробація роботи. Результати роботи доповідались на семінарах відділу математичного моделювання фізичних процесів ФТІНТ АН України, на семінарі по математичній фізиці в ХДУ та міжнародній конференції "Нелінійні крайові задачі" (с.Ласпі, 1993р.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в роботах [1-4].

Об'єм та структура дисертації. Дисертація складається із вступу і трьох розділів. Загальний об'єм дисертації 86 сторінок друкованого тексту. Список літератури містить у собі 42 найменування.

ЗМІСТ РОБОТИ

У першому розділі доводиться існування в цілому узагальненого розв'язку початково-крайової задачі (1)–(3) за такими межовими умовами

$$u(x,t) = 0,\ (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T] \equiv S_T, \qquad (4)$$

$$F(x,v,a,t)(v,n(x)) \geq 0,\ (x,v,a,t) \in \partial\Omega \times \mathbf{R}^3 \times [\epsilon,1] \times [0,T], \qquad (5)$$

та початковими умовами

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in \Omega, \qquad (6)$$

$$F(x,v,a,0) = F_0(x,v,a),\ (x,v,a) \in \Omega \times \mathbf{R}^3 \times [\epsilon,1] \equiv D \qquad (0.7)$$

Тут Ω - обмежена опукла область простору $\mathbf{R}^3$ з досить гладкою межею, $n(x)$ - орт зовнішньої нормалі до її межі $\partial\Omega$, а функції $u_0(x)$ и $F_0(x,v,a)$ задовольняють таким умовам:

$$div\, u_0 = 0,\ x \in \Omega,\ u_0(x) = 0,\ x \in \partial\Omega,$$

$$0 \leq F_0(x,v,a) \leq A_1 < \infty,\ (x,v,a) \in D,$$

$$\int_D (1+v^2) F_0(x,v,a)\,dxdvda < \infty \qquad (8)$$

Межова умова (5) відповідає абсолютно непружній межі, до якої частинки зависі прилипають.

Введемо означення узагальненого розв'язку задачі (1)–(7). Нехай P_0 - оператор, що продовжує функцію, задану в області Ω, нулем на весь простір $\mathbf{R}^3$; Q - оператор, звужуючий функцію, задану на просторі $\mathbf{R}^3$, на область Ω.

Означення 1. Пара функцій $(u(x,t), F(x,v,a,t))$ називається узагальненим розв'язком задачі (1) - (7), якщо

$u(x,t) \in L_\infty(0,T; J(\Omega)) \cap L_2(0,T; J^1(\Omega))$,

$u(x,t)$ неперервна в нормі $L_2(\Omega)$ при $t=0$;

$F(x,v,a,t) = Q\tilde{F}(x,v,a,t)$, де

$\tilde{F}(x,v,a,t) \in L_\infty(\mathbf{R}^6_{T,\epsilon})$, $\tilde{F}(x,v,a,t) \in L_1(\mathbf{R}^6_\epsilon)$ рівномірно відносно $t \in [0,T]$;

$\tilde{F}(x,v,a,t)$ слабко неперервна по t за метрикою $L_1(\mathbf{R}^6_\epsilon)$ в точці $t=0$, і виконуються такі інтегральні тотожності

$$\int_0^T\left\{(u,\Phi_t+(u\nabla_x)\Phi)_{2,\Omega}-\nu(u,\Phi)_{J^1(\Omega)}-\gamma\left(\int_\epsilon^1\int a\,(u(x,t)-v)Q\tilde{F}dvda,\Phi\right)_{2,\Omega}+\right.$$

$$\left.+(f,\Phi)_{2,\Omega}\right\}dt+(u_0,\Phi(0))_{2,\Omega}=0,$$

$$\int_0^T\left(\tilde{F},\psi_t+(v\nabla_x)\psi+\left(\frac{\beta}{a^2}(P_0u(x,t)-v)\nabla_v\right)\psi\right)_{2,\mathbf{R}^6_\epsilon}dt+(P_0F_0,\psi(0))_{2,\mathbf{R}^6_\epsilon}=0.$$

при будь-яких вектор-функціях Φ і функціях ψ, що задовольняють умовам:

$$\Phi(x,t)\in L_\infty(0,T;J(\Omega))\bigcap L_2(0,T;J^1(\Omega))\bigcap L_p(0,T;W^1_q(\Omega)),$$

$$1/p+3/2q\le 1,\ p\in[2,\infty],\ q\in[3/2,\infty);$$

$$\Phi_t\in L_{q,p}(\Omega_T),\ 1/p+3/2q\le 7/4,\ p\in[1,2],\ q\in[6/5;2],\ \Phi(x,T)=0;$$

$\psi(x,v,a,t)$ фінітні в $\mathbf{R}^6_{T,\epsilon}$ за змінними x і v,

$$\nabla_x\psi\in L_1(\mathbf{R}^6_{T,\epsilon}),\ \nabla_v\psi\in L_\infty(\mathbf{R}^6_{T,\epsilon}),\ \psi_t\in L_1(\mathbf{R}^6_{T,\epsilon}),\ \psi(x,v,a,T)=0,$$

Тут $J(\Omega), J^1(\Omega)$ - замикання в нормах $L_2(\Omega)$ і $W_2^{1,0}(\Omega)$ множини фінітних у Ω нескінченно дифференційовних соленоїдальних вектор-функцій. Крім того, використовуються такі позначення:

$$\mathbf{R}^6=\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3,\ \mathbf{R}^6_\epsilon\equiv\mathbf{R}^6\times[\epsilon,1],\ \mathbf{R}^6_{T,\epsilon}\equiv\mathbf{R}^6_\epsilon\times[0,T].$$

$$(f,g)_{2,\Omega}=\int_\Omega\sum_{i=1}^3 f_i(x)\,g_i(x)dx;$$

$$(F,G)_{2,\mathbf{R}^6_\epsilon}=\int_{\mathbf{R}^6_\epsilon}F(x,v,a)\,G(x,v,a)dxdvda.$$

Зауваження. Означення 1 узагальненого розв'язку відрізняється від традиційних. Впровадження функції $\tilde{F}(x,v,a,t)$, що задана в $\mathbf{R}^6_\epsilon$, а також припущення про опуклість області Ω пов'язані з наявністю межової умови (5). При стандартному підході в другій інтегральній тотожності означення 1 виникає додатковий доданок, що містить інтеграл по області Ω. Це істотно ускладнює граничний перехід у галеркінських наближеннях при доведенні теореми існування.

Основний результат розділу I описується такою теоремою.

ТЕОРЕМА 1.1. Нехай $f(x,t) \in L_{2,1}(\Omega_T), u_0(x) \in J(\Omega), F_0(x,v,a)$ задовольняє умови (8). Тоді існує щонайменш єдиний узагальнений розв'язок задачі (1) - (7), для якого виконується нерівність

$$\max_{0\le t\le T} \|u\|_{2,\Omega} + \max_{0\le t\le T} \int_D v^2 F dx dv da + \int_0^T \|u(t)\|^2_{J^1(\Omega)} dt <$$

$$< \|u_0\|_{2,\Omega} + \int_D v^2 F_0(x,v,a) dx dv da + C \|f\|_{2,1,\Omega_T}.$$

Доведення теореми 1.1 складається з трьох етапів. Спочатку в §2 розділу I за допомогою апріорних оцінок (лема 1.3) та принципу Шаудера для цілком неперервних операторів будуються галеркінські наближення. При цьому використовується явне обернення рівняння Ліувілля. В §3 доводяться леми 1.5, 1.7, 1.9 про компактність послідовностей наближених розв'язків і досліджуються деякі властивості границь цих послідовностей (леми 1.6 і 1.8). І,нарешті, §4 здійснюється граничний перехід в інтегральних тотожностях означення 1, які записані для галеркінських наближень.

В §5 першого розділу результат теореми 1.1 переноситься на випадок дзеркального відбиття частинок від межі області Ω. А саме, робиться припущення, що функція $F(x,v,a,t)$ замість умови (5) підпорядкована такій межовій умові:

$$F(x,v,a,t) = F(x,v^*,a,t),\ (x,v,a,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^3 \times [\epsilon,1] \times [0,T], \tag{9}$$

де $v^* = v - 2(v,n)$, $n(x)$ - орт зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$.

Основний результат цього параграфу сформульовано у теоремі 1.2. У цьому випадку припущення про опуклість області Ω виявляється зайвим і означення 2 узагальненого розв'язку задачі (1)–(4), (6), (7), (9) має стандартний вигляд. Як формулювання теореми 1.2, так і схема її доведення майже співпадають з теоремою 1.1. Відзнака полягає лише в способі побудови галеркінських наближень для функції $F(x,v,a,t)$.

Узагальнений розв'язок задачі (1)–(7), існування якого доведено в теоремі 1.1, відповідає у випадку рівнянь Нав'є-Стокса класу слабких розв'язків, введених Е.Хопфом. Відомо, що цей клас розв'язків виявляється досить широким для тривимірної задачі і встановити єдиність розв'язків початково-крайової задачі (1)-(7) не вдається. Але у випадку плоско-паралельної течії рідини можна показати, що узагальнений розв'язок має більшу гладкість, на підставі чого установлюється його єдиність. Це зроблено у другому розділі дисертації, де, проте, довелося ввести зрізуючий множник, що обмежує розподіл частинок суспензії за швидкостями. А саме, розглядається двовимірна задача:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + (u\nabla_x)u - \nu \triangle u + \gamma \int \int_{t}^{1} a\,\Theta_R((u-v)^2)(u(x,t)-v)F dv da - \\ - \nabla p = f(x,t), & (10) \\ div\, u = 0, & (11) \\ \dfrac{\partial F}{\partial t} + (v\nabla_x)F + \dfrac{\beta}{a^2} div_v[\Theta_R((u-v)^2)(u(x,t)-v)F] = 0, & (12) \end{cases}$$

з початковими та межовими умовами (4)-(7). Тут $\Theta_R(z)$ – нескінченно диференційовна функція аргумента $z \in \mathbb{R}^1$ така, що $0 \le \Theta_R(z) \le 1$ при $|z| \le R, \Theta_R(z) = 0$ при $|z| > 2R$ і $\Theta'_R(z) \le 0$ при $z \ge 0$.

У лемі 2.1 доводиться, що узагальнений розв'язок двовимірної задачі (10)-(12), (4)-(7) належить таким функціональним просторам

$$u(x,t) \in L_\infty(0,T; J^1(\Omega)) \bigcap L_2(0,T; \dot{W}_2^2(\Omega)),\ u_t \in L_2(\Omega_T),$$

якщо $f(x,t) \in L_2(\Omega_T),\ u_0 \in J^1(\Omega)$.

Далі, в §2 другого розділу показано, що функція розподілу $F(x,v,a,t)$ є неперервною за Гельдером за змінними x, v і t.

У §3 другого розділу доведено теорему единості.

ТЕОРЕМА 2.1. *Двовимірна задача (10)–(12), (4)–(7) може мати не більше одного узагальненого розв'язку із класу*

$$u(x,t) \in L_\infty(0,T; J^1(\Omega)) \bigcap L_2(0,T; W_2^2(\Omega)),\ u_t \in L_2(\Omega_T);$$

$$F(x,v,a,t) = Q\tilde{F}(x,v,a,t),\ \text{де}\ \tilde{F}_t \in L_2(\mathbb{R}^4_{T,\epsilon}),\ \nabla_x \tilde{F} \in L_2(\mathbb{R}^4_{T,\epsilon}),$$

$$\nabla_v \tilde{F} \in L_\infty(\mathbb{R}^4_{T,\epsilon}),\ \max_{[0,T]} \int_{\mathbb{R}^4_\epsilon} (1+v^2)\,|\nabla_v \tilde{F}| dx dv da < \infty.$$

Використовуючи леми §1 і §2 цього розділу, а також результати В.О.Солоннікова, у §4 доведено існування у цілому класичного розв'язку початково-крайової задачі (10)-(12), (4)-(7).

ТЕОРЕМА 2.2. Нехай у двовимірній задачі (10)–(12), (4)–(7) $\partial\Omega \in C^{2+\rho}$, $u_0(x) \in C^{2+\rho}(\Omega)$, $f(x,t) \in C^{\rho,\rho/2}(\Omega_T)$, $0 < \rho < 1$, $F_0(x,v,a)$ - неперервно диференційовна за змінними x і v в області $\Omega \times \mathbf{R}^2$ при $a \in [\epsilon, 1]$, фінітна за змінною v і $D_x^\alpha F_0(x,v,a) = 0$, $x \in \partial\Omega$, $\alpha = 0,1$. Крім того, виконуються умови $Pf \in C^{\rho,\rho/2}(\Omega_T)$,

$$div\, u_0 = 0,\ u_0(x)|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$P\Big[f(x,0) + \nu\,\Delta\, u_0 - (u_0\nabla_x)u_0 -$$

$$-\gamma\int_\epsilon^1\int \Theta_R((u_0-v)^2)\,(u_0-v)\,F_0(x,v,a)dvda\Big]\Big|_{\partial\Omega} = 0,$$

де P - оператор проектування $L_2(\Omega)$ на $J(\Omega)$.

Тоді узагальнений розв'язок є класичним, а саме

$$u(x,t) \in C^{2+\rho,1+\rho/2}(\Omega_T),\ \nabla p \in C^{\rho,\rho/2}(\Omega_T),$$

$F(x,v,a,t)$ неперервно диференційовна за x, v, t у $\Omega \times \mathbf{R}^2_T$ при всіх $a \in [\epsilon, 1]$.

Із теореми 2.1 випливає єдиність такого розв'язку.

Наявність зрізуючого множника $\Theta_R(z)$ у рівняннях (10), (12) зв'язана з труднощами технічного характеру, подолати які не вдалося. Це підтверджують результати першого та третього розділів, де цей множник відсутній.

У третьому розділі знову розглядається початково- крайова задача (1)–(7), де Ω - обмежена опукла область у просторі $\mathbf{R}^3$ з досить гладкою межею. Доведено однозначну розв'язність цієї задачі в гельдеровських класах функцій, введених В.О.Солонніковим, у малому за часом. Основним результатом розділу III є така теорема.

ТЕОРЕМА 3.1. Нехай при деякому $\alpha \in (0,1)$ $f(x,t) \in J^{\alpha,0}(\Omega_T)$, $u_0(x) \in C^{2+\alpha}(\Omega) \cap J^{\alpha,0}(\Omega)$, $F_0(x,v,a) \in C^{1+\alpha}(D)$, крім того, функція $F_0(x,v,a)$ фінітна в D за змінною v, $D_x^\alpha F_0(x,v,a) = 0$, $x \in \partial\Omega$, $\alpha = 0,1$ і виконуються умови узгодження

$$\left[f(x,0) + P_J\left(\nu\,\Delta\, u_0 - (u_0\nabla_x)u_0 - \gamma\int_\epsilon^1\int (u_0 - v)F_0(x,v,a)dvda\right)\right]\Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Тоді при деякому досить малому $T = T(|f|_{\alpha,\alpha/2}, |u_0|_{2+\alpha,\Omega}, |F_0|_{1+\alpha,D})$ задача (1)–(7) має единий розв'язок $u(x,t) \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\Omega_T)$, $\nabla p \in C^{\alpha,\alpha/2}(\Omega_T)$, $F(x,v,a,t) \in C^{1+\alpha}(D_T)$.

Означення функціональних просторів, що використовуються у формулюванні теореми 3.1, наведені в §1 розділу І. Доведення теореми 3.1 проходить за допомогою методу послідовних наближень. При цьому істотно використовуються оцінки, що отримані в лемах §2 третього розділу та результати В.О.Солонникова. Відзначимо, що припущення про опуклість області Ω є істотним у останньому розділі, бо в противному разі неможливо забезпечити необхідну гладкість функції $F(x, v, a, t)$.

ПУБЛІКАЦІЇ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1) Анощенко О.А. Существование и единственность классического решения системы уравнений движения суспензии/ ХГУ - Харьков, 1989.- 21с. - Деп. в ВИНИТИ 28.02.89, N 1309-В89.

2) Анощенко О.А. Существование в целом обобщенного решения системы уравнений движения суспензии. В кн.Динамические системы и комплексный анализ. Сб. научн. трудов.- Киев: Наук.думка, 1992.- С.112-119.

3) Анощенко О.А. О разрешимости системы уравнений движения суспензии// Докл. АН Украины.1993.- N3.- С.10-13.

4) Анощенко О.А. Существование и единственность решения системы уравнений движения суспензии в гельдеровских классах// Мат.физика, анализ, геометрия. 1994.- Т.1, N1.- С.33-42.

Підп. до друку 14.04.94. Формат 60×84 1/16. Папір друк. №2.
Друк офсетний. Умовн.-друк. арк. 1,0. Умовн. фарбо-відб. 1,0. Облік.-вид. арк. 1,0. Тир. 100.
Зам. 767.

Харківське орендне поліграфічне підприємство
310093 Харків, вул. Свердлова, 115.