КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. ТАРАСА ШЕВЧЕНКО

На правах рукописи

Капустян Владимир Емельянович

УДК 517.9:519.3

ОПТИМАЛЬНОЕ ОГРАНИЧЕННОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫМИ СИСТЕМАМИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

01.01.09 - математическая кибернетика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Киев - 1994

Диссертация представляет собой рукопись

Работа выполнена на кафедре моделирования сложных систем Киевского университета и на кафедре прикладной математики Днепропетровского института инженеров железнодорожного транспорта

Научные консультанты: доктор физико-математических наук, профессор А.Г. Наконечный
доктор физико-математических наук, профессор А.И. Егоров

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор М.Г. Дмитриев,
доктор физико-математических наук, профессор В.С. Мельник,
доктор физико-математических наук, профессор В.А. Плотников.

Ведущая организация - Институт математики и механики УРо РАН, г.Екатеринбург.

Защита состоится " 26 " мая 1994 г. в 14^{00} часов на заседании специализированного совета Д 068. 18. 16 при Киевском университете имени Тараса Шевченко (252127, Киев, проспект академика В.М. Глушкова, 6, Киевский университет, факультет кибернетики, ауд. 40).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Киевского университета.

Автореферат разослан "20" апреля 1994 г.

Ученый секретарь
специализированного совета
канд. физ.-мат. наук А.В. Кузьмин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами (СРП) активно развивалась в последние десятилетия ввиду своей технической актуальности и разнообразия математических вопросов, которые она затрагивает. Основы теории оптимального управления СРП были заложены в работах С.А. Авдонина, В.Барбю, Н.А. Бобылева, Б.Н. Бублика, А.Г. Бутковского, Ф.П. Васильева, О.В. Васильва, А.И. Егорова, Ю.В. Егорова, Ю. М. Ермольева, С.А. Иванова, Ж.-Л. Лионса, В.Г . Литвинова, К. А. Лурье, В.И. Максимова, В.С. Мельника, А.Г. Наконечного, Ю.С. Осипова, В.И. Плотникова, У.Е. Райтума, М. Рахимова, С.Я. Серовайского, Т.К. Сиразетдинова, В.И. Сумина, В.А. Срочко, Л. Тартара, В.А. Якубовича, А.В. Фурсикова и других. Конкретные решения в оптимальных задачах для СРП (кроме уникальных случаев) могут быть получены либо методами численного анализа , либо применением асимптотических методов, если это возможно. Важным как с позиций теории оптимального управления, так и приложений является класс управляемых объектов, описываемых краевыми задачами для уравнений с частными производными и малым параметром в главной части дифференциального оператора (сингулярно возмущенные системы). Для конечномерных систем математические основы исследований сингулярно возмущенных оптимальных задач были разработаны в работах Kokotovica P.V. и М.Г. Дмитриева. В основном рассматривались задачи без ограничений на управления. Для сингулярно возмущенных СРП концептуальной является работа Ж.-Л. Лионса*, в которой исследуются слабые решения сингулярно возмущенных: СРП, вариационных неравенств и задач оптимального управления. Получены результаты о предельном переходе к вырожденным решениям. Однако вопросы построения гладких асимптотических аппроксимаций решений задач оптимального управления для сингулярно возмущенных СРП с ограничениями остались открытыми. Оказывается, что в таких задачах в случае локальных ограничений на управления возникают внутренние переходные слои, которые призваны осуществить гладкий переход экстремалей из области предельного значения управления в область

*Lions J. L. Perturbations Singulieres dans les Problemes aux Limites eten Controle Optimal.-Lecture Notes in Math.1973,323, Springer.-645p.

значений управлений, принадлежащих внутренности ограничений. Кроме того, они обеспечивают выполнение неравенств условий оптимальности при указанном переходе. Подобные эффекты возникают при асимптотическом анализе вариационных неравенств для эллиптических операторов с малым параметром в главной части оператора*. В зависимости от способа вхождения малого параметра в главную часть дифференциального оператора (полное вырождение оператора, частичное вырождение и т.д.) существенно меняется способ построения формальных асимптотических решений задач оптимального управления для соответствующих СРП. Как правило, малый параметр имеет физическое (геометрическое) содержание, а асимптотический анализ нелинейных систем, к которым относятся задачи управления СРП с малым параметром в главной части оператора и ограничениями на управление, позволяет получить решения таких систем с произвольной асимптотической точностью. Указанные решения имеют как самостоятельную ценность, так и могут служить в качестве начальных приближений для алгоритмов численного анализа.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ. Диссертация посвящена разработке методов построения гладких асимптотических аппроксимаций решений задач оптимального ограниченного управления для различных классов сингулярно возмущенных СРП. При этом значительное место в работе уделяется построению формальных асимптотик экстремалей и управлений произвольного порядка точности и их обоснованию. В динамических СРП наряду с программными управлениями рассматриваются и вопросы асимптотического синтеза. Кроме того, оптимальные асимптотические конструкции систем управления используются для получения алгоритмов минимаксного асимптотического оценивания функционалов, определенных на решениях СРП.

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ. В диссертации используются условия оптимальности для СРП в форме вариационных неравенств, метод динамического программирования, теория минимаксного оценивания, методы решения краевых задач математической физики, функциональный анализ. Кроме того, в зависимости от рассматриваемой задачи использовались сле-

* Назаров С.А. Асимптотическое решение вариационных неравенств для линейного оператора с малым параметром при старших производных.- Изв. АН СССР. Серия математическая, 1990, т.54, N4, с.754-773.

дующие методы асимптотического анализа сингулярно возмущенных СРП: метод погранфункций, сращиваемых и составных асимптотических разложений.

НАУЧНАЯ НОВИЗНА И ПРАКТИЧЕСКАЯ ЗНАЧИМОСТЬ. В диссертации разработана методика решения задач оптимального ограниченного управления сингулярно возмущенными СРП и на этом пути при некоторых ограничениях получены следующие новые результаты:

1. В классе гладких аппроксимаций получено полное асимптотическое решение линейно-квадратичной задачи оптимального управления для эллиптической краевой задачи как с локальными ограничениями на управление, так и с глобальными.

2. Для билинейной задачи оптимального управления эллиптической системой и для задачи оптимального управления эллиптической системой с кубической нелинейностью по состоянию построены и обоснованы полные асимптотические решения. При этом оценки асимптотической точности получены при выполнении некоторых неравенств, "связывающих" данные задачи. Для задачи с кубической нелинейностью проведен численный эксперимент, позволяющий судить об эффективности асимптотических решений.

3. Для задачи оптимального управления процессом переноса частиц в плоском слое обосновано применение прямого метода асимптотического анализа, т. е. без использования условий оптимальности. При этом задача на каждой итерации декомпозируется на три более простые задачи, решаемые аналитически. Доказана релаксационность асимптотических итераций.

4. Для параболических сингулярно возмущенных оптимальных систем получены полные асимптотические разложения решений, причем, как для глобальных, так и локальных ограничений на управление. Если вырождается весь дифференциальный оператор, то результаты близки эллиптическим задачам. В случае вырождения только пространственной части оператора построены и обоснованы асимптотики произвольной точности для глобальных ограничений на управление. Если же ограничения на управление носят локальный характер, то для управления, зависящего только от времени, построено асимптотическое представление времени схода управления с ограничения до любого порядка точности, что позволяет обосновать найденные асимптотики решений исходной задачи. Для распределенного управления такое обоснование

получено до порядка $O(\varepsilon^{3})$.
5. Построено полное решение задачи синтеза оптимального управления для параболической сингулярно возмущенной системы с управлением, зависящим только от времени.
6. Найдены асимптотики в задаче управления тепловым полем в тонких телах. Эта задача относится к критическому случаю и характеризуется тем, что вырожденная задача не совпадает с укороченной задачей. Для глобальных ограничений на управление получены полные результаты, а для локальных - до порядка $O(\varepsilon^{3})$.
7. Построены асимптотики минимаксных оценок функционалов для ряда стационарных и эволюционных СРП, а для эллиптических краевых задач получены асимптотики решений в задачах оптимального наблюдения.

Все основные результаты диссертации носят конструктивный характер, асимтотические алгоритмы содержат задачи, которые часто имеют аналитические решения Предложенные в работе подходы могут служить основой исследований других задач оптимального управления сингулярно возмущенными СРП с ограничениями.

АПРОБАЦИЯ РАБОТЫ. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на научных семинарах, Всесоюзных и международных конференциях, в том числе.

1. Всесоюзной научной конференции "Метод функций А.М. Ляпунова в современной математике" (Харьков, 1986);
2. Второй научно-технической конференции советских и польских молодых ученых, выпускников высших учебных заведений СССР (Киев, 1986);
3. Международном Советско- Польском семинаре "Математические методы оптимального управления и их приложения" (Минск, 1989);
4. III Всесоюзной школе "Понтрягинские чтения: оптимальное управление, геометрия и анализ" (Кемерово, 1990);
5. VII Всесоюзной конференции "Управление в механических системах" (Свердловск, 1990);
6. Международном семинаре "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления" (Москва, 1992);
7. Научно-технической конференции стран СНГ "Контроль и управление в технических системах" (Винница, 1992);
8. Международной математической конференции "Ляпуновские чтения" (Харьков, 1992);
9. Международном семинаре "Негладкие и разрывные задачи управления

и оптимизации" (Челябинск, 1993);
10. International workshop "Singular solutions and perturbations in control systems" (Pereslavl-Zalessky, Russia, 1993).
11. Межгосударственной научной конференции "Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация" (Минск, 1993);
12. на семинарах: кафедры прикладной математики ДИИТ'а, кафедры моделирования сложных систем КГУ, кафедры оптимального управления ОГУ, отдела обыкновенных дифференциальных уравнений института математики АНУ, отдела дифференциальных уравнений УрО РАН, отдела N 360 института кибернетики АНУ, исследовательского центра процессов управления института программных систем РАН.
ПУБЛИКАЦИИ. Основные результаты содержатся в 25 работах, список которых приводится в конце автореферата.
СТРУКТУРА И ОБЪЕМ РАБОТЫ. Диссертация состоит из введения, четырех глав, списка литературы, включающего 165 наименований и приложения. Общий объем работы составляет 295 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении отмечена актуальность темы исследования, рассмотрены основные направления анализа проблемы асимтотических решений задач оптимального управления сингулярно возмущенными СРП, приведены основные методы их исследования и дана аннотация всех глав диссертации.

Глава 1 содержит результаты по гладкой асимтотической аппроксимации решений сингулярно возмущенных задач оптимального управления эллиптическими системами и системами переноса частиц. На управления накладываются как локальные, так и глобальные ограничения. Полученные алгоритмы на каждом шаге состоят из более простых задач, часто решаемых аналитически. Выяснена структура асимптотических разложений и получено их обоснование с произвольной степенью точности.

В §1 исследуется линейно- квадратичная задача оптимального ограниченного управления сингулярно возмущенной эллиптической краевой задачей. Пусть в области $\Omega \subset R^n$ с компактным замыканием $\bar{\Omega}$ и гладкой (класса C^∞) $(n-1)$-мерной границей $\partial\Omega$ состояние управляемой системы $y(u)$ определяется как решение задачи Дирихле

$$-\varepsilon^2 \Delta y(u) + a(x) y(u) = f(x) + u(x), \qquad (1)$$

$$y(u) \in H^1_0(\Omega) \text{ (следовательно, } y(u)=0 \text{ на } \partial\Omega \text{)}, \qquad (2)$$

где $f \in L_2(\Omega)$, $u \in U \subset L_2(\Omega)$ (U-замкнуто и выпукло), Δ - оператор Лапласа, $0 < \varepsilon << 1$, $0 < \alpha \le a(x) \in L_\infty(\Omega)$.

Требуется найти $u \in U$:

$$I(u) = \inf_{v \in U} \{ \int_\Omega [(y(v) - z(x))^2 + \nu v^2(x)]dx \}, \qquad (3)$$

где $\nu = \mathrm{const} > 0$, $z(x) \in L_2(\Omega)$.

Тогда единственное оптимальное управление определяется из соотношений

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta y(u) + a(x)\, y(u) = f + u, \ x \in \Omega \ ; \ y(u)=0, \ x \in \partial\Omega; \\ -\varepsilon^2 \Delta p(u) + a(x)\, p(u) = y(u) - z(x), \ x \in \Omega \ ; \ p(u)=0, \ x \in \partial\Omega; \\ \int_\Omega [p(u) + \nu u][v - u]dx \ge 0 \ \ \forall v \in U; \ y, p \in H^2_0(\Omega). \end{cases} \qquad (4)$$

Пусть

$$U=\{v: \xi_1(x) \le v \le \xi_2(x) \text{ п. в. в } \Omega, \ \xi_1 < \xi_2, \ \xi_i \in L_\infty(\Omega) \}. \qquad (5)$$

Локальность ограничений (5) приводит к тому, что задача (4) распадается на следующие задачи

$$x \in \Omega_1: \begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta y(x) + a(x)\, y(x) = f(x) + \xi_1(x), \\ -\varepsilon^2 \Delta p(x) + a(x)\, p(x) = y(x) - z(x), \\ p(x) + \nu\, \xi_1(x) > 0 \ ; \end{cases} \qquad (6)$$

$$x \in \Omega_2: \begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta y(x) + a(x)\, y(x) = f(x) + \xi_2(x), \\ -\varepsilon^2 \Delta p(x) + a(x)\, p(x) = y(x) - z(x), \\ p(x) + \nu\, \xi_2(x) < 0 \ ; \end{cases} \qquad (7)$$

$$x \in \Omega_3: \begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta y(x) + a(x)\, y(x) + \nu^{-1} p(x) = f(x), \\ -\varepsilon^2 \Delta p(x) + a(x)\, p(x) = y(x) - z(x), \end{cases} \qquad (8)$$

где $\Omega = \bigcup_{i=1} \Omega_i$, $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$, $i \ne j$.

Тогда оптимальное управление задается формулой

$$u(x) = \begin{cases} \xi_1(x), \ x \in \Omega_1, \\ -\nu^{-1} p(x), \ x \in \Omega_3, \\ \xi_2(x), \ x \in \Omega_2. \end{cases} \qquad (9)$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $f(x)$, $z(x)$, $a(x)$ $\xi_i(x) \in C^\infty(\Omega)$.

Найдем асимптотическую аппроксимацию областей Ω_i. С этой целью построим внешнее разложение решений задач (6)-(8) по целым степеням малого параметра вида

$$\bar{y}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{2i} \bar{y}_{2i}(x), \quad \bar{p}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{2i} \bar{p}_{2i}(x). \tag{10}$$

Тогда области

$$\Omega_{1+} = \{x \in \Omega: \xi_1(x)(1 + \nu a^2(x)) + f(x) > a(x)z(x)\}; \tag{11}$$

$$\Omega_{2-} = \{x \in \Omega: \xi_2(x)(1 + \nu a^2(x)) + f(x) < a(x)z(x)\}; \tag{12}$$

$$\Omega_{30} = \Omega \setminus (\bar{\Omega}_{1+} \cup \bar{\Omega}_{2-}) \tag{13}$$

с точностью до некоторых окрестностей аппроксимируют соответственно области Ω_i. Пусть γ_{1+}, γ_{2-} -границы областей Ω_{1+}, Ω_{2-}.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2. Будем считать, что границы γ_{1+}, γ_{2-} являются (n-1)- мерными замкнутыми подмногообразиями класса C^{∞} без края. Для определенности пусть области Ω_{1+}, Ω_{2-} расположены строго внутри Ω и $\bar{\Omega}_{1+} \cap \bar{\Omega}_{2-} = \emptyset$. В окрестности Ξ границы $\partial\Omega$ внешнее разложение (10) не удовлетворяет граничным условиям (2). Поэтому это разложение слеследует дополнить внутренним разложением типа пограничного слоя. С этой целью введем в окрестности Ξ координаты (ζ, s), где ζ-расстояние до $\partial\Omega$ вдоль внешней нормали, s-локальные координаты на поверхности $\partial\Omega$. Обозначая через $t = -\varepsilon^{-1}\zeta$ новую переменную, запишем оператор $-\varepsilon^2\Delta + a$ в координатах (t,s) и расщепим его в ряд по степеням малого параметра

$$-\varepsilon^2\Delta + a \sim -\partial^2/\partial t^2 + a_0(s) + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j (L_j(s,t,\partial/\partial s,\partial/\partial t) + (j!)^{-1}\partial^{(j)} a(0,s)/\partial\varepsilon^{(j)}), \tag{14}$$

где L_j -дифференциальные операторы не выше второго порядка по переменной s и не выше первого порядка по переменной t; их коэффициенты гладко зависят от координат s на $\partial\Omega$ и полиномиально от t; $a_0(s)$-сужение $a(x)$ на $\partial\Omega$.

Решения типа погранслоев ищем в виде рядов

$$\tilde{y}(t,s) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \tilde{y}_j(t,s), \quad \tilde{p}(t,s) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \tilde{p}_j(t,s), \tag{15}$$

коэффициенты которых удовлетворяют задачам

$$\begin{cases} -\partial^2 \tilde{y}_j/\partial t^2 + a_0(s)\tilde{y}_j + \nu^{-1}\tilde{p}_j = -\sum\limits_{k=1}^{j} (L_k(s,t,\partial/\partial s,\partial/\partial t) + \\ \quad +(k!)^{-1}\partial^{(k)} a(0,s)/\partial\varepsilon^{(k)})\tilde{y}_{j-k}(t,s), \\ -\partial^2 \tilde{p}_j/\partial t^2 + a_0(s)\tilde{p}_j - \tilde{y}_j = -\sum\limits_{k=1}^{j} (L_k(s,t,\partial/\partial s,\partial/\partial t) + \end{cases}$$

$$+(k!)^{-1}\partial^{(k)} a(0,s)/\partial\varepsilon^{(k)})\,\tilde p_{j-k}(t,s), \qquad t\in(0,\infty). \tag{16}$$

$$\begin{cases} \tilde y_{2j}(0,s) = -\bar y_{2j}(0,s),\ \tilde p_{2j}(0,s) = -\bar p_{2j}(0,s),\\ \tilde y_{2j+1}(0,s) = \tilde p_{2j+1}(0,s) = 0,\ j\ge 0, \end{cases} \tag{17}$$

Задачи (16)-(17) однозначно разрешимы в классе погранслойных функций, более того, их решения строятся аналитически. Найденные формальные асимптотические решения задач (5)-(7), вообще говоря, не принадлежат $H^1_0(\Omega)$ и, кроме того, в окрестностях Γ_i ($\gamma_{1+}\subset\Gamma_1$, $\gamma_{2-}\subset\Gamma_2$) могут нарушаться неравенства из (6),(7). Поэтому в окрестностях Γ_i возникают дополнительные внутренние погранслои.

В окрестности Γ_1 многообразия γ_{1+} введем координаты (τ^1,σ^1), где $\sigma^1 = (\sigma^1_1,\dots,\sigma^1_{n-1})$-локальные координаты на γ_{1+}, τ^1-расстояние до γ_{1+}, взятое со знаком "+" в Γ_{1+} и "-" в Ω_{10}. В силу (6),(8) окрестность Γ_1 есть область перехода от неравенства $p+\nu u>0$ к равенству. Поверхность перехода будем искать в виде

$$\{x\in\Gamma_1: \tau^1=\varepsilon H(\varepsilon,\sigma^1),\ H(\varepsilon,\sigma^1) = \sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j H_j(\sigma^1),\ H_j(\sigma^1)\in C^{\infty}(\gamma_{1+})\}. \tag{18}$$

Для Γ_2 построение поверхности перехода осуществляется аналогично. В Γ_1 выполним замену переменных $x\to(\eta^1,\sigma^1)$, где $\eta=\varepsilon^{-1}\tau^1 - H(\varepsilon,\sigma^1)$. При этом оператор $-\varepsilon^2\Delta + a$ расщепляется в ряд

$$-\partial^2/\partial\eta^2 + a_0(\sigma^1) + \sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j(\mathfrak{L}_j(\eta^1,\sigma^1,\partial/\partial\eta^1,\partial/\partial\sigma^1) + (j!)^{-1}\partial^{(j)} a(0,\sigma^1)/\partial\varepsilon^{(j)}), \tag{19}$$

в котором операторы $\mathfrak{L}_j$ сходны по структуре с операторами L_j. Определим приближенные асимптотические разложения (метод составных асимптотических разложений)

$$y^{(N)}(\varepsilon,x) = X_1^{(N)}(\varepsilon,x)\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\bar y_j(x) + X_2(\varepsilon,x)\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\tilde y_j(-\varepsilon^{-1}\zeta,s) + \sum_{i=1}^{2}X_{3i}(x)\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\check y_j(\varepsilon^{-1}\tau^i - \mathfrak{H}^{(N)}(\varepsilon,\sigma^i),\sigma^i), \tag{20}$$

$$p^{(N)}(\varepsilon,x)=X_1^{(N)}(\varepsilon,x)\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\bar{p}_j(x)+X_2(\varepsilon,x)\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\tilde{p}_j(-\varepsilon^{-1}\zeta,s)+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}X_{3i}(x)\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\check{p}_j(\varepsilon^{-1}\tau^i-\mathfrak{H}^{(N)}(\varepsilon,\sigma^i),\sigma^i), \tag{21}$$

где

$$\mathfrak{H}^{(N)}(\varepsilon,\sigma^i)=\sum_{j=0}^{N-1}\varepsilon^j\,''_j(\sigma^i); \tag{22}$$

$X_1^{(N)}(\varepsilon,x)$, $X_2(\varepsilon,x)$, $X_{3i}(x)$-срезающие функции, определенные равенствами:

$$X_1^{(N)}(\varepsilon,x)=1 \text{ в } \Omega\setminus(\Gamma_1\cup\Gamma_2),$$

$$X_1^{(N)}(\varepsilon,x)=\begin{cases}1-\chi(\varepsilon^{-1}\tau^1-\mathfrak{H}^{(N)}(\varepsilon,\sigma^1),\sigma^1) & \text{в } \Gamma_1,\\ 1-\chi(\varepsilon^{-1}\tau^2-\mathfrak{H}^{(N)}(\varepsilon,\sigma^2),\sigma^2) & \text{в } \Gamma_2;\end{cases}$$

$X_2(\varepsilon,x)=0$ в $\Omega\setminus\Xi$, $X_2(\varepsilon,x)=\chi(\varepsilon^{-1}\zeta)$ в Ξ; $X_{3i}(x)=0$ вне Γ_i, $X_{3i}(x)=\chi(\tau^i)$ в Γ_i; через χ здесь обозначена функция из $C_0^\infty(R^1)$, равная единице вблизи нуля и имеющая малый носитель, принадлежащий соответственно Ξ и Γ_i.

Решения типа внутреннего погранслоя $\check{y}_j(\eta^i,\sigma)$, $\check{p}_j(\eta^i,\sigma)$ должны быть согласованы с функциями $\bar{y}_j(x)$, $\bar{p}_j(x)$ на границах γ_{i+}, γ_{i-} и обладать свойством $\check{y}_j(|\eta^i|,\sigma)=\check{p}_j(|\eta^i|,\sigma)=O(\exp(-\delta|\eta^i|))$, $|\eta|\to\infty$, $\delta\in(0,1)$. Они определяются из систем

для $\eta^i>0$

$$\begin{cases}-\partial^2\check{y}_j/\partial\eta^{i2}+a_0(\sigma^i)\check{y}_j=-\sum_{k=1}^{j}(\mathfrak{L}_k(\eta^i,\sigma^i,\partial/\partial\eta^i,\partial/\partial\sigma^i)+\\ +(k!)^{-1}\partial^{(k)}a(0,\sigma^i)/\partial\varepsilon^{(k)})\check{y}_{j-k}(\eta^i,\sigma^i)+\chi(\eta^i)\sum_{k=0}^{j}\sum_{l=0}^{j-k}(k!)^{-1}\\ (l!)^{-1}(\partial^{(k)}a(0,\sigma^i)/\partial\varepsilon^{(k)})(\partial^{(l)}\bar{y}_{j-k-l}(0,\sigma^i)/\partial\varepsilon^{(l)})-\\ -\partial^2(\chi(\eta^i)\sum_{k=0}^{j}((j-k)!)^{-1}(\partial^{(j-k)}\bar{y}_k(0,\sigma^i)/\partial\varepsilon^{(j-k)}))/\partial\eta^{i2}+\\ \sum_{k=1}^{j}\sum_{p=0}^{j-k}\mathfrak{L}_k(\eta^i,\sigma^i,\partial/\partial\eta^i,\partial/\partial\sigma^i)((p!)^{-1}\chi(\eta^i)(\partial^{(p)}\bar{y}_{j-k-p}(0,\sigma^i)/\partial\varepsilon^{(p)})),\end{cases}$$

$$
\begin{cases}
-\partial^2 \check{p}_j/\partial\eta^{i\,2} + a_0(\sigma^i)\check{p}_j = -\sum_{k=1}^{j} (\mathfrak{L}_k(\eta^i,\sigma^i,\ \partial/\partial\eta^i,\partial/\partial\sigma^i) + \\
(k!)^{-1}\ \partial^{(k)} a(0,\sigma^i)\ /\ \partial\varepsilon^{(k)}\ )\ \check{p}_{j-k}(\eta^i,\sigma^i) + \chi(\eta^i)(\sum_{k=0}^{j}\ \sum_{l=0}^{j-k} (k!)^{-1} \times \\
(l!)^{-1}\ (\partial^{(k)}\ a(0,\sigma^i)\ /\ \partial\varepsilon^{(k)}\ )(\partial^{(l)}\ \bar{p}_{j-k-l}(0,\sigma^i)\ /\ \partial\varepsilon^{(l)}\ ) - \\
-\ \sum_{k=0}^{j} ((j-k)!)^{-1}\ (\partial^{(j-k)}\ \bar{y}_k(0,\sigma^i)\ /\ \partial\varepsilon^{(j-k)}\ )) + \check{y}_j(\eta^i,\sigma^i) - \\
-\ \partial^2 (\chi(\eta^i) \sum_{k=0}^{j} ((j-k)!)^{-1}\ (\partial^{(j-k)}\ \bar{p}_k(0,\sigma^i)\ /\ \partial\varepsilon^{(j-k)}\ ))/\ \partial\eta^{i\,2} + \\
+ \sum_{k=1}^{j}\ \sum_{p=0}^{j-k} \mathfrak{L}_k(\eta^i,\sigma^i,\partial/\partial\eta^i,\partial/\partial\sigma^i)((p!)^{-1}\ \chi(\eta^i)(\partial^{(p)}\ \bar{p}_{j-k-p}(0,\sigma^i)\ / \\
/_i\,\partial\varepsilon^{(p)}\ )), \qquad j \ge 0,\ i = \overline{1,2};
\end{cases}
\tag{23}
$$

для $\eta < 0$

$$
\begin{cases}
-\partial^2 \check{y}_j/\partial\eta^{i\,2} + a_0(\sigma^i)\check{y}_j + \nu^{-2}\check{p}_j = -\sum_{k=1}^{j} (\mathfrak{L}_k(\eta^i,\sigma^i,\ \partial/\partial\eta^i,\partial/\partial\sigma^i) + \\
+(k!)^{-1}\ \partial^{(k)}\ a(0,\sigma^i)\ /\ \partial\varepsilon^{(k)}\ )\ \check{y}_{j-k}(\eta^i,\sigma^i) + \chi(\eta^i) \sum_{k=0}^{j}\ \sum_{l=0}^{j-k} (k!)^{-1} \times \\
(l!)^{-1}\ (\partial^{(k)}\ a(0,\sigma^i)\ /\ \partial\varepsilon^{(k)}\ )(\partial^{(l)}\ \bar{y}_{j-k-l}(0,\sigma^i)\ /\ \partial\varepsilon^{(l)}\ ) - \\
-\ \partial^2 (\chi(\eta^i) \sum_{k=0}^{j} ((j-k)!)^{-1}\ (\partial^{(j-k)}\ \bar{y}_k(0,\sigma^i)\ /\ \partial\varepsilon^{(j-k)}\ ))/\ \partial\eta^{i\,2} + \\
+ \sum_{k=1}^{j}\ \sum_{p=0}^{j-k} \mathfrak{L}_k(\eta^i,\sigma^i,\partial/\partial\eta^i,\partial/\partial\sigma^i)((p!)^{-1}\ \chi(\eta^i)(\partial^{(p)}\ \bar{y}_{j-k-p}(0,\sigma^i)\ / \\
/\partial\varepsilon^{(p)}\ )) \quad + \nu^{-2}\ \chi(\eta^i) \sum_{k=0}^{j} ((j-k)!)^{-1}\ (\partial^{(j-k)}\ \bar{p}_k(0,\sigma^i)\ /\ \partial\varepsilon^{(j-k)}\ ), \\
\text{повторяется второе уравнение системы (23).}
\end{cases}
\tag{24}
$$

Возможность построения отрезков рядов (22) следует из леммы.

ЛЕММА1. Пусть выполняются условия предположений 1,2. Тогда рекуррентные последовательности систем (23)-(24) разрешимы; их решения экспоненциально стремятся к нулю при $|\eta^i| \to \infty$ и при каждом j зависят от $H_0,\dots,H_{j-1}$, составляющих оэффициенты рядов (22), а H_{j-1} находятся из условий

$\check{y}_j(\eta^i,\sigma^i),\ \check{p}_j(\eta^i,\sigma^i) \in C^1(R^1)\ \forall\ \sigma^i;\quad \nu^{-1}\ \check{y}_j(0,\sigma^i)\ +$

$$+(j!)^{-1}(\partial\xi_i^{(j)}(0,\sigma)/\partial\varepsilon^{(j)})\Big|_{\eta^i=0}=0,\ i=1,2.\ \blacksquare$$

Найдены условия, обеспечивающие выполнение неравенств из (6)-(7) в Ξ, Γ_i. Определим области

$$\begin{cases} \Omega^{+}_{N,\varepsilon}=(\Omega_{1+}\setminus\Gamma_1)\cup\{x\in\Gamma_1:\ \tau^1>\xi^{(N)}_1(\varepsilon,\sigma^1)\},\\ \Omega^{-}_{N,\varepsilon}=(\Omega_{2-}\setminus\Gamma_2)\cup\{x\in\Gamma_2:\ \tau^2>\xi^{(N)}_2(\varepsilon,\sigma^2)\},\end{cases}$$

а также асимптотическое представление управления с точностью $O(\varepsilon^{N+1})$

$$u^{(N)}(\varepsilon,x)=\begin{cases}\xi_1(x),\ x\in\Omega^{+}_{N,\varepsilon},\\ -\nu^{-1}p^{(N)}(x),\ x\in\Omega\setminus(\overline{\Omega}^{+}_{N,\varepsilon}\cup\overline{\Omega}^{-}_{N,\varepsilon}),\\ \xi_2(x),\ x\in\Omega^{-}_{N,\varepsilon}.\end{cases}\qquad(25)$$

Тогда имеет место

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия леммы 1, а также условия, обеспечивающие выполнение неравенств из (6)-(7) в Ξ, Γ_i. Тогда формулы (20)-(21),(25) представляют асимптотики решения задачи (1)-(3), (5) и имеют место оценки

$$\begin{cases}\|\nabla(y-y^{(N)})\|+\|\nabla(p-p^{(N)})\|\le C\begin{Bmatrix}\varepsilon^{N}, & N\text{-четно}\\ \varepsilon^{N-1}, & N\text{-нечетно}\end{Bmatrix},\\[2ex] \|y-y^{(N)}\|+\|p-p^{(N)}\|\le C\begin{Bmatrix}\varepsilon^{N+1}, & N\text{-четно}\\ \varepsilon^{N}, & N\text{-нечетно}\end{Bmatrix},\\[2ex] \|u-u^{(N)}\|\le C\begin{Bmatrix}\varepsilon^{N+1}, & N\text{-четно}\\ \varepsilon^{N}, & N\text{-нечетно}\end{Bmatrix},\\[2ex] |I(u)-I(u^{(N)})|\le O(\begin{Bmatrix}\varepsilon^{2(N+1)}, & N\text{-четно}\\ \varepsilon^{2N}, & N\text{-нечетно}\end{Bmatrix})\ \blacksquare\end{cases}$$

Получены решения задач (1)-(3),(5): для некоэрцитивного функционала, системы с неполными данными. Если локальные ограничения (5) заменить глобальными

$$U=\{\ v:\ \|v\|_{L_2(\Omega)}\le R,\ R=\mathrm{const}>0\ \},\qquad(26)$$

то для оптимального управления возможны два варианта: (i)- $\|u\|<R$; (ii)- $\|u\|=R$. Управление u принадлежит внутренности шара (26),

если

$$\|(f - a\,z)/(\varepsilon^{2} + \nu^{-1})\| < \nu R. \qquad (27)$$

В противном случае решается задача (1)-(3) с ограничениями типа равенства. В обоих случаях найдены и обоснованы полные асимптотические решения.

Достаточно подробное изложение результатов §1 связано с выяснением характера асимптотических решений задач оптимального управления сингулярно возмущенными СРП с ограниченными управлениями. В случае локальных ограничений появляются внутренние переходные слои и далее при рассмотрении более сложных задач возникает проблема их описания и корректного обоснования. В случае же глобальных ограничений задача декомпозируется на две: управление принадлежит внутренности шара или его границе. При этом возникает проблема асимптотического построения решения задачи управления с ограничением типа равенства. Поэтому далее будем, в основном, говорить об особенностях асимптотических решений для других классов оптимальных задач СРП.

В §2 исследуется задача мультипликативного управления, т.е. в задаче (1)-(3) рассматривается уравнение

$$-\varepsilon^{2}\Delta\, y(u) + u(x)\, y(u) = f(x),\ x \in \Omega. \qquad (28)$$

Сформулированная задача имеет решение, но не единственное. Поэтому строящиеся далее асимптотики следует рассматривать как гладкую аппроксимацию одного из элементов оптимального множества. При некоторых предположениях на исходные данные, близких по существу предположениям §1, получены формальные асимптотики решений сформулированной задачи в случае локальных ограничений на управление. Пусть $y^{(N)}$, $p^{(N)}$, $u^{(N)}$ – асимптотики решений условий оптимальности для исходной задачи, две первые из которых имеют вид (20)-(21), а

$$u^{(N)}(\varepsilon,x) = \begin{cases} \xi_1(x),\ x \in \overset{+}{\Omega}_{N,\varepsilon}, \\ \nu^{-1}[y^{(N)}p^{(N)}]_{N},\ x \in \Omega\setminus(\overset{+}{\Omega}_{N,\varepsilon} \cup \overset{-}{\Omega}_{N,\varepsilon}), \\ \xi_2(x),\ x \in \overset{-}{\Omega}_{N,\varepsilon}, \end{cases} \qquad (29)$$

где $\overset{+}{\Omega}_{N,\varepsilon}$, $\overset{-}{\Omega}_{N,\varepsilon}$ определены в §1; $[\,.\,]_{N}$ указание на то, что произведение берется с точностью $O(\varepsilon^{N+1})$.

Кроме того, пусть $\Omega \subset R^{n}$ $(n \le 3)$ и выполняется неравенство

$$\nu > 2u^{-1}[q\|f\|(\bar p^{(N)} + 2\bar y^{(N)}) + \bar p^{(N)}\bar y^{(N)}]. \qquad (30)$$

где $u = \min(1, \min\xi_1)$, $\bar{y}^{(N)} = \max|y^{(N)}|$, $\bar{p}^{(N)} = \max|p^{(N)}|$; q определяется из неравенства $\max|y| \le q\|f\|$, следующего из теорем вложения и не зависит от y. Тогда имеет место

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия леммы 1, $\xi_1 > 0$, $\Omega \subset R^n$ $(n \le 3)$, неравенство (30), а также условия, обеспечивающие выполнение неравенств условий оптимальности в Γ_1; N-четно. Тогда $y^{(N)}$, $p^{(N)}$, $u^{(N)}$ — представляют асимптотическое решение исходной задачи и имеют место оценки

$$\varepsilon\|\nabla(y - y^{(N)})\| + \|y - y^{(N)}\| \le C\varepsilon^{N+1},$$
$$\varepsilon\|\nabla(p - p^{(N)})\| + \|p - p^{(N)}\| \le C\varepsilon^{N+1},$$
$$\|u - u^{(N)}\| \le C\varepsilon^{N+1}, \quad |I(u) - I(u^{(N)})| \le C\varepsilon^{2(N+1)} \quad \blacksquare$$

Найдены условия, при которых возможно построение асимптотик к исходной задаче в случае глобальных ограничений на управление.

В §3 рассматривается такая сингулярно возмущенная задача оптимального управления

$$-\varepsilon^2 \Delta y + \lambda y^3 = u, \; x \in \Omega, \tag{31}$$
$$\partial y/\partial\zeta = 0, \; x \in \partial\Omega, \tag{32}$$

где $0<\varepsilon<<1$, Δ-оператор Лапласа, ζ-внешняя нормаль к $\partial\Omega$; $\lambda = \mathrm{const}$;

$$v \in U = \{u: \xi_1(x) \le u \le \xi_2(x), \; \xi_i(x) \in L_2(\Omega)\}. \tag{33}$$

Требуется найти $u \in U$, доставляющее минимум критерию качества

$$I(v) = (1/6)\|y - y_d\|^6_{L_6(\Omega)} + 0.5\nu\|v\|^2_{L_2(\Omega)}, \tag{34}$$

где $\nu = \mathrm{const} > 0$, $y_d \in L_2(\Omega)$.

Известно, что если $\lambda > 0$, то краевая (31)-(32) задача при фиксированном управлении имеет единственное решение; в противном случае таких решений может быть конечное либо бесконечное число. В случае $\lambda > 0$ для задачи (31)-(34) получены результаты, близкие по содержанию §2. Если же $\lambda < 0$, то рассматриваемый в работе подход неприменим к задаче (31)-(34), так как коэффициенты внутренних разложений не принадлежат классу погранфункций. Для задачи же без ограничений на управление (либо глобальных ограничений) и в этом случае возможно построение асимптотик решений произвольного порядка точности. Если условие (32) заменить условием Дирихле, то в окрестности $\partial\Omega$ точка покоя - нулевая составляющая внутренних разложений -является не асимптотически устойчивой точкой покоя, а точкой покоя типа седла. Показано, что существуют такие начальные условия, определяемые однозначно, при которых коэффициенты внутренних разложений принадлежат классу погранфункций. Здесь же представлены результаты численного эксперимента для модельной задачи, которые позволяют судить об эффективности полученных асимптотик: если $\varepsilon \in [0.01, 0.1]$, то результаты асимптотического анализа совпадают в пределах заданной точности с результатами прямого численного решения исходной задачи.

В §4 для задачи оптимального управления сингулярно возмущенным процессом переноса частиц (линеаризованное уравнение Больцмана, случай плоского слоя) исследуется возможность применения прямого метода, т.е. метода, не основанного на асимптотическом анализе условий оптимальности. Сама краевая задача здесь существенно отличается от задач предыдущих параграфов: она имеет непрерывный и дискретный спектры в неограниченных областях. Это усложняет исследование проблемы разрешимости задач для коэффициентов внутренних разложений. Указанный подход позволяет асимптотически декомпозировать задачу на три более простые, решения которых может быть получено аналитически. Доказана релаксационность итерационного процесса. Задача рассматривается без ограничений на управление. Остановимся на конкретных результатах. Пусть процесс ра. пределения частиц в пластине толщиной $2b$ $(b > 0)$ при изотропном рассеянии описывается краевой задачей

$$\varepsilon\mu\partial\varphi/\partial x + \varphi(x,\mu) = 0.5\beta\int_{-1}^{1}\varphi(x,\mu')d\mu' + q(\mu)u(x),$$

$$\varphi(\mp b,\mu) = 0, \ \mu \gtrless 0, \qquad (35)$$

где $\varphi(x,\mu)$-плотность частиц в точке $x \in [-b,b]$ с направлением движения, косинус угла которого с осью $0x$ равен μ; $q(\mu)u(x)$-плотность внутренних источников излучения; $u(x) \in L_2(-b,b)$-управление; $\beta = \mathrm{const} > 0$; $0 < \varepsilon \ll 1$ (ε-длина свободного пробега частицы).
Требуется найти управление, минимизирующее функционал

$$P_\varepsilon: I_\varepsilon(u) = 0.5\int_{-b}^{b}((\rho(x) - z(x))^2 + \gamma u^2(x))dx, \ \gamma = \mathrm{const} > 0, \qquad (36)$$

где $\rho(x) = \int_{-1}^{1}\varphi(x,\mu)d\mu$-интегральная плотность частиц в точке x; $0 < z(x)$-фиксированная достаточно гладкая функция. При фиксированном управлении задача (35) имеет единственное решение $\varphi(x,\mu) \in H_2^{*}((-b,b)\times(-1,1))$, где

$$\overset{\sim 1}{H}_2((-b,b)\times(-1,1)) = \{\varphi:\ \|\varphi\|_{\tilde{H}^1_2} = (\|\varphi\|^2_{L_2} + \|\mu\partial\varphi/\partial x\|^2_{L_2})^{1/2} < \infty\}. \quad (37)$$

Решение задачи (35)-(36) существует и единственно. Исходя из метода пограничных функций, решение задачи P_ε будем искать в виде

$$\varphi_n(x,\mu) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i (\overline{\varphi}_i(x,\mu) + \Pi_i^{(1)}(\tau_1,\mu) + \Pi_i^{(2)}(\tau_2,\mu)),$$

$$u_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i (\overline{u}_i(x) + U_i^{(1)}(\tau_1) + U_i^{(2)}(\tau_2)), \quad (38)$$

где

$$\Pi_i^{(1)}(\tau_1,\mu),\ U_i^{(1)}(\tau_1) \to 0,\ \tau_1 \to \infty;\ \tau_1 = (x + b)/\varepsilon,$$

$$\Pi_i^{(2)}(\tau_2,\mu),\ U_i^{(2)}(\tau_2) \to 0,\ \tau_2 \to -\infty;\ \tau_2 = (x - b)/\varepsilon.$$

Тогда имеет место

ЛЕММА 2. Для достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$\min(\sum_{i=0}^{m} \varepsilon^i I_i + O(\varepsilon^{m+1})) = \sum_{i=0}^{m} \varepsilon^i \min\hat{I}_i + O(\varepsilon^{m+1}),\ m=2n+1, \quad (39)$$

где $\min\hat{I}_i$ для $i = 2k$ берется по $(\overline{\varphi}_i,\overline{u}_i)$ и для $i = 2k+1$-$(\Pi_i^{(j)},U_i^{(j)}$, $j=\overline{1,2})$.

Для определения $(\overline{\varphi}_i,\overline{u}_i)$, $i > 0$, решается задача

$$P_i:\ I_i = 0.5\int_{-b}^{b}(\overline{\rho}_i^2(x) + \gamma\overline{u}_i^2(x))dx,\ \overline{\rho}_i(x)=\int_{-1}^{1}\overline{\varphi}_i(x,\mu)d\mu,$$

$$\overline{\varphi}_i(x,\mu) = 0.5\beta\int_{-1}^{1}\overline{\varphi}_i(x,\mu')d\mu' + q(\mu)\overline{u}_i(x) - \mu\partial\overline{\varphi}_{i-1}(x,\mu)/\partial x. \quad (40)$$

Для определения $(\Pi_i^{(j)},U_i^{(j)})$ решаются задачи

$$\Pi_i^{(1)}P:\ \Pi_i^{(1)}I = 0.5\int_0^\infty((\int_{-1}^{1}\Pi_i^{(1)}(\tau_1,\mu)d\mu)^2 + \gamma(U_i^{(1)}(\tau_1))^2)d\tau_1 +$$

$$+ \int_{-1}^{0}\overline{\varphi}_i(-b,\mu)\mu\Pi_i^{(1)}(0,\mu)d\mu \to \min.$$

$$\mu\Pi_i^{(1)}/\partial\tau_1 + \Pi_i^{(1)}(\tau_1,\mu) = 0.5\beta\int_{-1}^{1}\Pi_i^{(1)}(\tau_1,\mu')d\mu' + q(\mu)U_i^{(1)}(\tau_1),$$

$$\Pi_i^{(1)}(0,\mu) = -\overline{\varphi}_i(-b,\mu),\ \mu > 0; \quad (41)$$

$$\Pi_i^{(2)}P:\ \Pi_i^{(2)}I = -0.5\int_0^{-\infty}((\int_{-1}^{1}\Pi_i^{(2)}(\tau_2,\mu)d\mu)^2 + \gamma(U_i^{(2)}(\tau_2))^2)d\tau_2 -$$

$$- \int_0^1\overline{\varphi}_i(b,\mu)\mu\Pi_i^{(2)}(0,\mu)d\mu \to \min,$$

$$\mu \partial \Pi_i^{(2)} / \partial \tau_2 + \Pi_i^{(2)}(\tau_2,\mu) = 0.5\beta \int_{-1}^{1} \Pi_i^{(2)}(\tau_2,\mu')d\mu' + q(\mu)U_i^{(2)}(\tau_2),$$

$$\Pi_i^{(2)}(0,\mu) = -\bar{\varphi}_i(b,\mu), \ \mu < 0, \qquad (42)$$

где $\bar{\varphi}_i, \bar{\Phi}_i$ -решение и сопряженная переменная в задаче (40) ■

Доказана разрешимость промежуточных задач (40)-(42), причем, показано, что решение задач оптимальной стабилизации (41)-(42) может быть представлено интегралом по обобщенным в смысле Коши собственным функциям, порожденным соответствующей спектральной задачей для краевых задач из (41)-(42). Последние имеют как непрерывный, так и конечный дискретный спектр. При этом имеет место

ТЕОРЕМА 3. Пусть $q(\mu) = q(-\mu)$, $q(\mu) \in C[-1,1]$, $z(x) \in C^{n+1}[-b,b]$. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что последовательность $\{u_n\}$ обладает свойством релаксации, т. е. при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ имеем

$$I_\varepsilon(u_n) \le I_\varepsilon(u_{n-1} + \varepsilon^n \bar{u}_n) \le I_\varepsilon(u_{n-1}) \le I_\varepsilon(u_0) \le I_\varepsilon(\bar{u}_0). \qquad (43)$$

Кроме того, справедливы оценки

$$\|\varphi^*(x,\mu) - \tilde{\varphi}_n(x,\mu)\|_{\tilde{H}_2^{-1}} \le C\varepsilon^{n+1},$$

$$\|u^*(x) - u_n(x)\|_{L_2} \le C\varepsilon^{n+1},$$

$$|I_\varepsilon(u_n) - I_\varepsilon^*| \le C\,\varepsilon^{2(n+1)}, \qquad (44)$$

где φ^*, u^*, I_ε^*-точное решение задачи (35), (36); $\tilde{\varphi}_n(x,\mu)$ - решение задачи (35) при $u = u_n(x)$ ■

Прямой метод может быть распространен на рассматриваемые в работе экстремальные задачи без ограничений на управление.

В главе 2 представлены результаты по гладкой асимптотической аппроксимации решений задач оптимального управления сингулярно возмущенными эволюционными СРП с ограниченными управлениями. Причем, если вырождается весь дифференциальный оператор, то асимптотики экстремалей по характеру близки асимптотикам экстремалей эллиптических оптимальных задач; если же вырождается только пространственная часть дифференциального оператора, то для описания асимптотики времени схода управления с локального ограничения строятся алгоритмы, основанные только на коэффициентах внешнего разложения.

В §1 рассматривается задача: на решениях параболической системы

$$\varepsilon y_t - \varepsilon^2 y_{xx} + y = u, \tag{45}$$

$$y(0,t)=y(1,t)=0, \; y(x,0)=\varphi(x), \; \varphi(x)\in L_2(0,1) \tag{46}$$

требуется найти

$$J(u) = \inf_{v\in U} \{\int_{Q_T} [(y(v)-z(x))^2 + \nu v^2]\, dxdt\}, \tag{47}$$

где

$\nu = \mathrm{const} > 0$, $z \in L_2(0,1)$, $\bar{Q}_T=\{0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le T\}$;

$$U=\{v: \xi_1(x) \le v \le \xi_2(x) \text{ п.в. в } Q_T;\ 0 < \xi_1 < \xi_2, \xi_i \in L_\infty(0,1)\}. \tag{48}$$

Условия оптимальности в задаче (45)-(48) эквивалентны, как и в §1.1, трем локальным условиям. Нулевые составляющие внешнего разложения для них разбивают прямоугольник Q_T на ряд прямоугольников, в каждом из которых справедливо свое локальное условие. В частности, если $Q_T = Q_{1+} \cup Q_{30}$, где $Q_{1+}=\{(x,t): \xi_1(x)(1+\nu)-z(x) > 0, t \in [0,T]\}$, $Q_{30}=\bar{Q}_T \setminus \bar{Q}_{1+}$, то внешние разложения дополняются погранслойными в окрестности сторон, а также угловыми погранфункциями. Неравенство

$$\xi_1(x)(1+2\nu)+\varphi(x)|\mathrm{sign}\varphi(x)-1|/2-2z(x)>0, \; x \in [0,x_1), \tag{49}$$

где x_1-единственный корень уравнения $\xi_1(x)(1+\nu)-z(x)=0$, обеспечивает выполнение неравенства в локальном условии оптимальности в Q_{1+} вне окрестности $x = x_1$ и углов формального асимптотического решения задачи. В окрестности прямой $x = x_1$ появляется внутренний переходный слой, который описывается аналогично §1.1. Пусть $y^{(N)}$, $p^{(N)}$, $u^{(N)}$ -составные асимтотики всех разложений порядка N, тогда верна

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены стандартные условия по гладкости и согласования граничных условий по непрерывности, а также неравенства (типа (49)), обеспечивающие выполнение неравенства условий оптимальности в $Q^+_{N,\varepsilon}$ (определяется аналогично $\Omega^+_{N,\varepsilon}$ из §1.1), тогда $y^{(N)}(\varepsilon,x,t)$, $p^{(N)}(\varepsilon,x,t)$, $u^{(N)}(\varepsilon,x,t)$ представляют асимптотики решения задачи (45)-(48) и имеют место оценки

$$\|(y-y^{(N)})_x\| + \|(p-p^{(N)})_x\| \le C \begin{Bmatrix} \varepsilon^{N}, & N\text{-четно} \\ \varepsilon^{N-1}, & N\text{-нечетно} \end{Bmatrix},$$

$$\|y-y^{(N)}\| \;\; \|p-p^{(N)}\| \le C \begin{Bmatrix} \varepsilon_N^{N+1}, & N\text{-четно} \\ \varepsilon, & N\text{-нечетно} \end{Bmatrix},$$

$$\|u-u^{(N)}\| \le C\begin{cases}\varepsilon^{N+1}, & N\text{-четно}\\ \varepsilon^{N}, & N\text{-нечетно}\end{cases}, \quad J(u)-J(u^{(N)})=C(\begin{cases}\varepsilon^{2(N+2)}, & N\text{-четно}\\ \varepsilon^{2N}, & N\text{-нечетно}\end{cases}),$$

где $\|.\|$-норма в $L_2(Q_T)$ ■

Построено решение задачи (45)-(48) в случае $u(x,t) = g(x)r(t)$, где $g(x) \in C^{\infty}(0,1)$, $r(t) \in L_2(0,T)$-управляющая функция. Здесь внутренний переходный слой возникает в окрестности прямой $t = t_*$, где t_*-корень корень уравнения $\xi_1(\nu+\|g\|^2)-(g,z(.,t)) = 0$, $(.,.)$ - скалярное произведение в $L_2(0,1)$.

В §2 построены полные асимптотические разложения решений задачи оптимального распределенного управления параболической системой с малым параметром при операторе Лапласа. Ограничения на управление носят глобальный характер. Так в цилиндре $Q_T=\{(x,t): x \in \Omega,\ t \in [t_0,T],\ T < \infty\}$, где Ω ($\Omega \in R^n$)-ограниченное множество с компактным замыканием и гладкой (класса C^{∞}) (n-1)-мерной границей $\partial\Omega$, состояние управляемой системы $y(u)$ определяется как решение задачи

$$y_t - \varepsilon^2 \Delta y = u,\ y(x,t)=0,\ x \in \partial\Omega;\ y(x,t_0)= \varphi(x);\ \varphi \in L_2(\Omega). \quad (50)$$

Требуется найти $u \in U$

$$I(u) = \inf_{v\in U} \{ \int_{Q_T} [y^2(v) + \nu v^2] dxdt\},\ \nu = const > 0, \quad (51)$$

где

$$U = \{ v : \|v\|_{L_2(Q_T)} \le R,\ R < \infty \}. \quad (52)$$

Задача (50)-(52) имеет единственное решение и при этом: (i) - либо $\|u\| < R$; (ii) - либо $\|u\| = R\ \forall\ \varepsilon > 0$. При выполнении стандартных условий по гладкости и согласованию начальных и краевых условий формальное асимптотическое решение реализует случай (i), если выполняется неравенство

$$(2\nu)^{-1/2}\ \|\varphi\|\ (ch\ (\nu^{-1/2}\ (T-t_0)))^{-1}\ (0.5\ \nu^{1/2}\ sh(2\ \nu^{-1/2}\ (T-t_0))-$$

$$-(T-t_0))^{1/2} < R. \quad (53)$$

Пусть неравенство (53) не выполняется. Тогда $u = -(\nu + \lambda)^{-1} p$, $\lambda \ne 0$, $\|u\|_{L_2(Q_T)}= R$, где p- решение стандартной системы оптимальности (типа (4), но для параболических уравнений). Де

$$\bar{\lambda} = (\nu + \lambda)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i} \lambda_{i} . \qquad (54)$$

Тогда коэффициенты разложения (54) определяются из условий

$$\|\bar{u}_0\|^2_{L_2(Q_T)} = R^2 , \qquad (55)$$

$$\sum_{i=0}^{k} \int_{Q} \bar{u}_i \bar{u}_{k-i} dxdt = \mathfrak{L}_k , \qquad (56)$$

где $\bar{u}_i$ - коэффициенты внешнего разложения для u; $\mathfrak{L}_k$ - известная функция коэффициентов внешних и внутренних разложений экстремалей задачи.

Уравнение (55) нелинейно относительно переменной λ_0, а уравнения (56) линейны относительно λ_k. Имеет место

ЛЕММА 3. Пусть $\varphi \in L_2(\Omega)$ и не выполняется неравенство (53). Тогда уравнение (55) всегда имеет конечное число решений относительно λ_0, но лишь на единственном положительном решении $(\lambda_0^* > 0)$ достигает минимума величина $\|\bar{y}_0\|^2_{L_2(Q_T)}$, т.е. значение $\lambda_0 = \lambda_0^*$ является множителем Лагранжа $(\lambda_0^* = (\nu + \lambda_0)^{-1})$ в вырожденной задаче оптимального управления ∎

Доказано, что в уравнениях (56) коэффициентом при λ_k выступает один и тот же множитель ($\mathfrak{L}$). Поэтому все они однозначно разрешимы, если $\mathfrak{L} \neq 0$. Пусть $y^{(N)}, p^{(N)}, u^{(N)}, \bar{\lambda}^{(N)}$ - конечномерные аппроксимации разложений экстремалей в задаче (34)-(35), причем, $y^{(N)}, p^{(N)}, u^{(N)}$ состоят из сумм внешних и внутренних разложений. Тогда справедлива

ТЕОРЕМА 5. Пусть выполнено предположение о гладкости и согласовании и $\mathfrak{L} \neq 0$. Тогда указанные разложения являются асимптотическим решением задачи (50)-(52) и справедливы оценки

$$\begin{cases} \|\mathrm{grad}_x(y - y^{(N)})\|_{L_2(Q_T)} + \|\mathrm{grad}_x(p - p^{(N)})\|_{L_2(Q_T)} \le C\,\varepsilon^{N} , \\ \|y - y^{(N)}\|_{L_2(Q_T)} + \|p - p^{(N)}\|_{L_2(Q_T)} \le C\,\varepsilon^{N+1} , \quad \|u - u^{(N)}\| \le C\,\varepsilon^{N+1} , \\ \|J(u) - J(u^{(N)})\| \le C\,\varepsilon^{2(N+1)} ; \end{cases} \qquad (57)$$

$$|\bar{\lambda} - \bar{\lambda}^{(N)}| \le C\,\varepsilon^{N+1} . \qquad (58)$$

причем, если выполняется неравенство (53), то справедливы оценки

(57) с коэффициентами разложений, соответствующих случаю (1); если же неравенство (53) не выполняется, то справедливы оценки (57)-(58) с коэффициентами разложений, соответствующих случаю (11) ■

В случае выполнения неравенства (53) строится регулятор нулевого порядка на основании предельного перехода Н.Н. Красовского* в соответствующем оптимальном программном управлении. В частности, указанный регулятор имеет вид

$$u_{\varepsilon}=-\nu^{-1/2}\ \mathrm{th}(\nu^{-1/2}(T-t))\ y_{\varepsilon}(x,t).$$

Показано, что $\|u_{\varepsilon}-\bar{u}_{o}\|_{L_2(Q_T)}\le C\ \varepsilon$, $|I(u_{\varepsilon})-I(\bar{u}_{o})|\le C\ \varepsilon^{2}$,

где $\bar{u}_o$-оптимальный регулятор в вырожденной задаче. Если в задаче (50)-(52) положить $T=\infty$, то все конструкции асимптотического алгоритма упрощаются, например, уравнение (55) имеет решение $\lambda_o^{1/2} = -(2R^2)/\|\varphi\|^2$, а $\mathfrak{L}\neq 0$ при любых значениях параметров задачи.

В §3 исследована задача (50)-(52) при $u=g(x)\ u(t)$, где $g(x)$ - фиксированная функция. Особенность этой задачи состоит в том, что уравнения для коэффициентов внешних разложений содержат коэффициенты внутренних разложений, полученные на предыдущих итерациях. Для нее имеют место результаты, аналогичные §2. Рассматриваемое в этом параграфе управление "слабее", нежели в §2. И это проявляется при $T\to\infty$. В общем случае даже предельная задача теряет смысл. Она имеет решение только в случае выполнения равенства $\|g\|^2\varphi(x)-g(x)(g,\varphi)=0$. Тем не менее регулятор нулевого порядка стабилизирует решения исходной задачи.

В §4 представлены результаты асимптотического анализа задачи синтеза оптимального управления для одномерного параболического уравнения на основе решения сингулярно возмущенной краевой задачи для интегро- дифференциального уравнения Риккати. Это связано с практической невозможностью получения синтезированных управлений высокого порядка точности из асимптотик программных экстремалей. Пусть $\Omega=(0,1)$ и управляемый процесс описывается краевой задачей (34) с управлением $u=g(x)\ u(t)$. Требуется по принципу обратной связи найти управление u, минимизирующее критерий качества

* Красовский Н.Н. Теория управления движением.- М,: Наука, 1968.-475с. Егоров А. И. Оптимальное управление линейными системами. - К.: Выща школа.- 1988.-280с.

$$I(u) = \int_{t_0}^{T}\left[\iint_{00}^{11} y(x,t)\, d(x,\xi)\, y(\xi,t)\,dx d\xi + \nu\, u^2(t)\right]dt, \qquad (59)$$

где d – достаточно гладкая симметричная положительная функция. Оптимальное управление тогда определяется как функционал вида

$$u[t,y] = -\nu^{-1} \iint_{00}^{11} K(x,\xi,t)\, g(x)\, y(\xi,t)\, dx d\xi, \qquad (60)$$

где симметричная положительно определенная при $t < T$ функция $K(x,\xi,t)$ определяется как решение сингулярно возмущенной интегро- дифференциальной краевой задачи Риккати

$$\begin{cases} -K_t = \varepsilon^2 (K_{xx}(x,\xi,t) + K_{\xi\xi}(x,\xi,t)) - \nu^{-1} \iint_{00}^{11} K(x,s,t)\, K(z,\xi,t) g(s)\, \times \\ \qquad g(z)\, ds dz + d(x,\xi), \\ K(0,\xi,t) = K(x,0,t) = K(1,\xi,t) = K(x,1,t) = K(x,\xi,T) = 0. \end{cases} \qquad (61)$$

Тогда

$$I(u) = \iint_{00}^{11} \varphi(x)\, K(x,\xi,t_0)\, \varphi(\xi) dx d\xi \qquad (62)$$

Аналитически строятся коэффициенты внешнего разложения решения задачи (61) и доказана его положительная определенность при $t < T$. Внешнее разложение дополняется погранслойными (в окрестности сторон квадрата $(0,1)\times(0,1)$). Пусть $K^n(x,\xi,t)$-сумма частичных сумм указанных выше разложений. Имеет место

ТЕОРЕМА 6. Пусть g, d, φ - $(n+2)$ раза непрерывно дифференцируемые функции. Тогда справедливы оценки

$$|u[t,y] - u^n[t,y^n]| \le C\,\varepsilon^{n+1},$$

$$|I(u) - I(u^n)| \le C\,\varepsilon^{2(n+2)},$$

где $u^n[t,y^n]$-регулятор (60), в котором вместо K взята функция K^n. При $T = \infty$ показана невозможность применения рассматриваемых в работе методов асимптотического анализа к задаче (61) (в этом случае $K_t = 0$).

В §5 исследуется задача §2 в случае локальных ограничений.

Построено решение вырожденной задачи. В общем случае оно содержит несколько поверхностей, на которых теряется гладкость внешних разложений траекторий экстремалей, хотя решение вырожденной задачи на них непрерывно. Построено первое приближение поверхности схода управления с ограничения. Дальнейшее уточнение этой поверхности сдерживается потерей гладкости коэффициентов внутренних разложений в окрестности границы. Получено обоснование асимптотик решения исходной задачи до порядка $O(\varepsilon^{3})$.

Задача §3 для локальных ограничений на управление исследована в §6. Здесь удается получить полное решение задачи. Время схода управления с ограничения построено до любого порядка точности и при этом используются только коэффициенты внешнего разложения. Построение формального асимптотического решения исходной задачи основано на следующей лемме

ЛЕММА 4. Пусть: 1) $\varphi, g \in C^{\infty}(\Omega)$; $\varphi = 0$, $x \in \partial\Omega$; 2) $(g,\varphi) > \xi \|g\| \nu^{1/2} \times \operatorname{cth}(\nu^{-1/2}\|g\|(T - t_0))$. Тогда ряд $\tau = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j} \tau_j$ строится однозначно и при этом: если $\tau_1 > 0$, то

$$\tau_i = -(g, \partial\bar{p}_0(\cdot,\tau_0+)/\partial t)^{-1} [R_{i+}(\tau_0,\dots,\tau_{i-1}) + \nu^{1/2}\|g\|^{-1}(\operatorname{th}(\nu^{-1/2}\|g\| \times (T - \tau_0))\int_{t_0}^{\tau_0} (g, \Delta\bar{y}_{i-2}(\cdot,t))dt + (\operatorname{ch}(\nu^{-1/2}\|g\|(T - \tau_0)))^{-1}\int_{\tau_0}^{T} [\operatorname{sh}(\nu^{-1/2} \times \|g\|(T - t))((g,\Delta\bar{y}_{i-2}(\cdot,t)) - \nu^{-1}\|g\|^{2}\alpha_i(t)) + \nu^{-1/2}\|g\|(g,\Delta\bar{p}_{i-2}(\cdot,t)) \times \operatorname{ch}(\nu^{-1/2}\|g\|(T - t))]dt)], \quad i > 2, \tag{63}$$

где $R_{i+}(\tau_0,\dots,\tau_{i-1})$, $\alpha_i(t)$ – известные функции; причем, если

$$\Lambda_{t_0} = R_{i+}(\tau_0,\dots,\tau_{i-1}) + \nu^{1/2}\|g\|^{-1}(\operatorname{th}(\nu^{-1/2}\|g\|(T - \tau_0)) \times \int_{t_0}^{\tau_0} (g,\Delta\bar{y}_{i-2}(\cdot,t))dt + (\operatorname{ch}(\nu^{-1/2}\|g\|(T - \tau_0)))^{-1}\int_{\tau_0}^{T} [\operatorname{sh}(\nu^{-1/2} \times \|g\|(T - t))((g,\Delta\bar{y}_{i-2}(\cdot,t)) - \nu^{1}\|g\|^{2}\alpha_i(t)) + \nu^{-1/2}\|g\| \times (g,\Delta\bar{p}_{i-2}(\cdot,t))\operatorname{ch}(\nu^{-1/2}\|g\|(T - t))]dt) > 0, \tag{64}$$

то $\tau_i > 0$, в противном случае – $\tau_i < 0$; если же $\tau_1 < 0$, то формула (63) вместе с неравенством (64) сохраняют свой содержательный смысл с заменой $(g,\partial\bar{p}_0(\cdot,\tau_0+)/\partial t) \to (g,\partial\bar{p}_0(\cdot,\tau_0-)/\partial t)$, $R_{i+}(\tau_0,\dots,\tau_{i-1}) \to R_{i-}(\tau_0,\dots,\tau_{i-1})$. При этом функции $(\bar{y}_i, \bar{p}_i)$ определяются из

при $t \in (t_0,\tau_0)$: $\Big\{\ \bar{y}_i = \Delta\bar{y}_{i-2}$,

$$\begin{cases} \dot{\overline{p}}_i = -\overline{y}_i - \Delta\overline{p}_{i-2}; \end{cases} \qquad (65)$$

при $t \in (\tau_0, T)$:
$$\begin{cases} \dot{\overline{y}}_i + \nu^{-1} g(x)(g,\overline{p}_i) = \Delta\overline{y}_{i-2} - \nu^{-1} g(x)\alpha_i(t), \\ \dot{\overline{p}}_i = -\overline{y}_i - \Delta\overline{p}_{i-2}; \end{cases} \qquad (66)$$

с краевыми условиями: $\overline{y}_i(x,t_0) = 0$, $\overline{p}_i(x,T) = 0$, где

$$(g,\overline{p}_i) = -[(g,\partial\overline{p}_0(\cdot,\tau_0)/\partial t)\tau_i + R_i(\tau_0,\dots,\tau_{i-1})]\ \mathrm{sh}(\nu^{-1/2}\|g\|\times$$
$$\times(T-t))(\mathrm{sh}(\nu^{-1/2}\|g\|(T-\tau_0))) + \mathrm{sh}(\nu^{-1/2}\|g\|(t-\tau_0))(\nu^{-1/2}\|g\|\times$$
$$\times\mathrm{sh}(\nu^{-1/2}\|g\|(T-\tau_0)))^{-1}\int_{\tau_0}^{T}[\mathrm{sh}(\nu^{-1/2}\|g\|(T-t))((g,\Delta\overline{y}_{i-2}(\cdot,t)) -$$
$$-\nu^{-1}\|g\|^2\alpha_i(t)) + \nu^{-1/2}\|g\|(g,\Delta\overline{p}_{i-2}(\cdot,t))\ \mathrm{ch}(\nu^{-1/2}\|g\|(T-t))]dt -$$
$$-\nu^{1/2}\|g\|^{-1}\int_{\tau_0}^{t}[((g,\Delta\overline{p}_{i-2}(\cdot,\xi))\mathrm{ch}(\nu^{-1/2}\|g\|(t-\xi)) + ((g,\Delta\overline{y}_{i-2}(\cdot,\xi)) -$$
$$-\nu^{-1}\|g\|^2\alpha_i(\xi))\mathrm{sh}(\nu^{-1/2}\|g\|(t-\xi))]d\xi,$$

причем, $(g,\partial\overline{p}_0(\cdot,\tau_0)/\partial t) = (g,\partial\overline{p}_0(\cdot,\tau_0+)/\partial t)$, $R_i(\tau_0,\dots,\tau_{i-1}) = R_{i+}(\tau_0,\dots,\tau_{i-1})$, если $\tau_1 > 0$ и $(g,\partial\overline{p}_0(\cdot,\tau_0)/\partial t) = (g,\partial\overline{p}_0(\cdot,\tau_0-)/\partial t)$, $R_i(\tau_0,\dots,\tau_{i-1}) = R_{i-}(\tau_0,\dots,\tau_{i-1})$, если $\tau_1 < 0$.

Внешние разложения при этом дополняются погранфункциями

$$\begin{cases} \tilde{y}_{k_t} - \tilde{y}_{k_{\overline{\tau}\,\overline{\tau}}} = -\sum_{j=1}^{k} L_j(s,\overline{\tau},\partial/\partial s,\partial/\partial\overline{\tau})\ \tilde{y}_{k-j}(\overline{\tau},s,t), \\ \tilde{p}_{k_t} + \tilde{p}_{k_{\overline{\tau}\,\overline{\tau}}} + \tilde{y}_k = \sum_{j=1}^{k} L_j(s,\overline{\tau},\partial/\partial s,\partial/\partial\overline{\tau})\,\tilde{p}_{k-j}(\overline{\tau},s,t), \\ \tilde{y}_k(0,s,t) = -\overline{y}_k(0,s,t), \quad \tilde{p}_k(0,s,t) = -\overline{p}_k(0,s,t); \\ \tilde{y}_k(\overline{\tau},s,t_0) = \tilde{p}_k(\overline{\tau},s,T) = 0. \end{cases} \qquad (67)$$

Пусть построен отрезок асимптотического ряда

$$\tau^N = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i \tau_i.$$

Рассмотрим асимтотические разложения

$$y^{(N)}(x,t) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^{j}(\bar{y}_j(x,t) + \tilde{y}_j(\bar{\tau},s,t)), \tag{68}$$

$$p^{(N)}(x,t) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^{j}(\bar{p}_j(x,t) + \tilde{p}_j(\bar{\tau},s,t)), \tag{69}$$

$$u^{(N)}(t) = \begin{cases} \xi, \ t_0 \le t \le \tau_0, \\ -\nu^{-1}(g,p^{(N)}(.,t)), \ \tau_0 \le t \le T, \end{cases} \tag{70}$$

где функции: $\bar{y}_i$, $\bar{p}_i$ определены в лемме 4; $\tilde{y}_i$, $\tilde{p}_i$ находятся из системы (67).

ТЕОРЕМА 7. Пусть выполнены условия леммы 4. Тогда функции (68)-(70) представляют асимптотики решения исходной задачи и имеют место оценки

$$\|\nabla(y - y^{(N)})\|_{L_2(Q_T)} + \|\nabla(p - p^{(N)})\|_{L_2(Q_T)} \le C\varepsilon^{N},$$

$$\|y - y^{(N)}\|_{L_2(Q_T)} + \|p - p^{(N)}\|_{L_2(Q_T)} \le C\varepsilon^{N+1},$$

$$\|u - u^{(N)}\|_{L_2(t_0,T)} \le C\varepsilon^{N+1}, \quad |I(u) - I(u^{(N)})| \le C\varepsilon^{2(N+1)} \quad \blacksquare$$

Г л а в а 3 посвящена решению задач оптимального управления тепловым полем в тонких телах. Под тонким телом понимается такое тело, у которого один из размеров много меньше какого-то другого (тонкий стержень, тонкая пластина). С одной стороны, эти задачи имеют прикладную направленность, а с другой,-они относятся к критическому случаю сингулярно возмущенных систем (вырожденная задача имеет семейство решений). Малый параметр здесь имеет конкретный геометрический смысл: это отношение толщины стержня к его длине. Кроме того, при этом укороченная система оптимальности не совпадает с вырожденной.

В §1 рассматривается задача:в плоском стержне (тонком прямоугольнике) управляемое тепловое поле описывается функцией $y(x,t)$, $x = (x_1,x_2)$, которая удовлетворяет в области $Q_\infty = \{ (x,t) : 0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le \varepsilon, t_0 \le t \le \infty \}$ краевой задаче

$$\begin{cases} y_t - \Delta_{x_1x_2} y = u(x,t); \\ y(x,t_0) = \varphi(x), \ y(0,x_2,t) = \psi_1(x_2,t), \ y(1,x_2,t) = \psi_2(x_2,t); \\ y_{x_2}(x_1,0,t) - A\varepsilon y(x_1,0,t) = 0, y_{x_2}(x_1,\varepsilon,t) + A\varepsilon y(x_1,\varepsilon,t) = 0, \end{cases} \tag{71}$$

где $A = \mathrm{const} > 0$, $\Delta_{x_1x_2}$ -оператор Лапласа, $\varphi(x) \in L_2[(0,1)\times(0,\varepsilon)]$, $\psi_i \in L_2[(0,\varepsilon)\times(t_0,\infty)]$.

Требуется найти $u \in U$, доставляющее минимум функционалу

$$J(v) = \int\limits_{Q_\infty} [y^2(v) + \nu v^2] dxdt, \quad \nu = \mathrm{const} > 0, \tag{72}$$

где $U = \{ v: \| v \|_{L_2(Q_\infty)} \le R \varepsilon^{1/2}, R = \mathrm{const} > 0 \}$. (73)

При этом, что характерно для задач с глобальными ограничениями, исходная задача асимптотически декомпозируется на две: (i)-либо $\|u\| < R \varepsilon^{1/2}$; (ii)-либо $\|u\| = R \varepsilon^{1/2}$. В случае (i) нулевая составляющая внешнего разложения условий оптимальности определяется из системы

$$\begin{cases} \partial\alpha_0/\partial t - \partial^2 \alpha_0/\partial\xi_2^2 + 2A\alpha_0(\xi_1,t) + \nu^{-1} \beta_0(\xi_1,t) = 0, \\ -\partial\beta_0/\partial t - \partial^2 \beta_0/\partial\xi_2^2 + 2A\beta_0(\xi_1,t) = \alpha_0(\xi_1,t), \end{cases} \tag{74}$$

где $\overline{y}_0 = \alpha_0, \overline{p}_0 = \beta_0, x_1 = \xi_1, x_2 = \varepsilon \xi_2$.

Начальные и граничные условия для системы (74) определяются из требования принадлежности внутренних разложений классу погранфункций. Задачи для коэффициентов внутренних разложений решаются методом Фурье, а требование их принадлежности классу погранфункций обеспечивается обращением в нуль нулевых составляющих соответствующих рядов Фурье. В частности, при стандартных условиях по гладкости и согласованности исходных данных, а также $\phi_1 = \phi_2 = 0$, для задачи (74) получим

$$\alpha_0(\xi_1, t_0) = \varphi(\xi_1, 0), \ \alpha_0(0,t) = \beta_0(0,t) = \alpha_0(1,t) = \beta_0(1,t) = 0.$$

Решение последней при этом выражается рядами

$$\begin{cases} \alpha_0(\xi_1,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k \exp(-r_k(t - t_0)) X_k(\xi_1), \\ \beta_0(\xi_1,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k (r_k + B_k)^{-1} \exp(-r_k(t - t_0)) X_k(\xi_1), \end{cases} \tag{75}$$

где $B_k = (\pi k)^2 + 2A$, $r_k^2 = B_k^2 + \nu^{-1}$, $\varphi_k = \int\limits_0^1 \varphi(\xi_1,0) X_k(\xi_1) d\xi_1$,

$X_k(\xi_1) = (2)^{1/2} \sin(\pi k \xi_1)$.

Условие принадлежности управления внутренности шара (73) определяется тогда, согласно (75), неравенством

$$\nu^{-1} 2^{-1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2 r_k^{-1} (r_k + B_k)^{-2} \right)^{1/2} < R. \tag{76}$$

В случае (ii) коэффициенты разложения (54) определяются из задач вида (55)-(56). В частности, доказано, что уравнение

$$\lambda_0^2 \, 2^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2 \, \overline{r}_k^{-1} (\overline{r}_k + B_k)^{-2} = R^2,$$

где $\overline{r}_k^2 = B_k^2 + \lambda_0$, $\overline{r}_k \ge 0$ имеет единственное положительное решение и все λ_i, $i > 0$ однозначно определяются из линейных систем. Пусть, как всегда, $y^{(N)}$, $p^{(N)}$, $u^{(N)}$, $\bar\lambda^{(N)}$ -конечномерные аппроксимации сумм внешних и внутренних разложений (кроме $\bar\lambda^{(N)}$) в исходной задаче. Тогда верна

ТЕОРЕМА 8. Пусть выполнены условия по гладкости и согласованию исходных данных. Тогда указанные разложения являются асимптотическим решением задачи (71)-(73) и справедливы оценки

$$\left\{\begin{array}{l} \| y - y^{(N)} \|_{L_2(\Omega_\infty)} + \|(y - y^{(N)})_{\xi_1}\|_{L_2(\Omega_\infty)} \le C\varepsilon^{N+1}, \\ \| p - p^{(N)} \|_{L_2(\Omega_\infty)} + \|(p - p^{(N)})_{\xi_1}\|_{L_2(\Omega_\infty)} \le C\varepsilon^{N+1}, \\ \| u - u^{(N)} \|_{L_2(\Omega_\infty)} \le C\varepsilon^{N+1}, \ |J(u) - J(u^{(N)})| \le C\varepsilon^{2(N+1)+1} \end{array}\right. \qquad (77)$$

$$|\bar\lambda - \bar\lambda^{(N)}| \le C\varepsilon^{N+1}, \qquad (78)$$

где $\Omega_\infty = \{ (\xi, t): 0 \le \xi_i \le 1, t_0 \le t \le \infty \}$, p - сопряженная переменная условий оптимальности задачи (71)-(73),

причем, если выполняется неравенство (76), то справедливы оценки (77) с коэффициентами внешнего и внутренних разложений для задачи (I); если же неравенство (76) не выполняется, то справедливы оценки (77)-(78) с коэффициентами внешнего и внутренних разложений для задачи (II) ∎

Задача (71)-(73) может быть исследована в области Q_T, $T < \infty$. Но при этом результаты получаются менее конструктивными, так как выражаются через ряды сложной структуры.

Во втором параграфе рассматривается управляемый процесс, описываемый краевой задачей (71), в которой $u(x,t) = g(x)r(t)$, где $g(x) \in L_2[(0,1)\times(0,\varepsilon)]$. В качестве допустимых управлений тогда возьмем множество

$$R_\partial = \{ r: \|r\|_{L_2(t_0,T)} \le R \}. \qquad (79)$$

Требуется найти $r \in R_\partial$, доставляющее минимум функционалу

$$I(r) = \varepsilon^{-1}\left(\int_0^1\int_0^\varepsilon q(x_1)y(x,T)dx\right)^2 + \nu\varepsilon\int_{t_0}^T r^2(t)dt, \ \nu = \text{const} > 0, \qquad (80)$$

где $q(x_1) \in L_2[0,1]$.

Задача (71), (79)-(80) имеет единственное решение и при этом: (i)-либо $\|r\|_{L_2(t_0,T)} < R$; (ii)-либо $\|r\|_{L_2(t_0,T)} = R$. В случае (i) нулевая составляющая внешнего разложения (α_0, β_0) условий оптимальности удовлетворяет краевой задаче

$$\begin{cases}\partial\alpha_0/\partial t - a^2\partial^2\alpha_0/\partial\xi_1^2 + 2A\alpha_0 + \nu^{-1} g(\xi_1,0)\int_0^1 g(\zeta_1,0)\beta_0(\zeta_1,t)d\zeta_1 = 0,\\ -\partial\beta_0/\partial t - a^2\partial^2\beta_0/\partial\xi_2^2 + 2A\beta_0 = 0,\\ \alpha_0(\xi_1,t_0) = \varphi(\xi_1,0),\ \beta_0(\xi_1,T) = q(\xi_1)\int_0^1 q(\varkappa_1)\alpha_0(\varkappa_1,T)d\varkappa_1,\\ \alpha_0(0,t) = \beta_0(0,t) = \alpha_0(1,t) = \beta_0(1,t) = 0.\end{cases} \qquad (81)$$

Задача (81) представляет собой условия оптимальности для такой задачи

$$\begin{cases} I_0 = (\int_0^1 q(\xi_1)\alpha_0(\xi_1,T)d\xi_1)^2 + \int_{t_0}^T \bar{F}_0^2(t)dt,\\ \partial\alpha_0/\partial t - a^2\partial^2\alpha_0/\partial\xi_1^2 + 2A\alpha_0 = g(\xi_1,0)\bar{F}_0(t),\\ \alpha_0(\xi_1,t_0) = \varphi(\xi_1,0),\quad \alpha_0(0,t) = \alpha_0(1,t) = 0,\end{cases} \qquad (82)$$

которая имеет решение

$$\bar{F}_0(t) = -\gamma(t)\alpha(t_0)(\nu + \int_{t_0}^T \gamma^2(t)dt)^{-1},$$

где $\alpha(t_0) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i\varphi_i \exp(-(\lambda_i^2 + 2A)(T - t_0))$,

$\gamma(t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i g_i \exp(-(\lambda_i^2 + 2A)(T - t))$;

$q_i = \int_0^1 X_i(\xi_1)q(\xi_1)d\xi_1$, $g_i = \int_0^1 X_i(\xi_1)g(\xi_1,0)d\xi_1$,

$\varphi_i = \int_0^1 X_i(\xi_1)\varphi(\xi_1,0)d\xi_1$;

$X_i(\xi_1)$, λ_i-решения спектральной задачи

$X_k'' + \lambda_k^2 X_k = 0$, $X_k(0) = X_k(1) = 0$.

Условие принадлежности $\bar{F}$ внутренности шара (79) принимает вид

$$|\alpha(t_0)|\,\|\gamma\|_{L_2(t_0,T)}(\nu + \|\gamma\|^2_{L_2(t_0,T)})^{-1} < R. \qquad (83)$$

В случае (11) для множителя Лагранжа λ справедливо разложение (54). Тогда для определения λ_0 получим уравнение

$$\lambda_0^2\|\gamma\|^2(\alpha^2(t_0) - R^2\|\gamma\|^2) - 2R^2\|\gamma\|^2\lambda_0 - R^2 = 0,$$

которое всегда имеет единственное решение, доставляющее минимум I_0. Другие составляющие разложения (54) однозначно определяются из соотношений вида (56). Обоснование асимптотических решений осуществляется аналогично §1.

В § 3 исследуется задача предыдущего параграфа для локальных ограничений на управление. Найдено в виде асимптотического ряда время схода управления с ограничения до любого порядка точности, однако асимптотики решений исходной задачи удалось обосновать только до порядка $O(\varepsilon^3)$, что связано с разрывом коэффициентов для внутренних разложений.

В последней, ч е т в е р т о й главе, рассмотрены некоторые задачи минимаксного асимптотического оценивания функционалов от решений сингулярно возмущенных СЛП. Результаты этой главы имеют как самостоятельное значение, так могут рассматриваться и как приложение приведенных выше алгоритмов асимптотического решения задач оптимального управления СРН. Это связано с тем, что алгоритмы минимаксного оценивания основаны на решении некоторых задач оптимального управления*.

В §1 рассмотрена задача минимаксного оценивания функционалов от решений эллиптических краевых задач, т.е. на решениях задачи Дирихле

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta\, y(u) + a(x)\, y(u) = f_1(x), \\ y(u) \in H^1_0(\Omega), \end{cases} \tag{84}$$

определим оператор наблюдения

$$\varphi(x) = \int_\Omega q(x,\xi)\, y(\xi)\, d\xi + f_2(x) \tag{85}$$

и линейный функционал

$$l(y) = \int_\Omega g(x)\, y(x)\, dx,\ g(x) \in L_2(\Omega). \tag{86}$$

Считаем, что неизвестный вектор $f = (f_1, f_2)$ принадлежит эллипсоиду

$$S(f) = \{\ f:\ \int_\Omega (f_1^2(x) + f_2^2(x))dx \le \nu\ \}. \tag{87}$$

В классе оценок вида

$$\hat{\hat{l}}(y) = \int_\Omega u(x)\, \varphi(x)\, dx,\ u(x) \in L_2(\Omega) \tag{88}$$

требуется найти оценку $\hat{l}(y)$, удовлетворяющую условию

---

* Наконечный А.Г. Минимаксное оценивание функционалов от решений вариационных уравнений в гильбертовых пространствах.- -К.:КГУ,1985.-81с.

$$\inf_u \sup_s |l(y) - \hat{\hat{l}}(y)| = |l(y) - \hat{l}(y)| = \sigma. \tag{89}$$

Получены асимптотики минимаксных алгоритмов оценивания для двух случаев оператора наблюдения: (i)-$q(x,\xi) = m(\xi)\,\delta(\xi - x)$ ($\delta(.)$ - функция Дирака); (ii)- $q(x,\xi) = m(x)\,n(\xi)$. При этом коэффициенты как внешних, так и внутренних разложений находятся аналитически. Если есть возможность изменять оператор в уравнении наблюдений (85), то ошибку оценивания σ можн улучшить. С этой целью вместо условия (89) надо рассматривать условие

$$\inf_q \inf_u \sup_{s(\cdot)} |l(y) - \hat{\hat{l}}(y)| = |l(y) - \check{l}(y)| = \underline{\sigma}, \tag{90}$$

где q-элемент некоторого фиксированного множества U.

Эта задача эквивалентна задаче оптимального управления: найти $q \in U$, доставляющее

$$\inf - l(y) = \int_\Omega p(x)\,\varphi(x)\,dx, \tag{91}$$

где функции p, $\hat{y}$ удовлетворяют таким задачам

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta \hat{z} + a\hat{z} = g(x) - \int_\Omega q(\xi,x) \int_\Omega q(\xi,\eta) p(\eta)\, d\eta\, d\xi, \\ -\varepsilon^2 \Delta p + ap = \hat{z}; \quad p,\ \hat{z} \in H^1_0(\Omega); \end{cases} \tag{92}$$

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta \hat{p} + a\hat{p} = \int_\Omega q(\xi,x)\left(\varphi(\xi) - \int_\Omega q(\xi,\eta)\hat{y}(\eta)\, d\eta\right) d\xi, \\ -\varepsilon^2 \Delta \hat{y} + a\hat{y} = \hat{p}; \quad \hat{p},\ \hat{y} \in H^1_0(\Omega). \end{cases} \tag{93}$$

Пусть $q(x,\xi) = m(\xi)\,\delta(x - \xi)$, где

$$U = \{m(x) \in L_\infty(\Omega):\ \xi_1(x) \le m(x) \le \xi_2(x),\ \xi_i \in L_\infty(\Omega),\ \xi_1 \ge 0\} \cap \cap \{\, \|m(x)\|_{L_2(\Omega)} \le R\}. \tag{94}$$

Тогда задача (91)-(94) имеет решение $\forall\ \varepsilon > 0$ при $\|\xi_1\| \le R$, которое удовлетворяет условиям оптимальности

(i)-$\|m\| < R$:

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta \hat{z} + a\,\hat{z} = g(x) - m^2(x) p(x), \\ -\varepsilon^2 \Delta p + a\,p = \hat{z}, \\ -\varepsilon^2 \Delta \psi_2 + a\,\psi_2 = -g(x) - m^2(x)\psi_1(x), \\ -\varepsilon^2 \Delta \psi_1 + a\,\psi_1 = \psi_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int_\Omega \Phi_1 p\,(v - m^2(x))dx \ge 0 \ \forall v \in [\xi_1^2, \xi_2^2], & (95) \\ \hat{z}, p, \phi_i \in H_0^1(\Omega); \end{cases}$$

(II) $\|m\| = R$. выполняется система уравнений из (95), а неравенство принимает вид

$$\int_\Omega (\Phi_1 p + \lambda)(v - m^2(x))dx \ge 0 \ \forall v \in [\xi_1^2, \xi_2^2],\ \lambda = \text{const} \ne 0. \quad (96)$$

Из (95) следует, что $\phi_1 = -p$, $\phi_2 = -\hat{z}$. Тогда искомое $m = \xi_2(x)$, $x \in \Omega$ и асимптотические оценки строятся, исходя из соотношений (92)-(93). При

$$\|\xi_2\| > R \quad (97)$$

из (95) находим

$$\begin{cases} \Omega_1 = \{x: \lambda - p^2(x) > 0,\ m(x) = \xi_1(x)\}, \\ \Omega_2 = \{x: \lambda - p^2(x) < 0,\ m(x) = \xi_2(x)\}, & (98) \\ \Omega_3 = \Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2);\ \|m\| = R. \end{cases}$$

В Ω_3 $p(x) = \pm\lambda^{1/2}$, $\lambda > 0$. Тогда $\hat{z} = \pm a\lambda^{1/2}$, $m^2(x) = \pm\lambda^{-1/2} g(x) - a^2(x) + \varepsilon^2 \Delta a$. Нулевые составляющие внешних разложений для функций $\hat{z}, p, \phi_i$ и множителя λ определяют множества

$$\begin{cases} \Omega_{1+} = \{x: \lambda_0 - g^2(x)(a^2(x) + \xi_1^2(x))^{-2} > 0\}, \\ \Omega_{2-} = \{x: \lambda_0 - g^2(x)(a^2(x) + \xi_2^2(x))^{-2} < 0\}, & (99) \\ \Omega_{30} = \Omega \setminus (\Omega_{1+} \cup \Omega_{2-}) = \{x: \bar{m}^2(x) = \pm\lambda^{-1/2} g(x) - a^2(x)\}, \end{cases}$$

которые с точностью до некоторых окрестностей Γ_i аппроксимируют множества Ω_i. Считаем, что границы областей (99) удовлетворяю. предположению 2. Для определенности будем считать, что функции $g(x)(a^2(x) + \xi_i(x))^{-1}$ выпуклы (вогнуты) на Ω одновременно и симметричны относительно своих точек минимума (максимума). При этом решение вырожденной задачи задается формулами

$$\bar{p}_0(x) = \begin{cases} g(x)(a^2(x) + \xi_1^2(x))^{-1}, & x \in \Omega_{1+}, \\ \lambda_0^{1/2} \operatorname{sign} g(x),\ g(x)\text{-знакопостоянна } \forall x \in \Omega_{30}, \\ g(x)(a^2(x) + \xi_2^2(x))^{-1}, & x \in \Omega_{2-}; \end{cases}$$

$$\hat{\ddot{z}}_0 = a(x)\bar{p}_{0_2};$$

$$\bar{m}^2_0(x) = \begin{cases} \xi_1(x), & x \in \Omega_{1+}, \\ \lambda_0^{-1/2}|g(x)| - a^2(x) \in (\xi^2_1, \xi^2_2), & x \in \Omega_{20}, \\ \xi^2_2(x), & x \in \Omega_{2-}, \end{cases}$$

в которых неизвестные Ω_{1+}, Ω_{2-}, λ_0 определяются из задачи

$$\min_{\Omega_{1+},\Omega_{2-}} \Big(\int_{\Omega_{1+}} g^2(x)(a^2(x) + \xi^2_1(x))^{-1} dx + \int_{\Omega_{2-}} g^2(x)(a^2(x) + \xi^2_2(x))^{-1} dx +$$

$$+\Big(\int_{\Omega\setminus(\Omega_{1+}\cup\Omega_{2-})} |g(x)|dx\Big)^2 \Big(R^2 - \int_{\Omega_{1+}} \xi^2_1(x)dx + \int_{\Omega\setminus(\Omega_{1+}\cup\Omega_{2-})} a^2(x))dx - \int_{\Omega_{2-}} \xi^2_2(x)dx\Big)^{-1} \Big)$$

при ограничении

$$\lambda_0^{1/2} = \int_{\Omega\setminus(\Omega_{1+}\cup\Omega_{2-})} |g(x)|dx \Big(R^2 - \int_{\Omega_{1+}} \xi^2_1(x)dx + \int_{\Omega\setminus(\Omega_{1+}\cup\Omega_{2-})} a^2(x))dx - \int_{\Omega_{2-}} \xi^2_2(x)dx\Big)^{-1} > 0.$$

Построение высших асимптотик, а также их обоснование осуществляется аналогично §1.2, так как задача (91)-(94) представляет собой задачу оптимального управления с мультипликативным управлением. Для модельной задачи проведен численный эксперимент, позволяющий судить о качестве полученных асимптотик.

В §2 параграфа построены асимптотические минимаксные оценки линейных функционалов, определенных на решениях стационарных сингулярно возмущенных краевых задач переноса частиц (излучения) в плоском слое. Показана асимптотическая релаксационность оценок (см. §1.4), дано обоснование релаксационного асимптотического алгоритма минимаксного оценивания, который на каждом шаге состоит из трех задач, решаемых аналитически.

В последнем параграфе рассматривается задача минимаксного оценивания теплового поля в тонкой пластине. Получена вырожденная задача для минимаксных оценок, которая может быть решена методом Фурье. Приближения более высоких порядков получаются аналогично §3.1.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Капустян В.Е.,Михайлова Т.Ф. Субоптимальное управление для нестационарных параболических уравнений с двумя вязкими границами. -Докл. АН УССР. Сер.А.,1985,N11,с.57-60.

2. Капустян В.Е.,Михайлова Т.Ф. Сингулярные возмущения в задаче синтеза оптимального управления для высокоинтенсивных процессов

теплопроводности.-Адаптивные системы автоматического управления.-К.:Техника,1985, вып. 13,с.9-17.
3. Капустян В.Е.,Михайлова Т.Ф.,Носатенко А.Н. Управление и оценивание для нестационарного процесса теплопроводности с вязкими границами.-В кн.:Вторая научно-техническая конф. советских и польских молодых ученых, выпускников вузов СССР. Киев,1986,с.53-56.
4. Капустян В.Е. Асимптотическое оптимальное управление процессом переноса.-В кн.:Международный Сов.-Польский семинар "Математические методы оптимального управления и их приложения." Минск, 1989, с.167-169.
5. Капустян В.Е. Асимптотический анализ оптимального управления для процесса переноса частиц.-Автоматика,1989,N6,с.56-69.
6. Капустян В.Е. Оптимальное управление параболическими уравнениями с последействием.-В кн.:Лигун А.А., Капустян В.Е., Волков Ю.И. "Специальные вопросы теории приближений и оптимального управления распределенными системами".-К.:Выща школа,1990,с.75-153.
7. Капустян В.Е. Асимптотические методы в решении критической задачи оптимизации переноса частиц.-В кн.: III Всесоюзная школа. " Понтрягинские чтения. Оптимальное управление., геометрия и анализ."Тез. докл.,Кемерово,1990,с.144.
8. Капустян В.Е. Асимптотический анализ критической задачи оптимизации для процесса переноса.-В кн.:VII Всесоюзная конф. "Управление в механических системах". Тез. докл., Свердловск,1990, с.49.
9. Капустян В.Е. Минимаксное оценивание для сингулярно возмущенных краевых задач переноса в плоском слое.-Автоматика,1991,N2,с.31-36.
10. Капустян В.Е. Асимптотика ограниченных управлений в оптимальных эллиптических задачах.-Докл. АН Украины,1992,N2,с.70-74.
11. Капустян В.Е. Асимптотическое ограниченное управление в оптимальных эллиптических задачах.-Автоматика,1992,N3,с.59-66.
12. Капустян В.Е. Асимптотика ограниченных управлений в динамических распределенных системах.-В кн.:Труды международного семинара "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления". Тез. докл.,Москва,1992,с.47.
13. Капустян В.Е. Прямой метод решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления процессом переноса частиц.-Дифф. уравнения,1992,т.28,N7,с.1230-1242.
14. Капустян В.Е. Оптимальные бисингулярные эллиптические задачи.-

В кн.:Тез. докл. научно- техн. конф. СНГ "Контроль и управление в технических системах".Винница,1992,с.54-55.
15. Капустян В.Е. Асимптотическая стабилизация распределенных систем ограниченным управлением.-В кн.:Тез. докл. международной математической конф."Ляпуновские чтения". Харьков,1992,с.71-73.
16. Капустян В.Е. Асимптотика ограниченных управлений в оптимальных билинейных эллиптических задачах.-Докл. АН Украины,1992,N9, с.35-39.
17. Капустян В.Е. Оптимальные бисингулярные эллиптические задачи с ограниченным управлением.-Докл. АН Украины,1993,N6,с. 81-85.
18. Капустян В.Е. Оптимальное ограниченное управление тепловым полем в тонких телах.-Докл. АН Украины,1993,N11, с.84-88.
19. Капустян В.Е. Глобальные ограниченные управления в оптимальных сингулярно возмущенных эллиптических задачах.-Докл. АН Украины,1993, N12, с.79-83.
20. Капустян В.Е. Асимптотика управлений в оптимальных сингулярно возмущенных параболических задачах. Глобальные ограничения на управление.-Докл. АН (Россия),1993, т.333, N4,с.428-431.
21. Капустян В.Е. Асимптотический анализ ограниченных управлений в оптимальных эллиптических задачах. -Укр. мат. журнал,1993,N8,т.45, с.1072-1083.
22. Капустян В.Е. Асимптотика ограниченных управлений в оптимальных сингулярных параболических задачах. -Укр. мат. журнал, 1993,N10,т.45,с.1337-1347.
23. Егоров А.И., Капустян В.Е. Сингулярные возмущения в оптимальных системах с распределенными параметрами.-В кн.: Тез. докл. международного семинара "Негладкие и разрывные задачи управления и оптимизации." Челябинск, 1993,с. 53-54.
24. Kapustyan V.E. Asymptotics of constrainting optimal control systems with singular distributed parameters.-International workshop "Singular solutions and perturbations in control systems". 1993, Pereslavl-Zalessky,Russia,p.22.
25. Капустян В.Е. Асимптотика ограниченных управлений в оптимальных параболических системах. -В кн.: Тез. докл. межгосударственной научной конференции:"Динамические системы:устойчивость, управление, оптимизация." Минск,1993,с.49.

Вли

Капустян Владимир Емельянович

ОПТИМАЛЬНОЕ ОГРАНИЧЕННОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫМИ СИСТЕМАМИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

01.01.09 - математическая кибернетика

Подписано к печати 11.04.94. Формат 60х84/16. Бумага для множительных аппаратов. Печать офсетная. Усл.печ.л.2,1. Уч.-изд.л.2,0. Тираж.100 экз. Заказ 307. Бесплатно.

Участок оперативной полиграфии ДГТУЖТ: 320700, ГСП, Днепропетровск, 10, ул.Акад.В.А.Лазаряна, 2