АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

КАЛИНІН Алла Миколаївна

ЗАСТОСУВАННЯ АСИМПТОТИЧНИХ МЕТОДІВ НЕЛІНІЙНОЇ МЕХАНІКИ В ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯННЯХ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ З ВИПАДКОВИМИ ВІДХИЛЕННЯМИ АРГУМЕНТУ

01.01.02 - диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

КИЇВ-1994

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у відділі математичної фізики і теорії нелінійних коливань Інституту математики АН України.

Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник КОЛОМІЄЦЬ В.Г.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук ЯСИНСЬКИЙ В.К.,

кандидат фізико-математичних наук СТАНЖИЦЬКИЙ О.М.

Провідна установа: Львівський державний університет ім. І.Франка.

Захист відбудеться "17" травня 1994 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої ради Д 016.50.02 при Інституті математики АН України за адресою:

252601 Київ-4, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Інституту.

Автореферат розіслано "15" квітня 1994 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради ЛУЧКА А.Ю.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Більшість галузей сучасної науки має свої нелінійні проблеми, для яких не існує універсальних методів розв'язування. Виникнення теорії усереднення нелінійних систем, створення і розвиток асимптотичних методів нелінійної механіки М.М.Крилова, М.М.Боголюбова та Ю.О.Митропольського спричинили радикальні зміни в методах дослідження фізичних моделей.

В різноманітних галузях сучасної науки і техніки часто доводиться мати справу з коливними процесами в нелінійних системах, які містять ланки із загаюванням часу. Специфічний вплив загаювальних зв'язків на стійкість і коливання багатьох динамічних систем став предметом досліджень у теорії автоматичного регулювання, в автоматиці та телемеханіці, радіолокації, радіонавігації, теорії вібраційних машин тощо. Зростання за останні десятиріччя інтересу до таких систем викликане запитами найновішої техніки, а це зумовило значне розширення діапазону задач, які враховують загаювання. До них належать переважно лише задачі з детермінованими загаюваннями. Дослідженню процесів у лінійних та нелінійних системах, які описуються диференціальними рівняннями зі сталими і змінними відхиленнями аргументу, і розвитку теорії цих рівнянь присвячені праці Л.Е.Ельсгольца, С.Б.Норкіна, С.М.Шиманова, О.М.Зверкіна, Г.А.Каменського, М.М.Красовського та інших, а в дослідженнях Ю.О.Митропольського, В.П.Рубаника, В.І.Фодчука, В.Г.Коломійця, Д.Г.Кореніпського та ін. асимптотичні методи нелінійної механіки узагальнюються і успішно застосовуються до вивчення одночастотних та багаточастотних коливань у складних коливних системах.

Проте в реальних динамічних системах загаювання часто має випадковий характер і підлягає деяким статистичним закономірностям, і тому розв'язки диференціально-різницевих рівнянь залежатимуть від природи випадкового загаювання. У працях В.Г.Коломійця та Д.Г.Кореніваського, А.В.Солодова та Є.А.Солодової досліджувались системи із випадковими відхиленнями аргументу, рух яких описується звичайними диференціальними рівняннями. До таких рівнянь класичні методи незастосовні, тому для них потрібно розробляти спеціальну методику досліджень.

Незважаючи на значну кількість праць, присвячених розвитку теорії та застосуванням диференціально-різницевих рівнянь, поки що дуже мало вивчені рівняння нейтрального типу і надзвичайно мало праць присвячено дослідженню цього типу рівнянь при наявності випадкових відхилень. Деяким питанням теорії диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу з випадковими відхиленнями аргументу та застосуванню асимптотичних методів нелінійної механіки до дослідження коливних систем із післядією, що описуються квазілінійними рівняннями цього типу, і присвячена дана дисертаційна робота.

Мета роботи полягає у розповсюдженні асимптотичних методів нелінійної механіки на квазілінійні диференціально-різницеві рівняння нейтрального типу з випадковими відхиленнями аргументу, а також обгрунтуванні методу усереднення для цього типу диференціально-різницевих рівнянь із випадковими параметрами.

Метод дослідження полягає у послідовному застосуванні асимптотичних методів нелінійної механіки Крилова-Боголюбова-Митропольського і аналітичного методу рівнянь Фоккера-Планка-Колмогорова. В дисертації використовуються також деякі результати і методи теорії диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу, теорії дослідження коренів цілих трансцендентних функцій та квазіполіномів і теорії випадкових процесів.

Наукова новизна результатів дисертаційної роботи полягає в наступному:

1. Доведена теорема про неперервну залежність від параметра розв'язків диференціально-різницевого рівняння нейтрального типу для детермінованого випадку і на її основі доведена аналогічна теорема для цього типу рівнянь, що містять випадкові параметри.

2. Як наслідок з попередніх результатів отримані теореми, які дають обгрунтування методу усереднення для зазначеного типу рівнянь відповідно для детермінованого і стохастичного випадків.

3. Розвинуто асимптотичний метод Крилова-Боголюбова-Митропольського в поєднанні з аналітичним методом рівнянь Фоккера-Планка-Колмогорова для побудови наближених розв'язків квазілінійних систем, рух яких описується рівнянням нейтрального типу з випадковими відхиленнями аргументу, у випадку одночастотних і багаточастотних коливань.

4. Вивчена взаємодія декількох парціальних систем, між якими існують квазілінійні зв'язки з випадковими відхиленнями, коливання яких описуються рівнянями нейтрального типу другого порядку. Асимптотичні розв'язки побудовано в першому і першому покращеному наближеннях.

5. Досліджено ряд коливних систем, які описуються рівняннями нейтрального типу першого, другого і третього порядків зі сталими коефіцієнтами, для них знайдено умови існування режимів стаціонарних стійких коливань і стаціонарні щільності розподілу випадкових амплітуд.

Теоретична і практична цінність роботи. Робота має теоретичний характер, узагальнює та доповнює відомі раніше результати з теорії диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу. Отримані в роботі результати можуть мати практичне значення в зв'язку з дослідженням ряду прикладних задач, що виникають при вивченні коливних систем, які містять лінії затримки сигналів і перебувають під впливом випадкових збурень.

Апробація роботи. Основні результати дисертаційної роботи доповідались і обговорювались на Другому міжнародному колоквіумі з диференціальних рівнянь (Пловдів, Болгарія, 19-24 серпня 1991 року), на Міжнародній конференції "Нелінійні проблеми диференціальних рівнянь і математичної фізики - Другі Боголюбовські читання" (Київ, 28 вересня - 2 жовтня 1992 року) і на семінарах відділу математичної фізики та теорії нелінійних коливань Інституту математики АН України (керівник семінару - академік Ю.О.Митропольський).

Публікації. Результати дисертації опубліковані в п'яти друкованих працях [1-5].

Структура роботи. Дисертація складається із вступу, трьох розділів, висновку та списку літератури, який містить 90 найменувань. Загальний обсяг роботи становить 135 сторінок друкованого тексту.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтовується актуальність вибраного напрямку досліджень, наводиться стислий огляд робіт по темі дисертації і дається перелік основних отриманих результатів.

Перший розділ присвячений обгрунтуванню методу усереднення для квазілінійних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу в детермінованому випадку і випадку наявності в правій частині рівнянь випадкового параметра. Цей результат отримано як наслідок з теорем про неперервну залежність від параметра розв'язків досліджуваних рівнянь відповідно для детермінованого і стохастичного випадків.

В § I.I дається короткий огляд основних праць і результатів, які розвивають метод усереднення Боголюбова-Митропольського для дослідження систем з малим параметром. В § I.2 розглядається система рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t,x(t),x(t-\Delta(\lambda)),\dot{x}(t-\Delta(\lambda)),\lambda), \qquad (1)$$

де t - час ($0 \leqslant t < \infty$), $\Delta(\lambda)$ - функція, що характеризує загаювання, λ - числовий параметр, а функція $f(t,x,y,u,\lambda)$, що набуває значень у m-вимірному евклідовому просторі E^m, визначена, рівномірно обмежена і неперервна по сукупності змінних t,x,y,u в області

$$t \in [0,L], \ x \in D, \ y \in D, \ u \in D, \ \lambda \in \Lambda, \qquad (2)$$

де D - обмежена область в E^m, Λ - деяка множина значень параметра λ, що має граничну точку λ_0. Для системи (1) доведена ТЕОРЕМА I про неперервну залежність її розв'язку $x(t,\lambda)$ від параметра λ, тобто показано, що розв'язок $x(t,\lambda)$ збігається при $\lambda \to \lambda_0$ (в межах деякого околу $U(\lambda_0)$) до розв'язку $\xi(t,\lambda_0)$ системи

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = f(t,\xi(t),\xi(t-\Delta(\lambda_0)),\dot{\xi}(t-\Delta(\lambda_0)),\lambda_0)$$

на відрізку часу $[0,\bar{t}]$ ($\bar{t}$ - отримана в процесі доведення величина).

В § I.3 як наслідок із теореми I одержана ТЕОРЕМА 2, що дає обгрунтування застовності принципу усереднення Боголюбова-Митропольського до систем із післядією, які описуються диференціально-різницевими рівняннями нейтрального типу. В ТЕОРЕМІ 2 для системи рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = \varepsilon f(t,x(t),x(t-\Delta(\varepsilon)),\dot{x}(t-\Delta(\varepsilon))), \qquad (3)$$

де $\Delta(\varepsilon)$ - функція загаювання, ε - малий додатний параметр, який набуває значень на множині $[0,\varepsilon_0]$, показано, що розв'язок $x(t,\varepsilon)$ системи (3) і розв'язок $\xi(\varepsilon t) = \xi(t_1)$ усередненої системи рівнянь

$$\frac{d\xi(t_1)}{dt_1} = P_0(\xi(t_1),\xi(t_1),\dot{\xi}(t_1))$$

як завгодно мало відрізняються між собою на деякому скінченному відрізку часу $[0,\bar{t}/\varepsilon]$.

В § I.4 сформульована і доведена ТЕОРЕМА 3 про неперервну залежність від параметра розв'язків диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу з випадковим параметром. Основою для її доведення служить теорема I, що розглядає детермінований випадок. Наведемо формулювання теореми повністю.

ТЕОРЕМА 3. Розглядається система рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t,x(t),x(t-\Delta(\lambda)),\dot{x}(t-\Delta(\lambda)),\lambda,\omega), \qquad (4)$$

де ω - випадковий параметр, що є елементарною подією деякого ймовірнісного простору Ω. Нехай:

а) функція $f(t,x,y,u,\lambda,\omega)$, що набуває значень у m-вимірному евклідовому просторі E^m, визначена, рівномірно обмежена і неперервна по сукупності змінних t,x,y,u в області (2) і для майже всіх $\omega \in \Omega$;

б) функція $\Delta(\lambda)$ визначена, неперервна і невід'ємна на множині Λ;

в) функція $f(t,x,y,u,\lambda,\omega)$ задовольняє умову Ліпшіца по x,y,u, тобто для всіх точок $x_1,x_2,y_1,y_2,u_1,u_2 \in D$, усіх $t \in [0,L]$ і $\lambda \in \Lambda$ з імовірністю I по $\omega \in \Omega$ виконується нерівність

$$|f(t,x_1,y_1,u_1,\lambda,\omega) - f(t,x_2,y_2,u_2,\lambda,\omega)| \leqslant$$
$$\leqslant P|x_1-x_2| + R|y_1-y_2| + L_\gamma|u_1-u_2|,$$

де сталі P,R не залежать від t,λ і ω, а по аргументу-похідній функція f задовольняє умову Ліпшіца з умовною сталою L_γ (причому $L_\gamma=L_\gamma(\lambda) < 1$ для деякого $\gamma>0$ і неперервна при $\lambda=\lambda_0$);

г) функція $f(t,x,y,u,\lambda,\omega)$ при кожних фіксованих $x \in D$, $y \in D$, $u \in D$, $\lambda \in \Lambda$ є вимірним випадковим процесом;

д) при всіх $\lambda \in \Lambda$ і при фіксованих $x \in D$, $y \in D$, $u \in D$ для функції

$f[t,x,y,u,\lambda,\omega]$ виконується посилений закон великих чисел у формі: з імовірністю I

$$\lim_{\lambda\to\lambda_o} M\left\{\left|\int_0^t f[\theta,x,y,u,\lambda,\omega]d\theta - \int_0^t f_o[\theta,x,y,u,\lambda_o]d\theta\right|\right\} = 0,$$

$$\text{де}\quad f_o[t,x,y,u,\lambda] = Mf[t,x,y,u,\lambda,\omega],$$

при фіксованих $x,y,u \in D$, всіх $t \in [0,L]$ і при $\lambda \in \Lambda$ (M - математичне сподівання, або ймовірнісне середнє);

е) рівняння (4) із початковою умовою

$$x(t,\lambda,\omega)\Big|_{t\in[-\bar{\Delta},0]} = \varphi_o(t) \qquad (5)$$

та умовою узгодження ("склейки")

$$\dot{\varphi}_o(0) = f[0,\varphi_o(0),\varphi_o(-\Delta(\lambda)),\dot{\varphi}_o(-\Delta(\lambda)),\lambda,\omega]. \qquad (5')$$

що виконані для всіх $\lambda \in \Lambda$ з імовірністю, при $\lambda=\lambda_o$ набуває вигляду

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = f_o[t,\xi(t),\xi(t-\Delta(\lambda_o)),\dot{\xi}(t-\Delta(\lambda_o)),\lambda_o] \qquad (6)$$

і має розв'язок $\xi(t,\lambda_o)$, визначений і неперервно диференційовний на всьому проміжку $[-\Delta,L]$, що лежить в D разом із деяким своїм ρ-околом, а $\dot{\xi}(t,\lambda_o)$ лежить в D разом із деяким ρ'-околом, причому виконується початкова умова

$$\xi(t,\lambda_o)\Big|_{t\in[-\bar{\Delta},0]} = x(t,\lambda_o,\omega)\Big|_{t\in[-\bar{\Delta},0]}$$

для майже всіх $\omega \in \Omega$. (Тут $\varphi_o(t)$ - неперервно диференційовна на $[-\bar{\Delta},0]$ початкова функція, що лежить в D; $\bar{\Delta} = \sup_{\lambda\in\Lambda} \Delta(\lambda)$; якщо останній не існує, то покладають $\bar{\Delta} = \infty$.)

Тоді будь-якому $\eta>0$ відповідає такий окіл $U(\lambda_o)$ точки λ_o і таке $\bar{t} \in [0,L]$, що при всіх $\lambda \in U(\lambda_o)$ розв'язок $x(t,\lambda,\omega)$ рівняння

(4) із початковими умовами (5) та (5') визначений на всьому відрізку $t \in [0,\bar{t}]$ і задовольняє на ньому нерівність

$$\sup_{t\in[0,\bar{t}]} M\{|x(t,\lambda,\omega) - \xi(t,\lambda_0)|\} < \eta,$$

тобто розв'язок $x(t,\lambda,\omega)$ рівняння (4) збігається в середньому при $\lambda\to\lambda_0$ ($\lambda \in U(\lambda_0)$) до розв'язку $\xi(t,\lambda_0)$ рівняння (6)

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \sup_{t\in[0,\bar{t}]} M\{|x(t,\lambda,\omega) - \xi(t,\lambda_0)|\} = 0.$$

Як наслідок теореми 3 в § I.5 отримана ТЕОРЕМА 4, що дає обгрунтування принципу усереднення для квазілінійних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу з випадковим параметром виду

$$\frac{dx(t)}{dt} = \varepsilon f[t,x(t),x(t-\Delta(\varepsilon)),\dot{x}(t-\Delta(\varepsilon)),\omega].$$

В другому розділі вивчаються коливання квазілінійних систем із випадковим відхиленням, які описуються квазілінійними диференціально-різницевими рівняннями нейтрального типу, за допомогою асимптотичного методу Крилова-Боголюбова-Митропольського у поєднанні з методом рівнянь Фоккера-Планка-Колмогорова для щільності розподілу ймовірностей.

У § 2.I дається загальна характеристика нелінійних стохастичних систем, коливний рух яких в загальному випадку може бути описаний диференціально-різницевим рівнянням

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + BX(t-\Delta) + C\dot{X}(t-\Delta) + $$
$$+ \varepsilon F[X(t),X(t-\Delta),\dot{X}(t-\Delta),\varepsilon],$$

де $\Delta=\Delta(t)$ - загаювання, що є випадковою функцією часу; X - вектор фазових координат, який характеризує траєкторію руху динамічної системи у фазовому евклідовому просторі E^n; ε - малий додатний параметр; A,B та C - квадратні матриці розміру $n\times n$ зі сталими дійсними елементами a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} відповідно ($i,j = 1,2,\ldots,n$); F - n-вимірна вектор-функція. Досліджуються умови існування лише таких розв'язків (випадкових процесів) $X(t)$, які є періодичними функціями часу і можуть бути представлені у вигляді $X(t) = a\cos(\omega t + \theta)$, де ω - частота коливань, а амплітуди та фази a,θ є випадковими функціями, які визначають коливний процес (параметрами коливного процесу). Теоретико-ймовірнісна структура процесів $X(t)$ повністю визначається сумісним розподілом випадкових амплітуд та фаз a,θ.

В § 2.2 досліджується одночастотний режим коливань автономної квазілінійної системи, на рух якої впливає декілька статистично незалежних випадкових відхилень,

$$\frac{dX(t)}{dt} = \sum_{l=0}^{r} A_l X(t-\Delta_l(t)) + \sum_{l=0}^{r} B_l \dot{X}(t-\Delta_l(t)) + \varepsilon F[\,X(t-\Delta_l(t)),\ \dot{X}(t-\Delta_l(t)),\ \varepsilon], \tag{7}$$

де $X(t)$ - n-вимірний вектор фазових координат; A_l, B_l - сталі квадратні матриці коефіцієнтів з дійсними елементами a_{skl}, b_{skl} відповідно ($s,k = 1,\dots,n$); ε - малий додатний параметр; F - n-вимірний вектор, компоненти якого є аналітичними по всіх аргументах функціями.

Коливний рух, що здійснює система (7), у значній мірі залежить від природи малих випадкових флуктуацій відхилень

$$\Delta_l(t) = \Delta_{lo} + \mu_l(\varepsilon)\xi_l(t,\varepsilon) \tag{8}$$

$$(l = 0,1,\dots,r).$$

Тут $\Delta_{lo} = \langle\Delta_l(t)\rangle = \text{const} > 0$, причому $0 = \Delta_{oo} < \Delta_{1o} < \dots < \Delta_{ro}$, а Δ_{ro} не надто велике в порівнянні з періодом породної системи; $\mu_l(\varepsilon)$ - в загальному випадку нелінійні функції такі, що $\mu_l(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$ і $\mu_l(0) = 0$ ($l = 0,1,\dots,r$); $\xi_l(t,\varepsilon)$ - незалежні стаціонарні процеси, які при $\varepsilon\to 0$ асимптотично перетворюються в "білі шуми" $\xi_l(t)$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \langle\xi_l(t,\varepsilon)\rangle = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \langle\xi_l(t,\varepsilon)\xi_l(t+\tau,\varepsilon)\rangle = \delta(\tau).$$

Періодичні розв'язки рівняння (8) шукаються за допомогою одночастотного асимптотичного методу Крилова-Боголюбова-Митропольського у формі першого наближення

$$X(t) = a\left[Ce^{i\varphi} + \bar{C}e^{-i\varphi}\right] = U_o(a,\varphi) \tag{9}$$

$$(\varphi = \omega t + \theta),$$

де амплітуда a та фаза θ є випадковими функціями часу і визначаються системою стохастичних диференціальних рівнянь в першому наближенні

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon P(a,\Delta,\varepsilon),$$
$$\frac{d\theta}{dt} = \varepsilon Q(a,\Delta,\varepsilon), \tag{10}$$

де $\Delta = (\Delta_1(t),\dots,\Delta_r(t))$.

Розв'язками системи (10) є траєкторії випадкового процесу, які при $\varepsilon\to 0$ переходять у траєкторії двовимірного марковського процесу дифузійного типу $(a(t),\theta(t))$. Оскільки одночастотні коливання квазілінійних систем із випадковими загаюваннями часу виду (8) в першому наближенні є дифузійним двовимірним процесом Маркова, то для подальшого дослідження стохастичної системи (10) застосовано апарат теорії марковських процесів – метод рівнянь Фоккера-Планка-Колмогорова для щільності сумісного розподілу ймовірностей амплітуди та фази коливань $W(a,\theta,t\,|_{a_o,\theta_o,t_o})$, яка повинна задовольняти параболічне рівняння Фоккера-Планка, або пряме рівняння Колмогорова,

$$\frac{dW}{dt} = -\varepsilon\left[\frac{\partial}{\partial a}(N_1W) + \frac{\partial}{\partial\theta}(N_2W)\right] + \frac{1}{2}\varepsilon\left\{\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left[W\sum_{i=0}^{r}N_{1i}^2\mu_i^{*2}(\varepsilon)\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2}{\partial a\partial\theta}\left[W\sum_{i=0}^{r}N_{1i}N_{2i}\mu_i^{*2}(\varepsilon)\right] + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left[W\sum_{i=0}^{r}N_{2i}^2\mu_i^{*2}(\varepsilon)\right]\right\}, \tag{11}$$

яке доповнюють додатковими умовами

$$W(a,\theta,t\Big|_{a_0,\theta_0,t_0}) = \delta(a-a_0)\delta(\theta-\theta_0), \quad \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{2\pi} W(a,\theta,t)d\theta da = 1,$$

$$W(a,\theta+2\pi,t) = W(a,\theta,t), \quad W(a,\theta,t) \geqslant 0, \quad W(\infty,\theta,t) = 0.$$

В загальному випадку аналітичне розв'язання рівняння (II) є досить важким завданням. У § 2.2 знайдено в явному вигляді коефіцієнти зносу і дифузії амплітуди та фази, а також вираз для стаціонарної щільності розподілу амплітуди $W(a)$.

В § 2.3 вивчено випадок багаточастотних випадкових коливань автономної квазілінійної стохастичної системи (7) з відхиленнями аргументу (8). Досліджено поведінку і розташування коренів характеристичного рівняння, що відповідає породній системі ($\varepsilon=0$), на комплексній площині. Для випадкових амплітуд $(a_1,a_2,\ldots,a_N)$ і випадкових фаз $(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_N)$ багаточастотного коливного процесу побудована система стохастичних диференціальних рівнянь у стандартній формі. Коефіцієнти зносу і дифузії знайдено в явному вигляді. Розв'язками одержаної стохастичної системи є траєкторії деякого $2N$-вимірного випадкового процесу, які при $\varepsilon\to 0$ перетворюються у траєкторії $2N$-вимірного процесу Маркова дифузійного типу. Побудоване N-вимірне рівняння Фоккера-Планка-Колмогорова для щільності сумісного розподілу ймовірностей амплітуд та фаз $2N$-вимірного випадкового коливного процесу.

§ 2.4 присвячений побудові асимптотичних розв'язків у випадку взаємодії коливних систем з випадковими відхиленнями у лінійних силах зв'язку. Розглянуто взаємодію декількох простих парціальних коливних систем у випадку значних зв'язків між ними з випадковими відхиленнями часу. В припущенні, що сили зв'язку є квазілінійними, тобто їх основні складові лінійні, до вивчення такої складної системи застовано асимптотичний метод Крилова-Боголюбова-Митропольського в поєднанні з методом рівнянь Фоккера-Планка-Колмогорова. Процеси взаємодії коливних систем описуються в загальному випадку системою диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу II порядку

$$\ddot{x}_s(t) + \omega_s^2(\tau)x_s(t) +$$

$$+ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^{n} \left\{ A_{sk}(\tau)\ddot{x}_k(t-\Delta_{sk}(t)) + B_{sk}(\tau)x_k(t-\Delta_{sk}(t)) \right\} =$$

$$= \varepsilon f\left[\tau, x_s(t), \dot{x}_s(t), \ddot{x}_s(t), x_k(t-\Delta_{sk}(t)), \dot{x}_k(t-\Delta_{sk}(t)), \ddot{x}_k(t-\Delta_{sk}(t)), \varepsilon\right]$$

$$(s = 1,2,\dots,n),$$

де ε - малий додатний параметр; $\tau = \varepsilon t$ - "повільний час" (повільно змінний з часом параметр); $\omega_s(\tau)$ - додатні достатньо гладкі функції τ на деякому проміжку $\tau \in [0,T]$; $A_{sk}(\tau)$, $B_{sk}(\tau)$ - дійсні функції довільного знаку, визначені і достатньо гладкі на проміжку $\tau \in [0,T]$; $f_s\left[\tau, x_s, \dot{x}_s, \ddot{x}_s, x_{\Delta sk}, \dot{x}_{\Delta sk}, \ddot{x}_{\Delta sk}, \varepsilon\right]$ - нелінійні функції, достатньо гладкі по кожному зі своїх аргументів на проміжках $\tau \in [0,T]$, $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$ і в достатньо великій області зміни x_s, $\dot{x}_s$, $\ddot{x}_s$, $x_{\Delta sk}$, $\dot{x}_{\Delta sk}$, $\ddot{x}_{\Delta sk}$.

В § 2.4 для випадкових амплітуд і випадкових фаз зв'язаних коливань у складній динамічній системі побудовані стандартні стохастичні диференціальні рівняння, знайдено вирази для коефіцієнтів зносу і дифузії і побудовано відповідне рівняння Фоккера-Планка-Колмогорова для щільності сумісного розподілу ймовірностей амплітуд та фаз зв'язаних випадкових коливань.

У § 2.5 досліджується вплив випадкового загаювального зв'язку на процеси взаємодії двох коливних систем - простого автогенератора, що описується рівнянням типу Ван-дер-Поля, і лінійного резонансного контура (резонатора), між якими існує загаювальний індуктивний зв'язок. Розглядувана система може бути описана двома диференціально-різницевими рівняннями нейтрального типу II порядку

$$\ddot{x}_1(t) + \omega_1^2 x_1(t) + A_{12}\ddot{x}_2(t-\Delta(t)) = \varepsilon\left[1 - \alpha x_1^2(t)\right]\dot{x}_1(t),$$

$$\ddot{x}_2(t) + 2\beta\dot{x}_2(t) + \omega_2^2 x_2(t) + A_{21}\ddot{x}_1(t-\Delta(t)) = 0,$$

де ω_1, ω_2, β, ε, α – дійсні додатні сталі, A_{12} та A_{21} – дійсні сталі будь-якого знаку.

Результати двох останніх параграфів повністю узгоджуються з результатами, одержаними В.П.Рубаником для детермінованого випадку.

В третьому розділі побудовано асимптотичні розв'язки в першому і першому покращеному наближеннях для квазілінійних рівнянь нейтрального типу зі сталими коефіцієнтами і випадковими відхиленнями часу першого, другого та третього порядків (відповідно §§ 3.1, 3.2, 3.3) за допомогою асимптотичного методу Крилова-Боголюбова-Митропольського з наступним застосуванням методу рівнянь Фоккера-Планка-Колмогорова для щільності розподілу ймовірностей. Знайдено умови існування в цих системах стійких періодичних коливних режимів (частоту ω коливань), а також вирази для амплітуди стаціонарних незагасаючих коливань.

Основні положення дисертації опубліковані в таких роботах:

1. Калыник А.Н. Применение асимптотических методов в дифференциально-разностных уравнениях со случайным отклонением аргумента // Нелинейные проблемы теории дифференциальных уравнений.-Киев: Ин-т математики АН УССР, 1991.-С.15-22.

2. Калыник А.Н. Исследование дифференциально-разностных уравнений второго порядка со случайным отклонением аргумента // Асимптотические решения нелинейных уравнений с малым параметром.-Киев: Ин-т математики АН УССР, 1991.-С.43-51.

3. Калынюк А.Н., Коломиец В.Г. Применение асимптотических методов в дифференциально-разностных уравнениях со случайными отклонениями аргумента // Abstracts of Invited Lectures and Short Delivered at the Second International Colloquium on Differential Equations, Plovdiv, Bulgaria, 19-24 August 1991.-Пловдив, 1991. -С.118.

4. Калынюк А.Н., Коломиец В.Г. Построение асимптотических решений дифференциально-разностных уравнений со случайными отклонениями аргумента // Конференция "Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики - Вторые Боголюбовские чтения", Душанбе, 14-18 сент. 1992 г.: Тез. докл.-Киев, 1992.-С.67.

5. Калинюк А.М., Коломієць В.Г. Про неперервну залежність розв'язків диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу від параметра // Конструктивні методи дослідження диференціальних рівнянь.-Київ: Ін-т математики АН України, 1993.-С.149-157.

Підп. до друку 12.04.94. Формат 60х84/16. Папір друк. Офс.друк
Ум.друк.арк. 0,93. Ум.фарбо-відб. 0,93. Обл.-вид. арк. 0,7.
Тираж 100 пр. Зам. 106 Безкоштовно.
8

Підготовано і віддруковано в Інституті математики АН України
252601 Київ-4, ГСП, вул. Терещенківська, 3