Міністерство освіти України
Київський університет ім. Т.Г. Шевченка

На правах рукопису

Фавваз Зейдан Джассім

Чисельно-аналітичні методи дослідження стійкості і оптимізації рішень лінійних диференціальних і різницевих рівнянь з випадковими коефіцієнтами

01.01.02 - диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття вченого ступеня
кандидата фізико - математичних наук

Київ - 1994

Дисертація является рукописом.

. Робота виконана
на кафедрі вищої математики
Київського Державного Економічного
Університету.

Науковий керівник - доктор фізико-математичних наук, професор
Валєєв К.Г.

Офіційні опоненти - доктор фізико-математичних наук, професор
Наконечний О.Г.,
кандидат фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Коломієць В.Г.

Провідна організація - Одеський державний університет

Захист дисертації відбудеться "29" березня 1994р. о 14 год., на засіданні спеціалізованої вченої ради К.010114 по присудженню вченого ступеня кандидата фізико-математичних наук в Київському Університеті імені Тараса Шевченко за адресою: 252127, Київ, проспект академіка Глушкова 6, механіко-математичних факультет, ауд. 42

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці Київського Університету імені Тарраса Шевченко, Київ, Володимирська 58.

Автореферат розісланий "28" лютого 1994р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Курченко О.О.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Прикладні завдання сучасної математики, стабілізація систем керування, побудова оптимального керування для ракет призводить до необхідності вивчення систем диференціальних і різницевих рівнянь, які залежать від випадкових процесів. Ця робота присвячена питанням дослідження стійкості та оптимізації розв"язків лінійних диференціальних та різницевих рівнянь, які залежать від марковського та напівмарковського випадкового скінченнозначного процесу.

Напівмарковські процеси вивчали П.Леві, В.С.Королюк, І.М. Коваленко, В.В.Анісімов, А.Ф.Турбін, Д.С.Сильвестров, В.І.Тихонов та інші.

У роботі розглядались динамічні системи, які залежать від скінченнозначного випадкового процесу. Вони одержали назву систем з випадковими станами і вивчались у роботах В.М.Артем"єва, І.Я.Каца, М.П.Красовського, Г.Н.Мильштейна, Ю.М.Репіна та інших.

Для дослідження стійкості застосовувався метод функцій Ляпунова, який розвивали Е.А.Барбашин, К.Г.Валеєв, В.І.Зубов, В.М.Матросов, І.Г.Малкін, В.В.Рум"янцев, В.Хан, М.Г.Четаєв та інші. Для дослідження стійкості стохастичних систем метод функцій Ляпунова застосовували Д.Г.Кореневський, Дж.Г.Кушнер, Р.З.Хасмінський, Д.Я.Хусаінов та інші. У нашій роботі знайдено необхідні і достатні умови існування стохастичних функцій Ляпунова для лінійних диференціальних і різницевих рівнянь з напівмарковськими коефіцієнтами і стрибками розв"язків, співпадаючими із стрибками випадкового процесу. Зазначимо, що системи зі стрибками вивчали М.А.Девіс, І.Я.Кац, М.О.Перестюк, А.М.Самойленко, Р.Дж.Еліот та інші.

При дослідженні систем керування найбільш важливими є питання стабілізації та оптимізації розв"язків. Ці питання вивчали у своїх роботах Ю.М.Андреєв, В.М.Артем"єв, М.Аокі, В.Г.Болтянський, А.Брайсон, В.Б.Ларін, В.М.Вонем, Р.Є.Калман, Н.Н.Мойсеев, Ю.П.Петров, К.Ю.Острем, С.Л.Чанг, Дж.Дж.Фіорентін та інші.

Із зазначеного випливає актуальність досліджуваної теми.

Мета роботи - дослідження стійкості і оптимізація розв"язків системи лінійних диференціальних і різницевих рівнянь з напівмарковськими коефіцієнтами і стрибками розв"язків.

Методи дослідження. У роботі застосовуються методи теорії функцій Ляпунова, теорії напівмарковських процесів, теорії оптимального керування, чисельні методи.

Наукова новизна. У роботі виведені моментні рівняння для моментів першого та другого порядку для випадкових розв"язків системи лінійних і різницевих рівнянь з напівмарковськими коефіцієнтами і випадковими стрибками розв"язків, знайдені необхідні і достатні умови існування функцій Ляпунова, необхідні і достатні умови стійкості розв"язків у середньому квадратичному, необхідні умови оптимальності розв"язків систем керування з напівмарковськими коефіцієнтами.

Практична цінність роботи. Одержані результати мають теоретичне значення і можуть застосовуватися при розв"язанні практичних задач дослідження систем керування при наявності випадкових збурень.

Апробація роботи. Матеріали дисертації обговорювалися на наукових семінарах у Київському державному економічному університеті, у Київському політехнічному інституті, на конференції "Моделювання і дослідження стійкості процесів" у м.Києві в 1993 р.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в роботах /I-6/.

Структура дисертації. Дисертація складається із вступу, трьох розділів, які містять I3 параграфів, висновків, списку літератури, додатків, які містять результати розв"язання прикладів, представлених таблицями та графіками, а також програми.

ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У вступі міститься короткий огляд літератури, подається обгрунтування актуальності теми, зроблений короткий огляд змісту дисертації.

У першому розділі досліджується стійкість розв"язків системи диференціальних рівнянь із напівмарковськими коефіцієнтами.

У §I.I. викладаються відомі результати з теорії напівмарковських скінченнозначних процесів. Нехай $\xi(t)$ - випадковий напівмарковський процес, що набуває значення $\theta_1, \ldots, \theta_n$ з імовірностями $P_k(t) = P\{\xi(t) = \theta_k\}$ $(k=1,\ldots,n)$. Якщо відомі інтенсивності переходу $q_{sk}(t)$ $(s,k=1,\ldots,n)$ із стану θ_k в стан θ_s, то при $t \geq 0$

$$P(t_j + t) = \Phi(t) P(t_j) \quad (j=0,1,2,\ldots), \tag{I}$$

де t_j $(j=0,1,2,\ldots)$ - моменти стрибків процесу $\xi(t)$, $P^*(t) = (p_1(t) \ldots p_n(t))$, $\Phi(t)$ - матриця перехідних імовірностей, яка задовольняє інтегральне рівняння

$$\Phi(t) = \Psi(t) + \int_0^t \Phi(t-\tau) Q(\tau) d\tau, \tag{2}$$

де позначено

$$\Psi(t) = \|\delta_{ks} \psi_s(t)\|_1^n, \quad \psi_s(t) = \int_t^\infty q_s(t) dt, \quad \psi_s(t) = \sum_{k=1}^n q_{ks}(t);$$

$$Q(t) = \|q_{ks}(t)\|_1^n, \quad q_{ks}(t) \geq 0, \quad \int_0^\infty \sum_{k=1}^n q_{ks}(t) dt = 1. \tag{3}$$

Вводиться поняття напівмарківської функції, яка залежить від напівмарківського процесу $\xi(t)$. Нехай задані n детермінованих функцій $U_k(t)$ $(k=1,\dots n;\ t\geq 0)$. Якщо t_j $(j=0,1,2\dots)$ моменти стрибків $\xi(t)$ і при $t_j\leq t<t_{j+1}$ виконана рівність $\xi(t)=\theta_k$, то вважаємо

$$U(t,\xi(t))=U_k(t-t_j). \tag{4}$$

У §I.2. виведені моментні рівняння для розв"язання системи лінійних диференціальних рівнянь із напівмарковськими коефіцієнтами

$$\frac{dX(t)}{dt}=A(t,\xi(t))X(t) \tag{5}$$

Для задання системи (5) вводимо n детермінованих систем лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dX_k(t)}{dt}=A_k(t)X_k(t);\quad X_k(t)=N_k(t)X_k(0) \qquad (k=1,\dots,n) \tag{6}$$

Припускається, що при $t_j\leq t<t_{j+1}$ при $\xi(t)=\theta_k$ система рівнянь (5) набуває вигляду

$$\frac{dX(t)}{dt}=A_k(t-t_j)X(t) \tag{7}$$

Додатково припускаємо, що при $\xi(t_j-0)=\theta_k,\ \xi(t_j+0)=\theta_s$ розв"язок $X(t)$ система (5) має стрибок вигляду

$$X(t_j+0)=C_{sk}X(t_j-0),\quad \det C_{sk}\neq 0 \tag{8}$$

Нехай випадковий процес $(X(t), \zeta(t))$ має щільність імовірностей

$$f(t,X,\zeta)=\sum_{K=1}^{n} f_K(t,X)\,\delta(\zeta-\theta_K) \qquad (9)$$

Вводиться стохастичний оператор $L(t)$ такий, що

$$F(t_j+t,X)=L(t)F(t_j,X);\ (t\geq 0);\ F(t,X)\equiv (f_1(t,X)\ldots f_n(t,X))^*$$

<u>Теорема I.I.</u> Нехай коефіцієнти системи (5) залежать від напівмарківського процесу $\zeta(t)$, визначеного інтенсивностями $q_{sk}(t)$ $(s,k=1,\ldots,n)$. Нехай між стрибками процесу $\zeta(t)$ при $t_j\leq t<t_{j+1}$ система (5) співпадає з системою (7). Нехай розв"язки системи (5) мають стрибки (8). Тоді окремі щільності $f_K(t,X)$ $(K=1,\ldots,n)$ випадкового процесу $(X(t),\zeta(t))$ з щільністю (9) визначаються операторним рівнянням

$$F(t,X)=L(t)F(0,X), \qquad (10)$$

де оператор $L(t)$ задовольняє рівняння

$$L(t)=\Psi(t)R(t)+\int_0^t L(\tau)S(t-\tau)R(t-\tau)d\tau, \qquad (11)$$

де зазначено

$$R(t)=\|\delta_{sk}R_k(t)\|_1^n,\quad S(t)=\|q_{ks}(t)S_{ks}\|_1^n, \qquad (12)$$

і оператори $R_K(t)$, $S_{KS}(t)$ $(K,S=1,\ldots,n)$ визначаються рівняннями

2-4-300

$$R_k(t)f(X) \equiv f(N_k^{-1}t(X)\det N_k(t) \quad (k=1,\dots,n);$$
$$S_{sk}f(X) \equiv f(C_{sk}^{-1}X)|\det C_{sk}^{-1}| \quad (s,k=1,\dots,n). \tag{I3}$$

<u>Теорема I.2.</u> Розв"язок рівняння (II) можна представити у вигляді

$$L(t) = \Psi(t)R(t) = \int_0^t \Psi(\tau)R(\tau)U(t-\tau)\,d\tau, \tag{I4}$$

де оператор $U(t)$ задовольняє інтегральному рівнянню

$$U(t) = S(t)R(t) + \int_0^t S(t-\tau)R(t-\tau)U(\tau)\,d\tau. \tag{I5}$$

Вводиться вектор моментів першого порядку

$$M(t) = \langle X(t)\rangle = \sum_{k=1}^n M_k(t); \quad M_k(t) \equiv \int_{E_m} Xf_k(t,X)\,dX \tag{I6}$$

та з рівнянь (I4), (I5) знаходимо систему моментних рівнянь

$$M_k(t) = \psi_k(t)N_k(t)M_k(0) + \int_0^t \psi_k(t-\tau)N_k(t-\tau)V_k(\tau)\,d\tau;$$
$$V_k(t) = \sum_{s=1}^n q_{ks}(t)C_{ks}N_s(t)M_s(0) +$$
$$+ \int_0^t \sum_{s=1}^n q_{ks}(t-\tau)C_{ks}N_s(t-\tau)V_s(\tau)\,d\tau$$
$$(k=1,\dots,n). \tag{I7}$$

Аналогічно вводиться матриця других моментів

$$D(t) = \langle X(t)X^*(t)\rangle = \sum_{k=1}^n D_k(t), \quad D_k(t) \equiv \int_{E_m} XX^*f_k(t,X)\,dX \tag{I8}$$

Із рівнянь (I4), (I5) знаходимо систему рівнянь

$$D_k(t)=\psi_k(t)N_k(t)D_k(0)N_k^*(t)+\int_0^t\psi_k(t-\tau)N_k(t-\tau)W_k(\tau)N_k^*(t-\tau)\,d\tau;$$
$$W_k(t)=\sum_{s=1}^{n}q_{ks}(t)C_{ks}N_s(t)D_s(0)N_s^*(t)C_{ks}^*+$$
$$+\int_0^t\sum_{s=1}^{n}q_{ks}(t-\tau)C_{ks}N_s(t-\tau)W_s(\tau)N_s^*(t-\tau)C_{ks}^*\,d\tau\ (k=1,\dots,n)\quad (19)$$

В §I.3. виведені моментні рівняння для системи лінійних диференціальних рівнянь із випадковими коефіцієнтами і стрибками розв"язків, які залежать від марковського процесу. Із рівнянь (I7), (I9) виведені в окремому випадку моментні рівняння, оскільки марковський процес є окремим випадком напівмарковського.

В §I.4. досліджується стійкість розв"язків системи (5) у середньому квадратичному. Введено визначення в середньому L_2 стійкості розв"язків системи (5), якщо

$$I=\int_0^\infty D(t)\,dt<\infty$$

<u>Теорема I.4.</u> Нехай виконані умови теореми I.I. Для того, щоб нульовий розв"язок системи (5) був у середньому L_2 стійким необхідно, щоб збігалися інтеграли

$$J_k=\int_0^\infty\psi_k(t)\|N_k(t)\|^2dt<\infty\quad (k=1,\dots,n)\qquad (20)$$

<u>Теорема I.5.</u> Якщо система рівнянь (5) має обмежені при $t\geq 0$ коефіцієнти і напівмарковський процес $\xi(t)$ задовольняє умовам

$$\int_0^h\psi_k(t)\,dt\geq l>0\qquad (h>0)\qquad (2I)$$

то з в середньому L_2 стійкості розв"язків системи (5) витікає асимптотична стійкість розв"язків системи (5) в середньому квадратичному.

<u>Теорема I.6.</u> Нехай для системи (5) виконані необхідні умови стійкості (20). Тоді для того, щоб нульовий розв"язок системи (5) був у середньому L_2 стійким

I. Необхідно і достатньо, щоб система рівнянь

$$S_k = D_k(0) + \sum_{s=1}^{n} C_{ks} \int_0^\infty q_{ks}(t) N_s(t) S_s \overset{*}{N_s}(t)\,dt\, \overset{*}{C_{ks}} \quad (k=1,\dots,n) \tag{22}$$

при $D_k(0) > 0$ $(k=1,\dots,n)$ мала розв"язок $S_k > 0$ $(k=1,\dots,n)$

2. Необхідно і достатньо, щоб збігався метод послідовних наближень при розв"язанні системи рівнянь (22) при $D_k(0) > 0$ $(k=1,\dots,n)$

$$S_k^{(j+1)} = D_k(0) + \sum_{s=1}^{n} C_{ks} \int_0^\infty q_{ks}(t) N_s(t) S_s^{(j)} \overset{*}{N_s}(t)\,dt\, \overset{*}{C_{ks}};$$

$$S_k^{(0)} = 0; \quad S_k = \lim_{j\to\infty} S_k^{(j)} \quad (k=1,\dots,n). \tag{23}$$

3. Достатньо, щоб при деяких симетричних матрицях $S_k > 0$ $(k=1,\dots,n)$ виконувалися нерівності

$$S_k - \sum_{s=1}^{n} C_{ks} \int_0^\infty q_{ks}(t) N_s(t) S_s \overset{*}{N_s}(t)\,dt\, \overset{*}{C_{ks}} > 0, \quad (k=1,\dots,n) \tag{24}$$

4. Необхідно і достатньо, щоб система рівнянь (22) мала розв"язок $S_k > 0$ $(k=1,\dots,n)$ при $D_k(0) = E$ $(k=1,\dots,n)$

В §I.5. виведені рівняння для стохастичних функцій Ляпунова

$$V_k(X) \equiv \overset{*}{X} C_k X \int_0^\infty \langle w(X(t)) \,|\, X(0) = X,\ \xi(0) = \theta_k \rangle\, dt, \quad (k=1,\dots,n) \tag{25}$$

де $w(X) = \overset{*}{X} B X$, $B = \overset{*}{B} > 0$ позитивно визначена квадратична форма. Для матриць C_k $(k=1,\dots,n)$ виведена система матричних рівнянь

$$C_k = \int_0^\infty \psi_k(t) \overset{*}{N_k}(t) B N_k(t)\,dt + \int_0^\infty \sum_{s=1}^{n} \overset{*}{N_k}(t) \overset{*}{C_{sk}} C_s C_{sk} N_k(t) q_{sk}(t)\,dt \quad (k=1,\dots,n) \tag{26}$$

<u>Теорема I.7.</u> Нехай для системи (5) виконані необхідні умови стійкості (20). Для того, щоб нульовий розв"язок системи (5) був у середньому L_2 стійким

I. Необхідно і достатньо, щоб система (26) при $B>0$ мала розв"язок $C_k>0 \quad (k=1,\dots,n)$

2. Необхідно і достатньо, щоб збігався метод послідовних наближень при розв"язуванні системи (26) при $B>0$

3. Достатньо, щоб при деяких симетричних матрицях $C_k>0$ виконувалися нерівності

$$C_k-\int_0^\infty\sum_{s=1}^n N_k^*(t)C_{sk}^*C_sC_{sk}N_k(t)q_{sk}(t)\,dt>0 \quad (k=1,\dots,n) \tag{27}$$

Подані узагальнення деяких результатів для випадку функції

$$w\,(t,\xi(t),X)=X^*B\,(t,\xi(t))X$$

У другому розділі вивчаються лінійні різницеві рівняння з коефіцієнтами, які залежать від скінченнозначного напівмарківського процесу дискретного в часі. Дискретний напівмарковський процес ξ_k розглядається як окремий випадок неперервного напівмарковського процесу $\xi(t)$ при

$$Q(t)=\sum_{k=1}^\infty Q(k)\,\delta(t-k), \tag{28}$$

де $\delta(t)$ - функція Дірака. Вводяться функції

$$\psi_s(k)=\sum_{j=k+1}^\infty q_s(j) \quad (s=1,\dots,n;\ k=0,1,2\dots) \tag{29}$$

Якщо K_j - моменти стрибків напівмарковського процесу ξ_k $(j=0,1,2,\dots;\ k_0=0;\ k_0<k_1<k_2<\dots)$, то маємо рівність

$$P(k_j+s)=\mathcal{P}(s)P(k_j) \qquad (s\geq 0);$$

$$P(k)=(p_1(k)\dots p_n(k));\ p_s(k)=P\{\xi_k=\theta_s\} \quad (s=1,\dots,n) \tag{30}$$

де матриця перехідних імовірностей $\mathcal{P}(s)\ (s=0,1,2\dots)$ задовольняє матричному різницевому рівнянню

$$\mathcal{P}(k)=\Psi(k)+\sum_{j=1}^k\mathcal{P}(k-j)\,Q(j) \quad (k=0,1,2\dots). \tag{31}$$

Розглядається система лінійних різницевих рівнянь з напівмарковськими коефіцієнтами

$$X_{k+1} = A(k, \xi_k) X_k \quad (k = 0, 1, 2 \ldots) \tag{32}$$

Система рівнянь (32) визначається через n детермінованих систем

$$X_{k+1,s} = A_s(k) X_{ks}; \quad X_{ks} = N_s(k) X_{0,s} \quad (s = 1, \ldots, n) \tag{33}$$

Якщо при $k_{j-1} \le k < k_j$ виконана рівність $\xi_k = \theta_s$, то система рівнянь (32) має вигляд

$$X_{k+1} = A_s(k - k_{j-1}) X_k \quad (k_{j-1} \le k < k_j) \tag{34}$$

Якщо при $k_j \le k < k_{j+1}$ виконана рівність $\xi_k = \theta_l$, то

$$X_k = N_s(k - k_{j-1}) X_{k_{j-1}} \quad (k_{j-1} \le k < k_j),$$

$$X_{k_j} = C_{ls} N_s(k_j - k_{j-1}) X_{k_{j-1}}, \quad \det C_{ls} \ne 0 \tag{35}$$

У момент стрибка ξ_k розв"язок X_k множиться на неосо~~бу~~ особливу матрицю C_{ls}, якщо ξ_k переходить із стану θ_s в стан θ_l.

Нехай векторний напівмарковський процес має щільність імовірностей

$$f(k, X, \xi) = \sum_{s=1}^{n} f_s(k, X)\, \delta(\xi - \theta_s) \tag{36}$$

<u>Теорема 2.I.</u> Якщо $X_k (k = 0, 1, 2 \ldots)$ - випадковий розв"язок системи (33) і k_j -стрибки напівмарковського процесу ξ_k, то

$$F(s + k_j, X) = L(s) F(k_j, X) \quad (s \ge 0); \quad F^*(k, X) = (f_1(k, X) \ldots f_n(k, X)),$$

де оператор $L(s)$ задовольняє рівнянню

$$L(s) = \Psi(s) R(s) + \sum_{j=1}^{s} L(s-j)\, S(j)\, R(j), \qquad (37)$$

де позначено

$$R(s) = \| \delta_{zl} R_l(s) \|_1^n \; ; \; S(s) = \| q_{zl}(s) S_{zl} \|_1^n,$$

$R_l(s)$, S_{zl} - стохастичні оператори, визначені формулами

$$R_s(k) f(X) \equiv f(N_s^{-1}(k) X) \det N_k^{-1}(k) \qquad (s = 1, \dots, n);$$

$$S_{zl} f(X) \equiv f(C_{zl}^{-1} X) |\det C_{zl}^{-1}| \qquad (s, k = 1, \dots, n) \qquad (38)$$

Розв"язок рівняння (37) може бути представлений у вигляді

$$L(s) = \Psi(s) R(s) + \sum_{j=1}^{s} \Psi(s-j) R(s-j) U \quad (s = 0, 1, 2 \dots) \qquad (39)$$

де оператор $U(s)$ є розв"язком операторного рівняння

$$U(s) = S(s) R(s) + \sum_{\tau=1}^{s-1} S(\tau) R(\tau) U(s-\tau) \quad (s = 0, 1, 2 \dots) \qquad (40)$$

На основі системи рівнянь (39), (40) виведені моментні рівняння для розв"язування системи (32). Використовуємо позначення (I6), (I8).

<u>Теорема 2.2.</u> Нехай виконані умови теореми 2.I. Тоді математичне сподівання $M(s) = \langle X(s) \rangle$ випадкового розв"язку визначається системою рівнянь

$$M_k(s) = \psi_k(s) N_k(s) M_k(0) + \sum_{j=1}^{s} \psi_k(s-j) N_k(s-j) V_k(j) \qquad (k = 1, \dots, n);$$

$$V_k(s) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}^{(s)} C_{kl} N_l(s) M_l(0) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{s-1} \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(s-j) C_{kl} N_l(s-j) V_l(j) \qquad (k = 1, \dots, n) \qquad (4I)$$

а матриця моментів другого порядку $D(s) = \langle X(s) X(s) \rangle$

визначається системою матричних рівнянь

$$D_k(s) = \psi_k(s) N_k(s) D_k(0) N_k^*(s) + \sum_{j=1}^{s} \psi_k(s-j) N_k(s-j) W_k(j) N_k^*(s-j);$$

$$W_k(s) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(s) C_{kl} N_l(s) D_l(0) N_l^*(s) C_{kl}^* +$$

$$+ \sum_{j=1}^{s-1} \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(s-j) C_{kl} N_l(s-j) W_l(j) N_l^*(s-j) C_{kl}^* \quad (k=1,\dots,n) \tag{42}$$

У §2.2. виведені моментні рівняння в окремому випадку, коли напівмарковський процес є марковським дискретним у часі процесом.

У §2.3. виведені необхідні і достатні умови стійкості розв"язків системи (32). Нульовий розв"язок системи (32) називається в середньому L_2 стійкий, якщо збігається матричний ряд

$$D = \sum_{k=0}^{\infty} D(k) < \infty, \quad D(k) \equiv \langle X(k) X^*(k) \rangle \tag{43}$$

Із в середньому L_2 стійкості випливає асимптотична стійкість у середньому квадратичному.

<u>Теорема 2.3.</u> Для того, щоб нульовий розв"язок системи (32) був асимптотично стійким у середньому квадратичному необхідно, щоб виконувались умови

$$\lim_{s \to +\infty} \psi_k(s) \| N_k(s) \|^2 = 0 \quad (k=1,\dots,n) \tag{44}$$

<u>Теорема 2.4.</u> Нехай виконані умови теореми 2.I. і необхідні умови стійкості (44). Для того, щоб нульовий розв"язок системи (32) був у середньому L_2 стійким

I. Необхідно і достатньо, щоб система рівнянь

$$S_k = D_k(0) + \sum_{l=1}^{n} C_{kl} \Big(\sum_{s=1}^{\infty} q_{kl}(s) N_l(s) S_l N_l^*(s) \Big) C_{kl}^* \tag{45}$$

при $D_k(0) > 0$ $(k=1,\dots,n)$ мала розв"язок $S_k > 0$ $(k=1,\dots,n)$.

2. Необхідно і достатньо, щоб збігався метод послідовних наближень при розв"язанні системи (45).

3. Достатньо, щоб при деяких симетричних матрицях $S_k > 0 \quad (k=1,\dots,n)$ виконувались нерівності

$$S_k - \sum_{l=1}^{n} C_{kl} \Big(\sum_{s=1}^{\infty} q_{kl}(s) N_l(s) S_l \overset{*}{N}_l(s) \Big) \overset{*}{C}_{kl} > 0 \quad (k=1,\dots,n) \qquad (46)$$

4. Необхідно і достатньо, щоб система рівнянь (45) мала розв"язок $S_k > 0 \quad (k=1,\dots,n)$.

Вводяться основні стохастичні функції Ляпунова

$$V_k(X) \equiv \overset{*}{X} C_k X = \sum_{s=0}^{\infty} \langle w(X_s) \mid X_0 = X,\ \xi_0 = \theta_k \rangle \qquad (47)$$
$$(k=1,\dots,n),$$

де $w(X) = \overset{*}{X} B X,\ B = \overset{*}{B} > 0$ – позитивно визначена квадратична форма. Для матриць $C_k \quad (k=1,\dots,n)$ одержана система матричних рівнянь

$$C_k = \sum_{s=0}^{\infty} \psi_k(s) \overset{*}{N}_k(s) B N_k(s) + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{n} \overset{*}{N}_k(s) \overset{*}{C}_{lk} C_l C_{lk} N_k(s) q_{lk}(s) \qquad (48)$$
$$(k=1,\dots,n)$$

<u>Теорема 2.5.</u> Нехай виконані умови теореми 2.I. і необхідні умови стійкості (44). Для того, щоб нульовий розв"язок системи (32) був у середньому L_2 стійким

I. Необхідно і достатньо, щоб система рівнянь (48) при $B > 0$ мала розв"язок $C_k > 0 \quad (k=1,\dots,n)$

2. Необхідно і достатньо, щоб збігався метод послідовних наближень при розв"язуванні системи (48);

3. Достатньо, щоб при деяких симетричних матрицях $C_k > 0 \quad (k=1,\dots,n)$ виконувалися матричні нерівності

$$C_k - \sum_{l=1}^{n} \sum_{s=1}^{\infty} \overset{*}{N}_k(s) \overset{*}{C}_{lk} C_l C_{lk} N_k(s) q_{lk}(s) > 0 \quad (k=1,\dots,n) \qquad (49)$$

<u>У третьому розділі</u> виведені необхідні умови оптимальності розв"язків лінійних систем диференціальних різницевих рівнянь,

які містять вектори керування.

Розглядається лінійна система керування

$$\frac{dX(t)}{dt} = A\,(t, \xi(t))\,X(t) + B\,(t, \xi(t))\,U(t) \tag{50}$$

з напівмарковськими коефіцієнтами. Шукаємо вектор керування $U(t)$ із умов мінімума квадратичного функціонала

$$V = \left\langle \int_0^\infty \left(X^*(t)\,Q\,(t, \xi(t))\,X(t) + U^*(t)\,L(t, \xi(t))\,U(t) \right) dt \right\rangle \tag{51}$$

з напівмарковськими коефіцієнтами. Шукається оптимальне керування вигляду

$$U(t) = S(t, \xi(t))\,X(t) \tag{52}$$

Припускається, що оптимізована система (50) має стрибки розв"язків вигляду (8).

<u>Теорема 3.I.</u> Оптимальне керування $U(t)$ (52) визначається із системи рівнянь

$$U_s(t) = -L_s^{-1}(t)\,B_s^*(t)\,R_s(t)\,X_s(t), \quad (s = 1, \ldots, n) \tag{53}$$

де матриця $R_s(t)$ $(s = 1, \ldots, n)$ задовольняє рівнянням

$$\frac{dR_s(t)}{dt} = -Q_s(t) - A_s^*(t)R_s(t) - R_s(t)A_s(t) + R_s(t)B_s(t)L_s^{-1}(t) \times$$

$$B_s^*(t)R_s(t) - \left(\frac{\psi_s'(t)}{\psi_s(t)} R_s(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{q_{ks}(t)}{\psi_s(t)} C_{ks}^* R_k(0) C_{ks} \right) \tag{54}$$

$$(s = 1, \ldots, n)$$

де $A_s(t),\ B_s(t),\ Q_s(t),\ L_s(t)$ - окремі значення матриць

$A(t, \xi(t)),\ B(t, \xi(t)),\ Q(t, \xi(t)),\ L(t, \xi(t)),$

при $\xi(t) = \theta_s$, $t \geq 0$.

У §3.2. розглянуто окремий випадок, коли коефіцієнти системи (50) є кусково сталими.

У §3.3. розглядається дискретна система керування

$$X_{k+1}=A(k,\xi_k)X_k+B(k,\xi_k)U_k \quad (k=0,1,2\dots) \qquad (55)$$

з напівмарковськими коефіцієнтами. Шукається вектор керування із умов мінімуму квадратичного функціоналу

$$V=<\sum_{k=0}^{\infty}(X_k^*Q(k,\xi_k)X_k+U_k^*L(k,\xi_k)U_k> \qquad (56)$$

Припускається, що оптимальне управління має вигляд

$$U_k=S(k,\xi_k)X_k \qquad (k=0,1,2\dots) \qquad (57)$$

Припускається, що оптимізована система (55) має стрибки розв"язків вигляду (35).

<u>Теорема 3.2.</u> Необхідні умови оптимальності розв"язків системи (55) визначаються системою різницевих рівнянь

$$S_s(k)=-Q_s(k)+B_s^*(k)P_s(k+1)B_s(k))^{-1}B_s^*(k)P_s(k+1)A_s(k+1) \qquad (58)$$
$$(k=0,1,2\dots;\quad s=1,\dots,n),$$

де

$$P_s(k)=\frac{\psi_s(k)}{\psi_s(k-1)}\Big(Q_s(k)+A_s^*(k)P_s(k+1)\big(A_s(k)+B_s(k)S_s(k)\big)\Big)+$$
$$+\sum_{l=1}^{n}\frac{q_{ls}(k)}{\psi_s(k-1)}C_{ls}^*K_l(0)C_{ls} \qquad (k=1,2,\dots,\quad s=1,\dots,n) \qquad (59)$$

У §3.4. розглядається окремий випадок системи (55) з кусково сталими коефіцієнтами.

У §3.5. досліджується одна задача переслідування в детермінованій і стохастичній постановках. Керована бомба падає з деякої висоти і намагається влучити в ціль. Відоме положення цілі і швидкість її руху. Ціль не має інформації про положення бомби, але завдяки руху і зміні напрямку швидкості за детермінованим або випадковим законом намагається збільшити відстань до точки падіння бомби.

Розглядаются різні окремі випадки при лінійному і нелінійному законі керування. Одержані результати наведені в додатку 3.

У додатках I, 2 розглянуто чисельне розв"язання задач синтезу оптимального керування для диференціального і різницевого рівняння.

Основні наукові результати, вміщені у дисертацію, опубліковані в наступних роботах:

I. Фаввах З.Д. Побудова функції Ляпунова для системи нелінійних диференціальних рівнянь з випадковою правою частиною. - Київ, 1993. - 7 с. (Деп. в УкрНДІНТІ 27.05.1993. - № 1067. УК 93).

2. Фаввах З.Д. Про розв"язування однієї задачі стохастичної оптимізації. - Київ, 1993. - II с. (Деп. в УкрНДІНТІ 02.02.1993. - № 75 - УК93).

3. Фаввах З.Д. Оптимізація розв"язків системи лінійних диференціальних рівнянь із випадковими коефіцієнтами. Тези українськоі конференції "Моделювання і дослідження стійкості систем. Ч.П. - Київ: товариство " Знання" Україна, 1993. - С.49-50.

4. Валеєв К.Г., Фаввах З.Д. Синтез оптимального керування для систем лінійних різницевих рівнянь із напівмарковськими випадковими коефіцієнтами. - Київ, 1992. - I4 с. (Деп. в УкрНДІНТІ 18.09.92 - № 1449 - УК92).

5. Валеєв К.Г., Фаввах З.Д. Оптимізація розв"язків системи лінійних диференціальних рівнянь з напівмарковськими випадковими коефіцієнтами. - Київ, 1992. - I2 с. (Деп. в УкрНДІНТІ 18.09.92. - № 1448 - УК 92).

6. Валеєв К.Г., Фаввааз З.Д. Оптимізація розв"язків системи лінійних диференціальних рівнянь з випадковими коефіцієнтами. - Київ, 1993. - 13 с. (Деп. в УкрНДІНТІ 02.02.1993. - № 76 - УК 93).

Підп. до друку 20.01.94. Формат $60 \times 84^1/_{16}$.
Папір друк. № . Спосіб друку офсетний. Умовн. друк. арк. 0,93.
Умовн. фарбо-відб. 1,16 . Обл.-вид. арк. 1,0 .
Тираж 100 . Зам. № 4-300 .

Фірма «ВІПОЛ»
252151, Київ, вул. Волинська, 60.