МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

На правах рукопису

ІТАЛМАЗОВ Хемра

КЛАСИ СПРЯЖЕНОСТІ І ТРАНЗИТИВНІ ПІДГРУПИ СИЛОВСЬКИХ 2-ПІДГРУП СИМЕТРИЧНИХ ГРУП СТЕПЕНІВ 2^m ($m \in N$)

01.01.06 – математична логіка
алгебра і теорія чисел

А в т о р е ф е р а т

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

К и ї в - 1994

Дисертацією є рукопис

Робота виконана в Київському університеті імені Тараса Шевченка.

Науковий керівник:	- доктор фізико-математичних наук, професор СУЩАНСЬКИЙ В.І.
Офіційні опоненти:	- доктор фізико-математичних наук, ст. наук. співр. ІМ АНУ Сисак Я.П.
	- кандидат фізико-математичних наук, доцент Іванюта І.Д.
Провідна установа	- Львівський державний університет ім. Івана Франка

Захист відбудеться "19" вересня 1994р. о год. на засіданні спеціалізованої Ради Д 01.01.01 при Київському університеті імені Тараса Шевченка за адресою:

252127, м.Київ-127, пр.Академіка Глушкова, 6, механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Київського університету ім.Тараса Шевченка (вул. Володимирська,62).

Автореферат розіслано "27" квітня 1994р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради
канд. фіз.-мат. наук С.А.Овсієнко

АВ-23.812

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Силовські p-підгрупи симетричних груп - класична серія, дослідження якої почалося ще на ранніх етапах розвитку теорії груп. Постійний інтерес до цієї серії груп викликаний тим, що силовські p-підгрупи симетричних груп відіграють у класі всіх скінченних p-груп таку ж роль, що й симетричні групи в класі всіх скінченних груп. А саме, кожна скінченна p-група ізоморфно занурюється в силовську p-підгрупу відповідної симетричної групи. Крім того, групи аналогічної будови зустрічаються в класифікаційних задачах теорії скінченних груп, використовуються при побудові різних прикладів.

Систематичне дослідження властивостей і будови силовських p-підгруп почалося з відомих праць Л.А.Калужніна[1], який запропонував використовувати при цьому спеціальний спосіб завдавання їх елементів наборами редукованих многочленів -так званими таблицями. За допомогою табличного зображення було отримано цілий ряд глибоких результатів про будову силовських p-підгруп P_m симетричних груп степенів p^m, $m \in N$ (саме цей випадок є основним, бо загальна ситуація легко до нього зводиться). Зокрема, Л.А.Калужнін охарактеризував верхній і нижній центральні ряди груп P_m, їхній ряд комутантів, підгрупи p^l-тих степенів, решітку характери-

Kaloujnine Leo. Sur les p- groupes de Sylow du groupe symmetrique de degree p^m// C.R.Acad.Sci Paris.-1945.-v.221.-p.222-224.
Kaloujnine Leo. La structure des p-groupes de Sylow des groupes symmetriques finis // Ann. de l'Ecole Norm. Super.-1948.-68.-p.239-276.
Kaloujnine Leo. Sur les structure des p-groupes de Sylow des groupes symmetriques finis et de quelques generalisations infinies de ces groupes // Semin. Burbaki. December 1948.-Expose № 5.- p.1-3.

стичних підгруп тощо. Пізніше різні аспекти силовської теорії для симетричних та близьких до них груп досліджувались іншими авторами, зокрема, Я.Г.Берковичем, Ю.В.Боднарчуком, К.Бузаші, А.Вейр, Ю.В.Дмитруком, В.І.Сущанським, Л.Тешке. В їхніх працях вивчались решітки нормальних дільників, вербальні підгрупи, максимальні абелеві підгрупи, групи автоморфізмов та інші характеристики вказаних груп.

Проте ряд природних питань щодо будови силовських p-підгруп симетричних груп залишається відкритими. Це стосується характеризації підгруп з тими чи іншими (як теоретико-груповими, так і підстановково-груповими) властивостями, прийнятного опису класів спряженості тощо.

Мета роботи. Розробити новий спосіб задавання підгруп і класів спряженості груп P_m $(m \in N)$. Оцінити потужності класів спряженості цих груп, описати класи спряженості максимального обсягу, дати повний опис класів спряженості для малих значень m. Охарактеризувати транзитивні і сильно транзитивні підгрупи в P_m, описати транзитивні 2-групи підстановок, інволюції в яких зберігають ≤ 2 нерухомих точок.

Методи дослідження. Використовуються методи теорії груп і груп підстановок і розроблена Л.А.Калужниним техніка табличних зображень p-груп.

Наукова новизна. Основні результати дисертаційної роботи є новими. Дано оцінку потужностей класів спряженості груп P_m $(m \in N)$, описано всі класи спряженості максимального обсягу. Встановлено критерії транзитивності та сильної транзитивності підгруп із P_m, охарактеризовано широкі класи таких підгруп. Описано транзитивні 2-групи підстановок, інволюції яких зберігають ≤ 2 нерухомих точок.

Теоретичне і прикладне значення. Отримані результати мають теоретичний характер. Вони можуть бути використані при дослідженні будови і властивостей різних класів 2-груп.

Апробація роботи. Основні результати дисертації доповідались на семінарі з теорії груп і напівгруп при Київському університеті ім.Тараса Шевченка /1990-1994 р.р./, на науковій конференції студентів і аспірантів КУ, на конференції молодих вчених ТДПІ ім.С.Сейді /г.Чарджев, 1993р./.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в роботах [I]-[5].

Структура і обсяг дисертації. Робота складається з вступу, трьох глав, двох додатків і списку літератури із 34 найменувань. Обсяг роботи 85 сторінок машинописного тексту.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтовано актуальність проблематики дисертації, наводиться короткий огляд робіт за темою дисертації, характеризується зміст роботи.

Перша глава носить допоміжний характер. В ній систематизовано викладаються основні відомості про будову силовських 2-підгруп скінченних симетричних груп. В §I описується побудова силовських 2-підгруп симетричних груп довільного степеня n. Якщо $n=2^m$, то силовська 2-підгрупа P_m в S_{2^m} є m-тим вінцевим степенем регулярної циклічної групи C_2 порядку 2:

$$P_m = \underbrace{C_2 \wr C_2 \wr \ldots \wr C_2}_{m}$$

і має порядок $|P_m|=2^1+\ldots+2^{m-1}$. В разі коли число m має розклад $m=a_0+a_1 2+a_2 2^2+\ldots+a_s 2^s$ $(a_i=0,1 \; ; \; 0 \leqslant i \leqslant s)$ в системі числення з основою 2, силовська 2-підгрупа S_m розкладається на прямий добуток силовських 2-підгруп P_l симетричних груп степенів 2^l:

$$Syl(S_n) = P_1^{a_1} \times P_2^{a_2} \times \ldots \times P_s^{a_s}.$$

Елементи вінцевого добутку $C_2 \S C_2 \S \ldots \S C_2$ (m разів) можуть бути задані впорядкованими наборами (так званими таблицями) вигляду

$$[a_1, a_2(x_1), \ldots, a_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})],$$

де $a_1 \in C_2, a_i(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})$ - функція від i-I змінної над C_2. Ототожнюючи C_2 з адитивною групою поля Z_2, кожну таку функцію можна задати редукованим многочленом над Z_2. В §I наводяться формули для знаходження координат комутаторів, трансформ і степенів таблиць, які використовуються далі. В §2 описується введена Л.А.Калужніним спеціальна алгебра редукованих многочленів, яка з'являється при обчисленнях з таблицями, а в §3 наводяться основні факти про підгрупову будову груп P_m, $m \in N$.

Друга глава дисертаційної роботи присвячена дослідженню класів спряженості групи P_m.

В §4 пропонується спеціальний спосіб завдавання підмножин групи P_m за допомогою так званих таблиць загального вигляду. Таблиця загального вигляду - це таблиця, коефіцієнти координат якої є виразами від деякого числа вільних параметрів. Надаючи вільним параметрам ті чи інші значення з Z_2, за таблицею загального вигляду можна побудувати деяку конкретну таблицю з P_m. Якщо вільні параметри пробігають наймовливіші набори значень, то отримуємо деяку підмножину $M(u)$ таблиць з P_m. А тому, таблиці загального вигляду можна використовувати для завдавання множин таблиць з P_m.

Т е о р е м а 4.1. Будь-яка підмножина M групи P_m є множиною значень придатної таблиці загального вигляду. Якщо $2^{k-1} < |M| \leqslant 2^k$, то таблицю можна вибрати так, щоб вона залежала від k параметрів.

Як наслідок з цієї теореми отримуємо, що будь-який клас спряженості групи P_m і будь-яка її підгрупа можуть бути задані деякими таблицями загального вигляду.

В §5 пропонуються оцінки для потужностей класів спряженості P_m.

Нехай Σ_m - множина класів спряженості групи P_m. Число елементів у кожному класі з Σ_m є степенем двійки, тобто для будь-якого $A \in \Sigma_m$ існує таке натуральне число $\varkappa(A)$, що $|A| = 2^{\varkappa(A)}$. Функція $\varkappa(A)$ визначена на Σ_m и приймає значення на множині цілих невід'ємних чисел.

Т е о р е м а 5.1. Для будь-якого $A \in \Sigma_m$ справедливі нерівності

$$0 \leqslant \varkappa(A) \leqslant 2^m - m - 1.$$

В цьому ж параграфі встановлено, що для класу спряженості групи P_m, який складається з таблиць глибини k ($1 \leqslant k \leqslant m$), тобто таблиць, перші k координат яких нульові, множина (k+1)-их координат цих таблиць є орбітою гр,пи P_k при її природній дії на множині редукованих многочленів від k змінних. А тому, задача опису класів спряженості глибини m-1 зводиться до огляду орбіт P_{m-1} на множині редукованих многочленів від m-1 змінних. Це дозволяє також встановити, що класами спряженості є множини таблиць глибини m-2, перша ненульова координата яких пробігає деякий клас спряженості , а друга - не залежить від змінної x_{m-1}.

В §6 описуються класи спряженості групи P_m найбільшої потужності.

Т е о р е м а 6.I. Існує точно три класи спряженості групи P_m, для яких функція $æ(A)$ приймає найбільше значення. Один з них складається зі наймождивіших елементів максимального порядку в P_m, а два інших - з елементів порядку 2^{m-1}.

Ці класи спряженості можуть бути задані за допомогою трьох таблиць загального вигляду

а) $[I, x_1+\bar{a}_2(\overline{x_1}), \ldots, x_1 \ldots x_{m-2}+\bar{a}_{m-1}(\overline{x_{m-2}}), x_1 \ldots x_{m-1}+\bar{a}_m(\overline{x_{m-1}})]$;

б) $[I, x_1+\bar{a}_2(\overline{x_1}), \ldots, x_1 \ldots x_{m-2}+\bar{a}_{m-1}(\overline{x_{m-2}}), \bar{a}_m(\overline{x_{m-1}})]$;

в) $[I, x_1+\bar{a}_2(\overline{x_1}), \ldots, x_1 \ldots x_{m-3}+\bar{a}_{m-2}(\overline{x_{m-3}}), \bar{a}_{m-1}(\overline{x_{m-2}}), x_1 \ldots x_{m-1}+$
$+\bar{a}_m(\overline{x_{m-1}})]$;

де многочлени $\bar{a}_i(\overline{x_{i-1}})$ не містять одночленів максимальної висоти $(2 \leqslant i \leqslant m)$.

Враховуючи наведену вище формулу для $Syl(S_n)$ при будь-якому $n \in N$, теорему 6.I можна перенести на випадок силовських 2-підгруп довільних симетричних груп.

Т е о р е м а 6.2. Нехай $n = \varepsilon_0 \cdot I + \varepsilon_1 \cdot 2 + 2^{l_1} + \ldots + 2^{l_s}$ $(\varepsilon_0, \varepsilon_1 \in \{0, I\})$-розвинення числа n за основою 2. Найбільше значення функції $æ(k)$, $k \in \Sigma_n$, дорівнює

$$\sum_{i=1}^{s} (2^{l_i} - l_i - I) + \varepsilon_1 \cdot I.$$

При $n \geqslant 4$ існує точно 3^s класів спряженості групи $Syl(S_n)$, потужність яких максимальна.

В §7 характеризуються класи спряженості груп P_m при $m \leqslant 4$. Встановлено, що група P_3 розбивається на 20 класів спряжених елементів, а група P_4 – має 225 таких класів. Знайдено потужності всіх класів, вказано розподіл елементів кожного порядку з P_3 чи P_4 за класами спряженості.

В третій главі вивчаються транзитивні і сильно транзитивні підгрупи групи P_m. В §8 знайдено умови транзитивності і сильної транзитивності підгруп P_m, які задаються таблицями загального вигляду. Якщо $u=[a_1,a_2(\bar{x}_1),\ldots,a_n(\bar{x}_{n-1})]$ – деяка таблиця загального вигляду, то її лишком назвемо таблицю

$$r(u)=[a_1,a_2(\bar{0}),\ldots,a_n(\bar{0})].$$

Т е о р е м а 8.1. Таблиця загального вигляду $u=[a_1,a_2(\bar{x}_1),\ldots,a_n(\bar{x}_n)]$ завдає транзитивну підгрупу групи P_n тоді і тільки тоді, коли має місце рівність

$$|M(r(u))|=2^n.$$

Нехай $a_1,a_2,\ldots,a_k$ – набір вільних параметрів таблиці загального вигляду u, $f_i(a_1,\ldots,a_{k_i})$ – вільний член i-тої координати ($1 \leqslant i \leqslant n$). Покладемо

$$\tilde{a}_i(\bar{x}_{i-1})=a_i(\bar{x}_{i-1})+f_i \quad (2 \leqslant i \leqslant n).$$

Т е о р е м а 8.2. Підгрупа $G < P_m$, яка завдається таблицею загального вигляду $u=[a_1,a_2(\bar{x}_1),\ldots,a_n(\bar{x}_{n-1})]$ з параметрами $a_1,a_2,\ldots,a_k$ $(k \geqslant n)$, буде сильно транзитивною тоді і тільки тоді, коли система рівнянь

$$\begin{cases} f_1=\beta_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n=\beta_n \\ \tilde{a}_2(f_1)=0 \\ \tilde{a}_3(f_1,f_2)=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tilde{a}_n(f_1,f_2,\ldots,f_{n-1})=0 \end{cases}$$

з невідомими $a_1, a_2, \ldots, a_k$ має розв'язок при будь-якому наборі $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in Z_2^n$.

Перевірка таблично заданої групи на сильну транзитивність може виявитися досить громіздкою. Для деяких класів підгруп її можна провести значно простіше.

Підгрупу $G < P_n$ назвемо розщіпленою, якщо при будь-якому k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ разом з кожною таблицею u вона містить також і таблицю $u^{(k)}$ глибини kтаку, що $[u^{(k)}]_l = [u]_l$ при $l = k+1, \ldots, n$. Розщіплена група G містить для кожного k підгрупу $\bar{G}_k$ k-тих початків усіх таблиць із G та підгрупу $G^{(k)}$ усіх k-тих закінчень, причому $G = \bar{G}_k \leftthreetimes G^{(k+1)}$. Нехай $[G]_k$ - множина k-тих координат усіх таблиць із G.

Т е о р е м а 8.4. Довільна транзитивна розщіплена підгрупа групи P_n буде сильно транзитивною. Розщіплена підгрупа G буде транзитивною тоді і тільки тоді, коли при довільному k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ виконується співвідношення $[G]_k \neq \{0\}$.

В §9 вивчаються транзитивні групи підстановок, інволюції в яких мають не більше двох нерухомих точок (т.зв. (I,2)-групи).

Т е о р е м а 9.I. Транзитивна 2-група підстановок степеня 2^n, кожна інволюція в якій має не більше двох нерухомих точок, є регулярною або має порядок 2^{n+1}.

Т е о р е м а 9.2. Зображення групи G порядку 2^{n+1} $(n \geqslant 2)$ на лівих класах суміжності за 2-елементною підгрупою A є (I,2)-групою тоді і тільки тоді, коли $|N_G(A)| = 4$.

В останньому, десятому параграфі роботи розглядаються транзитивні і сильно транзитивні групи малих степенів. Вказано табличні зображення всіх 26 транзитивних 2-груп степеня 8, встановлено, що I4 з них є сильно транзитивними, знайдено тип таблиць загального вигляду, які задають (I,2)-групи підстановок степеня 16, встановлено, що порядок будь-якої (1,4)-групи G степеня 16, яка є 2-групою, задовольняє нерівностям

$$2^4 \leq |G| \leq 2^7.$$

У додатку 1 наведено каталоги таблиць загального вигляду, які задають класи спряженості групи P_3 и P_4, а в додатку 2 - каталог таблиць загального вигляду, які задають попарно не подібні транзитивні 2-групи степеня 8, каталог таблиць загального вигляду, які задають попарно не подібні сильно транзитивні 2-групи степеня 8 і таблиці розподілу транзитивних 2-груп за типами в залежності від найбільшого числа нерухомих точок їх інволюцій.

Публікації, покладені в основу дисертації

1. Италмазов Х. О классах сопряженности силовских 2-подгрупп симметрической группы степени 2^n //Математикадан билим бермеклигин узнуксиз системасыны гурамак боюнча ылмы-методики конференциянын материаллары. ТДПИ.- Чарджев.1993.- с.9-11.
2. Италмазов Х. Каталог классов сопряженности силовских 2-подгрупп симметрической группы степени $2^n, n\leq 4$ //Математикадан билим бермеклигин узнуксиз системасыны гурамак боюнча ылмы-методики конференциянын материаллары. ТДПИ.- Чарджев.1993.- с.7-9.
3. Италмазов Х. Характеризация классов сопряженности силовской 2-подгруппы симметрической группы степени 2^m //Известия Академии наук Туркменистана. - 1994, № 1, с.17-23.
4. Сущанский В.И., Италмазов Х. Транзитивные 2-группы подстановок, инволюции в которых имеют не более двух неподвижных точек // Известия АН Туркменистана.-1994.-№ 2, с.25-31.
5. Сущанський В.І., Італмазов Х. Табличні зображення транзитивних 2-груп// Доповіді АН України.-1994.-№ 3, с.10-15.

Підписано до друку 11.04.94р формат 60х84/16
Папір друк. Умов. друк. л. 1,0. Тираж 100 примірник.Заказ №691
Надруковано ЦУОП ДНПП "Плодвинконсерв" м. Київ, Саксаганського, 1