НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

БУДНІК Василь Григорович

КОВИПУКЛЕ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ДІЙСНИХ ЗМІННИХ АЛГЕБРАЇЧНИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ

01.01.01 — математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття вченого ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 1994

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у відділі теорії функцій Інституту математики НАН України.

Науковий керівник:	доктор фізико-математичних наук КОНОВАЛОВ В.М.
Офіційні опоненти:	доктор фізико-математичних наук, професор БАБЕНКО В.Ф.
	кандидат фізико-математичних наук НАЗАРЕНКО В.О.
Провідна установа:	Київський університет ім. Тараса Шевченка.

Захист відбудеться "14" червня 1994 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої ради при Інституті математики НАН України за адресою:
252601, Київ 4, ГСП, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці інституту.

Автореферат розісланий "13" травня 1994 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради
доктор фізико-математичних наук ГУСАК Д.В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми.

Першим дослідженням, яке можна віднести до тематики конаближення, можна вважати роботу П.Л.Чебишова, в якій побудовано монотонний многочлен $p_N(f) = x^N + a_1 x^{N-1} + \ldots + a_N$, $x \in \mathbb{R}^1$, що найменше відхиляється від нуля в метриці $C([-1,1])$.

Позначимо через Δ^k, $k \in \mathbb{N}$, множину функцій $f \in C([-1,1])$ таких, що $\Delta_h^k f(x) \geq 0$ для всіх $(x, x + kh) \subset [-1,1]$, $h \geq 0$. Величину

$$E_N^{(k)}(f) := \inf_{p_N \in \mathcal{P}_N(\mathbb{R}^1),\, p_N \in \Delta^k} \| f - p_N \|_{C([-1,1])},\ N \in \mathbb{Z}_+^1$$

називають найкращим k - конаближенням f на відрізку $[-1,1]$ в рівномірній метриці алгебраїчними многочленами. Величина

$$E_N(f) := \inf_{p_N \in \mathcal{P}_N(\mathbb{R}^1)} \| f - p_N \|_{C([-1,1])},\ N \in \mathbb{Z}_+^1$$

називається найкращим наближенням f на відрізку $[-1,1]$ в рівномірній метриці алгебраїчними многочленами. Число $E_N^{(1)}(f)$ називають величиною найкращого комонотонного, а число $E_N^{(2)}(f)$ - величиною найкращого коопуклого наближення на відрізку $[-1,1]$ в рівномірній метриці алгебраїчними многочленами.

Для $E_N^{(k)}(f)$ має місце аналог теореми К.Вейєрштраса: $E_N^{(k)}(f) \to 0$, при $n \to \infty$, встановлений Г.Г.Лоренцом. Г.Г.Лоренц і К.Л.Целлер побудували приклад функції $f \in \Delta^k, k \in \mathbb{N}$, такої, що

$$\overline{\lim_{n \to \infty}}\ E_N^{(k)}(f) / E_N(f) = \infty,$$

тому задача про оцінку величини найкращого k - конаближення не зводиться, взагалі кажучи, до задачі про оцінку найкращого рівномірного наближення. Незважаючи на це, вони для $f \in \Delta^1$ довели справедливість такої нерівності:

$$E_N^{(1)}(f) \leq M\, \omega_1(f, 1/N, [-1,1]),\ N \in \mathbb{N},$$

де $M > 0$ не залежить від N і f. Має місце і більш загальна нерівність для $f \in \Delta^k$:

$$E_N^{(k)}(f) \leqslant M\,\omega_2(f,\ I/N,\ [-I,I]),\ N \in \mathbb{N}, \qquad (I)$$

з якої, очевидно, випливає нерівність:

$$E_N^{(k)}(f) \leqslant M\ I/N\ \omega_1(f',\ I/N,\ [-I,I]),\ N \in \mathbb{N}, \qquad (2)$$

де $M > 0$ не залежить від N і f. Нерівності (I) і (2) встановлені в роботах Г.Г.Лоренца ((2) для $k = I$), Р.А.Де Вора ((I) для $k = I$), Р.К.Бітсона ((2) для $k \in \mathbb{N}$), О.С.Шведова ((I) для $k \in \mathbb{N}$). Зазначимо, що О.С.Шведов довів нерівність (I) для інтегральних метрик. Р.А.Де Вор і К.М.Ю одержали уточнення нерівності (2) для $f \in \Delta^1$:

$$|f(x)-p_N(f,x)| \leqslant M\ \ \omega_2\Big(f,\frac{\sqrt{I-x^2}}{N}+\frac{I}{N^2},[-I,I]\Big),\ N\in\mathbb{N}, x\in[-I,I], \ (3)$$

де $p_N(f) \in \Delta^1$ - монотонно неспадаючі многочлени, а $M > 0$ не залежить від N, f і x. З цієї нерівності, очевидно, випливає нерівність:

$$|f(x)-p_N(f,x)| \leqslant M\ \ \omega_1\Big(f,\frac{\sqrt{I-x^2}}{N}+\frac{I}{N^2},[-I,I]\Big),\ N\in\mathbb{N}, x\in[-I,I],$$

яка була встановлена Р.Бітсоном . Відмітимо також, що в роботі Р.А.Де Вора і К.М.Ю встановлено більш точну, ніж (3), оцінку:

$$|f(x)-p_N(f,x)| \leqslant M\ \ \omega_2\Big(f,\frac{\sqrt{I-x^2}}{N},[-I,I]\Big),\ N\in\mathbb{N}, x\in[-I,I].$$

Р.А.Де Вор довів, що якщо $f \in \Delta^1 \cap C^r([-I,I]), r \in \mathbb{N}$, то

$$E_N^{(1)}(f) \leqslant M\,N^{-r}\,\omega_1(f^{(r)},I/N,\ [-I,I]),\ N \in \mathbb{N},$$

де $M > 0$ не залежить від N і f.

Найбільш загальним з результатів, які стосуються комонотонного наближення неперервно диференційовних і монотонно неспадаючих на відрізку функцій $f \in \Delta^1 \cap C^{(r)}([-I,I])$, є теорема, встановлена І.О.Шевчуком :

$$|f(x)-p_N(f,x)| \leq M\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{N}+\frac{1}{N^2}\right)^r \omega_k\left(f,\frac{\sqrt{1-x^2}}{N}+\frac{1}{N^2},[-1,1]\right), \quad (4)$$

$x \in [-1,1]$, де $p_N(f) \in \Delta^1$ – неспадаючі многочлени, $r \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $N \geq r + k - 1$, а $M > 0$ не залежить від N, f і x.

З нерівності (4), очевидно, випливає нерівність:

$$\|f - p_N(f)\|_{C([-1,1])} \leq M N^{-r} \omega_k(f,1/N,[-1,1]) \quad (5)$$

для комонотонного наближення на відрізку $[-1,1]$.

С.Манія (учень І.О.Шевчука), використовуючи ідеї і модифікацію технічних засобів, запропонованих його науковим керівником, встановив аналог наведеної теореми для ковипуклого наближення випуклих функцій $f \in \Delta^2 \cap C^{(r)}([-1,1])$. Він довів нерівності (4) і (5) при умовах, що $p_N(f) \in \Delta^2$ – випуклі многочлени, $r \in \mathbb{N}, r \neq 1$, $k \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}$, $N \geq r + k - 1$.

В багатовимірному випадку задачі конаближення функцій є досить мало дослідженими і нам відомий лише один результат з ковипуклого наближення функцій багатьох змінних алгебраїчними многочленами. Це – встановлена О.С.Шведовим наступна теорема.

ТЕОРЕМА (О.С.Шведов). Якщо $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$ і $\bar{G}^m \subset \mathbb{R}^m$ – компактне випукле тіло, $f: \bar{G}^m \to \mathbb{R}^1$ – неперервна і випукла на $\bar{G}^m$ функція, то існує послідовність $p_N(f) \in \mathcal{P}_N(\mathbb{R}^m)$, $N \in \mathbb{N}$, випуклих на $\bar{G}^m$ алгебраїчних многочленів таких, що

$$\|f - p_N(f)\|_{C(\bar{G}^m)} \leq M \omega_1(f, 1/N, \bar{G}^m), \quad (6)$$

де $M > 0$ не залежить від N і f.

З цієї теореми випливає, що для кожної замкненої області $\bar{G}^m \subset \mathbb{R}^m$, $m > 1$, і кожної функції $f \in C^1(\bar{G}^m)$, неперервно диференційовної і випуклої на $\bar{G}^m$, можна побудувати послідовність алгебраїчних многочленів $p_N(f) \in \mathcal{P}_N(\mathbb{R}^m)$, $N \in \mathbb{N}$, також випуклих на $\bar{G}^m$, які наближають f з швидкістю $O(N^{-1})$. На питання, чи можна наблизити більш гладкі випуклі функції випуклими многочленами з більшою швидкістю, теорема О.С.Шведова відповіді не дає. Зокрема, було невідомо, чи можна наблизити випуклу на крузі $\bar{\mathbb{B}}^2 \subset \mathbb{R}^2$ функцію з класу $C^2(\bar{\mathbb{B}}^2)$ і навіть таку, що $f(x) = 0$, $x \in \partial \mathbb{B}^2$, випуклими алгебраїчними многочленами із швидкістю $O(N^{-2})$.

В даній роботі розглядається задача про ковипукле наближення многочленами випуклих функцій багатьох дійсних змінних і вивчається питання про можливість покращення оцінки (6). Доводиться, що нерівність (6) можна суттєво уточнити в ситуації, коли $\bar{\mathbb{G}}^m$ - область з гладкою границею, а випуклі функції задовольняють деякі обмеження.

Мета роботи. Для диференційовних, або тільки неперервних на випуклих областях в $\mathbb{R}^m$ з гладкою межею випуклих функцій розробити методи наближення випуклими алгебраїчними многочленами і отримати оцінки найкращих наближень у рівномірній метриці більш точні, ніж відомі.

Наукова новизна та практична цінність. В дисертації отримані такі результати:

- для класів випуклих двічі диференційовних на випуклій області функцій, які перетворюються в нуль на її межі, побудовані випуклі многочлени p_N, що збігаються до функції із швидкістю N^{-2};
- для класів двічі диференційовних строго випуклих на випуклій області функцій побудовані випуклі многочлени p_N, що збігаються до функції із швидкістю N^{-2};
- для класів неперервних строго випуклих на випуклій області функцій f побудовані многочлени $p_N(f)$, що збігаються до f із швидкістю $\omega_2(f, N^{-1}) + \omega_1^2(f, N^{-1})$, де ω_1 і ω_2 - модулі неперервності відповідно першого і

другого порядків.

Апробація роботи. Основні результати робсти були викладені і обговорені

- на семінарі з теорії функцій при Інституті математики НАН України (керівник - доктор фізико-математичних наук, професор О.І.Степанець);

- на Міжнародній конференції, присвяченій пам'яті академіка М.П.Кравчука (Київ - Луцьк, 22 - 28 верес. 1992 р.);

- на міжвузівському семінарі з теорії функцій при Дніпропетровському державному університеті (керівники - доктори фізико-математичних наук, професор В.П.Моторний і професор В.Ф.Бабенко).

Публікації. По темі дисертації опубліковано три роботи, список яких наведено в кінці дисертації.

Структура і об'єм роботи. Дисертація складається з вступу, двох розділів і списку літератури, який вміщує 25 найменувань і становить 73 сторінки машинопису.

КОРОТКИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

Наведемо потрібні означення і сформулюємо основні результати.

Нехай $G^m \subset \mathbb{R}^m$ - відкрита в $\mathbb{R}^m$ множина, $f\colon G^m \to \mathbb{R}^1$ - деяка функція, $x \in G^m$, $e \in \mathbb{R}^m$, - одиничний вектор. Величина

$$f'_e(x) := \lim_{t \to 0} t^{-1}(f(x + et) - f(x))$$

називається похідною першого порядку за напрямком e в точці x функції f, якщо існує скінченна границя виразу в правій частині. Якщо при деякому $\lambda > 0$ одновимірний окіл $(x - \lambda e,\ x + \lambda e)$ належить G^m, в кожній точці $y \in (x - \lambda e,\ x + \lambda e)$ існує $f'_e(y)$ і існує скінченна границя

$$f''_e(x) := \lim_{t \to 0} t^{-1}(f'(x + et) - f'(x)),$$

то ця величина називається похідною другого порядку за напрямком e

в точці x функції f.

В розділі I розглядаються класи $\overset{\circ}{V}{}^2_\infty(G^m)$ двічі диференційовних випуклих функцій, визначених на випуклих обмежених областях $G^m \subset \mathbb{R}^m$, $m > 1$, з гладкою межею ∂G^m, що має скінченну кривизну, і які перетворюються в нуль на межі області.

Означення I.1.1. Якщо G^m– відкрита в $\mathbb{R}^m$, $m > 1$, множина, то $f \in W^2_\infty(\bar{G}^m)$, якщо f є неперервною функцією на $\bar{G}^m$, і для кожного одиничного вектора $e \in \mathbb{R}^m$ і будь-якого відрізку $[x', x''] \subset \bar{G}^m$, паралельного e, похідна f'_e першого порядку за напрямком e є абсолютно неперервною функцією на $[x', x'']$, а для похідної f''_e другого порядку за напрямком e є скінченною величина

$$|f|_{W^2_\infty(\bar{G}^m)} := \sup_{e \in \mathbb{R}^m} \sup_{[x',x''] \subset \bar{G}^m} \operatorname{ess\,sup}_{x \in [x',x'']} |f''_e(x)|$$

Означення I.1.2. Якщо $\bar{G}^m$– обмежена і випукла область в $\mathbb{R}^m$, $m > 1$, то будемо вважати, що функція $f \in \overset{\circ}{V}{}^2_\infty(\bar{G}^m)$, якщо f є неперервною і випуклою на $\bar{G}^m$, $f \in W^2_\infty(G^m)$ і на межі ∂G^m перетворюється в нуль $f(x) = 0$, $x \in \partial G^m$.

Основним результатом розділу I є наступна теорема.

Теорема I.2.1. Якщо обмежена і випукла область $\bar{G}^m$ в $\mathbb{R}^m$, $m > 1$, має гладку межу ∂G^m, то для кожної функції $f \in \overset{\circ}{V}{}^2_\infty(\bar{G}^m)$ існує послідовність $p_N(f) \in \mathcal{P}_N(\mathbb{R}^m)$, $N \in \mathbb{N}^1$, випуклих на $\bar{G}^m$ алгебраїчних многочленів таких, що

$$|f - p_N(f)|_{C(\bar{G}^m)} \leq M N^{-1},$$

де M не залежить від N і має вигляд

$$M = \mu \left(|f|_{W^2_\infty(\bar{G}^m)} + |f|^2_{W^2_\infty(\bar{G}^m)} \Big/ \min_{y \in \partial G^m} |f'_{e^{(\alpha)}(y)}(y)| \right),$$

де $\mu = \mu(\bar{G}^m) > 0$ не залежить від f, а $f'_{e^{(\alpha)}(y)}(y)$ – похідна по нормалі $e^{(\alpha)}(y)$ до ∂G^m в точці $y \in \partial G^m$.

Принципову роль для доведення теореми відіграє наступна лема.

Л е м а I.2.I. Якщо обмежена і випукла область в $\mathbb{R}^m, m > 1$, має гладку межу ∂G^m, то для кожної функції $f \in \overset{0}{V}{}^2_\infty(\bar{G}^m)$ існує неперервна і випукла на $\mathbb{R}^m$ функція g така, що $g(x) = f(x)$, $x \in \bar{G}^m$, і для кожного одиничного вектора $e \in \mathbb{R}^m$, кожного $x \in \bar{G}^m$, і для кожного λ: $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda(\bar{G}^m)$ виконується нерівність:

$$|g(x - \lambda e) - 2g(x) + g(x + \lambda e)| \leqslant M \lambda^2,$$

де $\lambda(\bar{G}^m)$ – деяке число, яке залежить від $\bar{G}^m$, а M не залежить від x, e, λ і має вигляд

$$M = \mu \left(|f|_{W^2_\infty(\bar{G}^m)} + |f|^2_{W^2_\infty(\bar{G}^m)} \Big/ \min_{y \in \partial G^m} |f'_{e^{(\alpha)}(y)}(y)| \right),$$

де $\mu = \mu(\bar{G}^m) > 0$ не залежить від f, а $f'_{e^{(\alpha)}(y)}(y)$ – похідна по нормалі $e^{(\alpha)}(y)$ до ∂G^m в точці $y \in \partial G^m$.

В розділі 2 розглядаються класи $V^2_\infty(\bar{G}^m)$ двічі диференційовних і $V^0_\infty(\bar{G}^m)$ неперервних строго випуклих функцій, які можуть не перетворюються в нуль на межі області.

О з н а ч е н н я 2.I.I. Якщо $\bar{G}^m$ – обмежена і випукла область в $\mathbb{R}^m$, $m > 1$, то $f \in V^2_\infty(\bar{G}^m)$, якщо f є неперервною і випуклою функцією на $\bar{G}^m$, $f \in W^2_\infty(\bar{G}^m)$ і існує $M_0 > 0$ таке, що для кожного одиничного вектора $e \in \mathbb{R}^m$, кожного відрізку $[x', x''] \subset \bar{G}^m$ такого, що $[x', x'']$ паралельний до e, майже для всіх $x \in [x', x'']$ виконується нерівність

$$f''_e(x) \geqslant M_0.$$

Одним з важливих результатів розділу 2 є наступна теорема.

Т е о р е м а 2.3.1. Якщо $\bar{G}^m$ – обмежена і випукла область в $\mathbb{R}^m$, $m > 1$, з гладкою межею, то для кожної функції $f \in V^2_\infty(\bar{G}^m)$ існує послідовність випуклих на G^m алгебраїчних многочленів $p_N(f) \in \mathcal{P}_N(\mathbb{R}^m)$, $N \in \mathbb{N}^1$, таких, що

$$\| f - p_N(f) \|_{C(\bar{G}^m)} \leqslant M N^{-1},$$

де M не залежить від N і має вигляд

$$M = \mu \left(\| f \|_{W^2_\infty(\bar{G}^m)} + \left(\sup_{e \in \mathbb{R}^m, |e|=1} \| f'_e \|_{C(\bar{G}^m)} \right)^2 M_0^{-1} \right),$$

де $\mu = \mu(\bar{G}^m) > 0$ не залежить від f, а M_0 – стала, яка входить до означення класу $V^2_\infty(\bar{G}^m)$.

На базі цієї теореми, за рахунок зглажування функцій $f \in V^0_\infty(\bar{G}^m)$, які, взагалі кажучи, не є диференційовними, доводиться наступна теорема, яка є основним результатом розділу 2.

Т е о р е м а 2.3.2. Якщо $\bar{G}^m$ – обмежена і випукла область в $\mathbb{R}^m$, $m > 1$, з гладкою межею, то для кожної функції $f \in V^0_\infty(\bar{G}^m)$ існує послідовність випуклих на $\bar{G}^m$ алгебраїчних многочленів $p_N(f) \in \mathcal{P}_N(\mathbb{R}^m)$, $N \in \mathbb{N}^1$, таких, що

$$\| f - p_N(f) \|_{C(\bar{G}^m)} \leqslant M \left(\omega_2(f, N^{-1}, \bar{G}^m) + \omega_1^2(f, N^{-1}, \bar{G}^m) M_0^{-1} \right),$$

де $M > 0$ не залежить від N, M_0 і f, а M_0 – стала, яка входить до означення класу $V^0_\infty(\bar{G}^m)$.

Ключову роль для доведення цієї теореми відіграють дві наступні леми.

Л е м а 2.3.2. Якщо $\bar{G}^m$ – обмежена і випукла область в $\mathbb{R}^m$, $m > 1$, з гладкою межею, то для кожної функції $f \in V_\infty^2(\bar{G}^m)$ існує неперервна і випукла на R^m функція g така, що $g(x) = f(x)$, $x \in \bar{G}^m$, і для кожного одиничного вектора $e \in R^m$, кожного $x \in R^m$ такого, що $\rho(x, \bar{G}^m) \leqslant \rho(\bar{G}^m)$, і кожного λ: $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda(\bar{G}^m)$ виконується нерівність

$$|g(x - \lambda e) - 2g(x) + g(x + \lambda e)| \leqslant M\,(\lambda + \rho(x, \bar{G}^m))^2,$$

де M не залежить від x, e і λ, $\rho(x, G^m)$ - евклідова відстань від x до $\bar{G}^m$, і при цьому M має вигляд

$$M = \mu\,(\|f\|_{W_\infty^2(\bar{G}^m)} + (\sup_{e \in R^m, |e|=1} \|f'_e\|_{C(\bar{G}^m)})^2 M_0^{-1}),$$

де $\mu = \mu(\bar{G}^m) > 0$ не залежить від f, а M_0 - стала, яка входить до означення класу $V_\infty^2(\bar{G}^m)$.

Л е м а 2.3.3. Якщо $\bar{G}^m$, обмежена і випукла область в R^m, $m > 1$, з гладкою межею, то для кожної функції $f \in V_\infty^0(\bar{G}^m)$ і кожного δ: $0<\delta\leqslant \delta(\bar{G}^m)$ існує неперервна і випукла на R^m функція g_δ така, що

$$\|f - g_\delta\|_{C(\bar{G}^m)} \leqslant M\,(\omega_2(f, \delta, \bar{G}^m) + \omega_1^2(f, \delta, \bar{G}^m)\,M_0^{-1}),$$

і при цьому для кожного одиничного вектора $e \in R^m$, кожного $x \in \bar{G}^m$ і кожного λ: $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda(\bar{G}^m)$ виконується нерівність

$$|g_\delta(x-\lambda e)-2g_\delta(x)+g(x+\lambda e)| \leqslant M\,(\omega_2(f,\delta,\bar{G}^m) + \omega_1^2(f,\delta,\bar{G}^m)M_0^{-1})\delta^{-2}(\lambda+\delta)^2,$$

де $M > 0$ не залежить від x, λ, e, δ, M_0 і f, а M_0 - стала, яка входить до означення класу $V_\infty^0(\bar{G}^m)$.

Основні результати дисертації опубліковані в наступних роботах:

1. Будник В.Г. Коввыпуклое приближение на круге функций многочленами// Ряды Фурье: теория и приложения. - Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992. - С. 4 - 9.

2. Будник В.Г. О приближении выпуклых на круге функций выпуклы-

462074

ми алгебраическими многочленами// Тези міжнародної конференції, присвяченої пам'яті академіка М.П.Кравчука (Київ - Луцьк, 22 - 28 верес. 1992 р.). - Київ - Луцьк, 1992. - С. 25.

3. Будніх В.Г. Про ковипукле наближення неперервних на крузі функцій алгебраїчними многочлечами// Препринт 93.45, Київ: Ін-т математики АН України. - 1993. - 20 с.

Підп. до друку 5.05.94 . Формат 60×84/16. Папір друк. Офс.друк.
Ум. друк. арк. 0,7. Ум. фарбо-відб. 0,7. Обл.-вид.арк. 0,45.
Тираж 100 пр. Зам. 120 Безкоштовно.

Підготовлено і віддруковано в Інституті математики АН України
252601 Київ 4, ГСП, вул. Терещенківська, 3