АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ

На правах рукопису

ЩЕРБИНА Володимир Петрович

КВАЗІЛІНІЙНІ НЕДИВЕРГЕНТНІ ЕЛІПТИЧНІ РІВНЯННЯ

01.01.02 -диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Донецьк - 1994

Робота виконана в Інституті прикладної математики і механіки АН України

Науковий керівник:
академік АН України,
доктор фізико-математичних наук,
професор І.В. Скрипник

Офіційні опоненти:
доктор фізико-математичних наук,
професор А.Є. Шишков

кандидат фізико-математичних наук,
доцент Г.І.Данилюк

Провідна організація: Львівський державний університет

Захист відбудеться "25" травня 1994р. в 15⁰⁰ год. на засіданні спеціалізованої ради Д 06.01.01. при Інституті прикладної математики і механіки АН України за адресою: 340114, м.Донецьк-114, вул. Рози Люксембург, 74.

З дисертацією можна ознайомитися в науковій бібліотеці Інституту..

Автореферат розіслано "23" квітня 1994р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради
кандидат фізико-математичних наук А.І. Марковський

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Дисертаційна робота присвячена питанню розв'язності недивергентних еліптичних рівнянь, проблемі Ландесмана-Лазера і розв'язності операторних рівнянь з допомогою обертання векторного поля, до яких зводяться ці задачі.

Актуальність теми. Дослідження граничних задач для нелінійних диференціальних рівнянь знаходиться в центрі уваги інтересів фізиків, інженерів, механіків. Нелінійні рівняння з'являються в багатьох задачах сучасної фізики, техніки і тому в даний час є найбільш активно розроблюваною областю диференціальних рівнянь.

Питаннями розв'язності дивергентних рівнянь, які зводятся до відображень $T: X \to X^*$ (X^* спряжений простір до X), займалися багато авторів: Ю.А.Дубинський, Ф.Браудер, О.А.Ладиженська, Н.І. Уральцева, В.В. Петришин, Г.Мінті, І.В. Скрипник і інші. Спочатку, в основному, задачі розв'язувалися різними модефікаціями методу Галеркіна.

Топологічні методи спростили методи доведення. Топологічний підхід дозволяє, зокрема, включати граничні задачі в параметричне сімейство задач того ж типу і зводити дослідження граничних задач до вивчення більш простих задач і одержання простих апріорних оцінок. Основою топологічних методів є виділення класів відображень, для яких можна ввести поняття обертання векторного поля (еквівалентного поняттю степені відображення).

Детальну теорію векторних полів, які описують широкий клас еліптичних задач, побудував І.В. Скрипник. Це теорія для відображень $T: X \to X^*$. Для відображень T класу $T: X \to Y$ багато робіт є у Ф. Браудера і В.В.Петришина. Але в застосуваннях $Y = X$ або X^* або Y -гільбертовий простір, що значно спрощує ситуацію.

При розгляді відображень $T: X \to Y$ природньо виникає допоміжний оператор, який узагальнює дуальний оператор при вивченні відображень. Дуальний оператор досліджений багатьма авторами (Ф. Браудер, В.В. Вайнберг). Допоміжний оператор K при вивченні монотонних операторів використовувався різними авторами (Ф.Петришин, Ф. Браудер), але без його побудови і вивчення його властивостей. В зв'язку з цим метод побудови такого оператора, а також вивчення його властивостей є актуальним і, відповідно, результати, які одержуються з його допомогою, є сучасними.

Доведенням існування розв'язків для недивергентних рівнянь вищих порядків займалися Л.І. Сімонов, С.І. Похожаєв, А.В. Бабін. Результати дисертації узагальнюють їхні результати.

Проблема Ландесмана -Лазера для рівнянь виду $Au+Bu=f$, де A - лінійний оператор, а B -нелінійний, бере свій початок від їхньої першої роботи 1970 року. Ця проблема узагальнювалась різними авторами (С.Уільямс, Ж. Фрезе, Ж. Нечас, Л. Ніренберг, П.Гесс, С. Фучік). В.В.Петришин звів розгляд цієї задачі до вигляду $Au+Bu+\lambda Cu=f$ при $\lambda\to 0$ і розглянув її докладно в просторах Соболєва W_2^m. В дисертаційній роботі проблема Ландесмана -Лазера вивчається в просторах W_p^m $(p>n)$, тобто вивчаються нові класи операторів, які узагальнюють результати цього напрямку інших авторів.

Мета роботи полягає в доведенні існування розв'язків недивергентних еліптичних рівнянь, обчисленню індексу критичних точок, знаходженню критеріїв існування власних функцій і точок біфуркацій, дослідженню проблеми Ландесмана-Лазера в просторах Соболєва.

Методика дослідження. Дослідження, які проводяться в дисертаційній роботі, полягають в розвитку і застосуванні топологічних методів дослідження нелінійних рівнянь. Крайові задачі зводяться до операторних рівнянь, які належать до таких класів, для яких можна ввести поняття обертання векторного поля. На основі властивостей обертання векторного поля досліджуються операторні рівняння. Потім, відповідно, ці результати переформульовуються на еліптичні рівняння. Така схема вперше була застосована Ж.Лере і Ю.Шаудером, а потім суттєвий розвиток одержала в працях М.А.Красносельского і І.В.Скрипника.

Наукова новизна. В дисертаційній роботі одержані слідуючі нові результати:

- виділений клас операторів, які діють із одного банахового простору в інший банаховий простір, для яких можна ввести поняття топологічної характеристики-обертання векторного поля. З його допомогою досліджується клас відповідних операторних рівнянь;

-одержана формула індекса критичної точки оператора;
-побудований допоміжний оператор, узагальнюючий дуальний, який природньо виникає при вивченні монотонних операторів і вивчаються його властивості;
-доведені теореми існування розв'язків для недивергентних еліптичних рівнянь вищого порядку;
-досліджена проблема Ландесмана-Лазера для еліптичних рівнянь в просторах $W_p^m(G)$.

Практична цінність. Одержані в роботі результати мають теоретичне значення, на практиці вони можуть бути застосовані при розв'язанні задач фізики, механіки, техніки, теорії пружності, гідродинаміки.

Апробація роботи. Основні результати доповідались на наукових конференціях ДонДУ, на семінарі по нелінійному аналізу в ІПММ АН України, на міжнародній конференції " Нелінійні задачі математичної фізики " в Чернівцях 1989 року.

Публікації. По темі дисертації опубліковано 7 робіт, одна із них в співавторстві з І.В. Скрипником.

Структура дисертації. Робота складається із вступу, трьох глав, переліку літератури з 77 найменувань і містить в собі 100 сторінок машинописного тексту.

ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У вступі розглядається актуальність тематики, історія проблеми, предмет і метод дослідження, короткий зміст дисертації.

В першій главі розглядаються деміненеперервні обмежені оператори $T : X \to Y$ де X і Y -банахові простори. Для них вводиться поняття обертання векторного поля, використовуючи при цьому властивості допоміжного оператора $K : X \to Y^*$ і спеціальні повні системи в просторах X і Y^*. Розглядаються їх властивості, які необхідні для побудови теорії відображень.

В § 1.1 вводиться поняття обертання векторного поля.

Нехай $\mathcal{D}$ - обмежена область в X з границею S така, що перетин S з скінченомірним підпростором в X є поліедром. Припустимо, що оператор K має слідуючі властивості:

1. K -неперервний, тобто сильно збіжні послідовності переводить в сильно збіжні;
2. $K(0)=0$;
3. K - взаємнооднозначний;
4. для оператора K існують n - мірні підпростори в X і Y^* такі, що $K_n X_n \subset Y_n^*$ де K_n звуження оператора K на X_n.

Будемо говорити, що демінеперервний обмежений оператор задовільняє умові α), якщо для довільної послідовності $u_k \in S$, слабо збіжної до u_0 із

$$\lim_{k\to\infty} \langle Tu_k, Ku_k - Ku_0 \rangle \le 0$$

випливає, що u_k сильно збігається до u_0.

Будемо говорити, що цей оператор задовільняє умові α_0), якщо для довільної послідовності $u_k \in S$, слабо збіжної до u_0 із

$$Tu_k \longrightarrow 0, \quad \lim_{k\to\infty} \langle Tu_k, Ku_k \rangle \le 0$$

випливає сильна збіжність u_k до u_0.

Тут $\langle v,h \rangle$ значення функціоналу $h \in Y^*$ на елементі $v \in Y$.

Для операторів, які задовольняють умові α) або α_0) з допомогою кінечномірної апроксимації, вводиться поняття обертання векторного поля, і показується його стабілізація з ростом розмірностей апроксимуючих підпросторів.

Умови α), α_0), тісно зв'язані з умовами KS, KH, розглянуті В.В.Петришиним. Наші умови слабіші його. Оператор K взагалі нелінійний.

Така схема застосовувалась різними авторами (М.А.Красносельським, І.В.Скрипником) для більш простих випадків, і поки що немає достатньо повних реалізацій таких схем.

В § 1.2 доводяться звичайні властивості обертання поля, необхідні для того, щоб існували критичні точки оператора усередині області $\mathcal{D}$ (критичною точкою оператора T називають точку u_0 таку, що $Tu_0=0$). Зокрема доводиться теорема, аналогічна теоремі Хопфа: із рівності обертання розглянутих полів без критичних точок на границі області випливає їх гомотопність.

В § 1.3 доводиться

Теорема 1.4. Якщо рівняння $Tu=0$ має тільки нульовий розв'язок, то ноль є ізольованою критичною точкою поля Tu , і індекс нуля рівний $(-1)^{\nu}$, де ν - сума кратностей характеристичних чисел оператора $L=(T'+\Gamma)^{-1}\Gamma$, які лежать в інтервалі (0,1).

Тут T' -похідна Фреше оператора T в нулі, $\Gamma: X \to Y$ -лінійний цілком неперервний оператор такий, що виконуються слідуючі умови:

1. $\langle (T'+\Gamma)u, Ku \rangle > 0$ при $u \neq 0$;

2. визначений і цілком неперервний оператор L;

3. при достатньо малому ε слабе замикання множини

$$\sigma_\varepsilon = \left\{ v = \frac{u}{\|u\|} : \ tTu + (1-t)T'u = 0, \ 0 < \|u\| < \varepsilon, \ 0 \le t \le 1 \right\}$$

не містить нуля.

Оператор T' може і не задовільняти умові α), а T задовільняти.

В § 1.4 показується існування оператора K, який діє із простору $W_p^m(G)$ в простір $L_{p'}(G)$ ($p'=p/(p-1)$, $p>1$) і має властивості, які вимагалися в § 1.1.

Побудова оператора K проводиться слідуючим чином. Область G n - мірного евклідового простору особливим способом розбивається послідовно на вимірні множини, які не перетинаються. По мірах цих множин в просторі $L_p(G)$ будується система базисних векторів $\varphi_k(x)$ типу Хаара, яка є ортонормована. По цьому базису з допомогою лінійного еліптичного оператора

$$L_1 = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

з граничними умовами

$$\sum_{|\alpha| \le m_j} b_{j,\alpha}(x) D^\alpha u \Big|_S = 0$$

рівнянням

$$(L_1 + \Gamma_1) w_k(x) = \varphi_k(x)$$

визначається спеціальна система $(w_k(x))$ в просторі $W_{p,B}^{2m}(G)$, де Γ_1 -такий оператор, що $L_1+\Gamma_1$ встановлює ізоморфізм між просторами $W_{p,B}^{2m}(G)$ і $L_p(G)$. Тут $W_{p,B}^{2m}(G)$ -підпростір простору Соболєва з зазначеними вище граничними умовами.

Тепер оператор $K: W_p^{2m}(G) \to L_{p'}(G)$ визначається слідуючим чином

$$Ku = |(L_1+\Gamma_1)u|^{p-2}(L_1+\Gamma_1)u$$

і перевіряються його властивості.

Показується, що так побудований оператор не є слабо неперервним, тобто слабо збіжні послідовності не обов'язково переводить в слабо збіжні, що суттєво ускладнює теорію монотонних операторів, яка застосовується в диференціальних рівняннях. При $p = 2$ він буде слабо неперервним, і тому результати в $W_2^m(G)$ одержуються набагато легше. Така ситуація виникає і при застосуванні дуального оператора.

В другій главі розглядаються питання існування розв'язків у недивергентних еліптичних рівнянь вищих порядків, а також у операторних рівнянь, до яких зводяться ці задачі.

В § 2.1 для розглянутих в першій главі операторів, показується існування розв'язків у відповідних операторних рівнянь, які мають вигляд

$$Tu = f\ ,$$

коли оператор T -коерцитивний, або непарний. Ці теореми узагальнюють відомі теореми Ф. Браудера, В.В. Петришина, С.І.Похожаєва і інших авторів.

В § 2.2 узагальнюються результати І.В. Скрипника про існування власних функцій, точок розгалуження, точок біфуркацій для операторних рівнянь з операторами, які діють із банахового простору в спряжений простір на класи рівнянь з операторами, розглянутими в першій главі.

В § 2.3 дається застосування теореми 1.4 першої глави до обчислення індексу критичної точки (нуля) квазілінійного еліптичного рівняння.

В обмеженій області n - мірного евклідового простору R^n з достатньо гладкою границею розглядається нелінійний еліптичний оператор

$$Tu = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x, u, \dots, D^{2m-1}u) D^\alpha u + a(x, u, \dots, D^{2m-1}u).$$

Будемо припускати, що виконуються слідуючі умови:

1. При достатньо малому додатньому ε функції $a_\alpha(x, \xi_0, \dots, \xi_{2m-1})$ і $a(x, \xi_0, \dots, \xi_{2m-1})$ неперервно диференційовні по ξ при $x \in G$ і при $|\xi_0| + \dots + |\xi_{2m-1}| < \varepsilon$ неперервні по x.

2. З деякою додатньою постійною d виконується нерівність

$$\sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha^{(0)}(x) \xi^\alpha \geq d|\xi|^{2m}, \text{ де } a_\alpha^{(0)}(x) = a_\alpha(x, 0, \dots, 0).$$

На границі S області задаються m граничних лінійних операторів з неперервними по Гельдеру коефіцієнтами.

Нехай $p>n$ і $W_{p,B}^{2m}(G)$ -підпростір простору Соболєва, утворений функціями, які задовільняють умовам

$B_j u(x)=0$ при $u \in S$.

Припустимо, що існує цілком неперервний оператор Γ_1 такий, що $L_1+\Gamma_1$ встановлює ізоморфізм між просторами $W_{p,B}^{2m}(G)$ і $L_p(G)$

Тут
$$L_1 u = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha^{(0)}(x) D^\alpha u .$$

Будемо припускати, що 0 - ізольована критична точка оператора T . Тут використовувались загально прийняті позначення.

П(виконанні умов 1.,2 доведена слідуюча

Теорема 2.15. Якщо ноль -невироджена критична точка оператора T , то тоді індекс нуля оператора T рівний $(-1)^\nu$, де ν - сума кратностей характеристичних чисел цілком неперервного оп ратора $L=(T'+\Gamma)^{-1}\Gamma : W_{p,B}^{2m} \to W_p^{2m}$, які лежать в інтервалі (0,1).

В § 2.4 розглядаються дві еліптичні задачі частково дивергентного виду. Існування розв'язків у таких задач при умові їх коерцитивності розглядав А.С.Сімонов. Наш метод дозволяє легко, при умові виконання природних обмежень на коефіцієнти, одержати і інші теореми існування, зокрема при непарних коефіцієнтах по u . Зокрема мають місце слідуючі теореми.

Теорема 2.17. Припустимо , що задача
$$\sum_{|\alpha|\le m-k} (-1)^\alpha D^\alpha A_\alpha(x,u,\dots,D^{m+k}u) = f(x),$$
$$u|_S = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = \dots = \frac{\partial^{k-1} u}{\partial n^{k-1}}\Big|_S = \Delta^k u\Big|_S = \dots = \frac{\partial \Delta^k u}{\partial n^{k-m-1}}\Big|_S = 0$$

(тут $\frac{\partial}{\partial n}$ -похідна по нормалі до границі S , Δ^k -полігармонічний оператор порядка $2k$) має природні обмеження на коефіцієнти, які гарантують обмеженість, демінеперервність, виконання умови α) для оператора, який виникає при її зведенні до операторного рівняння (Похожаєв С.І., Сімонов А.С., Скрипник І.В.) і включена в параметричне сімейство задач того ж виду
$$\sum_{|\alpha|\le m-k} (-1)^\alpha D^\alpha A_\alpha(t,x,\dots,D^{m+k}u) = f(t,x)$$
де $A_\alpha(1,x,\xi,\xi) = A_\alpha(x,\xi,\xi)$, $f(1,x)=f(x)$.

Тоді якщо для любого розв'язку $u(t,x)$ має місце оцінка

$$\|u(t,x)\|_{W_p^{m+k}(G)} < R \quad (R = const)$$

і обертання поля Tu на сфері $S_R(0) = \{u \in X : \|u\|_X = R\}$ відмінне від нуля, то існує хоч один розв'язок граничної задачі в просторі $W_p^{m+k}(G)$ для довільної функції $f(x) \in W_{p'}^{-m+k}(G)$.

Теорема 2.21. Припустимо, що коефіцієнти задачі

$$\sum (-1)^{\alpha} D^{\alpha} A_{\alpha}(x, u, \ldots, D^{m+k-1}u, D^{m-k}Lu) = f(x),$$

$$u|_S = \ldots = \frac{\partial^{k-1} u}{\partial n^{k-1}}\Big|_S = Lu|_S = \ldots = \frac{\partial^{m-k-1} Lu}{\partial n^{m-k-1}}\Big|_S = 0$$

(тут $Lu = \sum\limits_{|\alpha|=2k} a_{\alpha}(x) D^{\alpha} u$ – еліптичний оператор з гладкими коефіцієнтами порядку $2k$, $0 \le k \le m$) такі, що оператор T, який появляється при зведенні задачі стандартним методом до операторного рівняння є обмеженим, демінеперервним, і має місце відповідна додатність по старших похідних, то задача має розв'язок для довільної функції $f \in W_{p'}^{-m+k}(G)$ в просторі функцій $W_p^{m+k}(G)$, якщо функції $A_{\alpha}(x,q,S)$ непарні по q, S, і оператор T^{-1} -обмежений.

В § 2.5 розглядається задача

$$Au = \sum_{|\alpha|=2m} a_{\alpha}(x, D^{\gamma}u) D^{\alpha}u + a_0(x, D^{\beta}u) = f(x)$$

$$(x \in G),$$

$$\gamma_j(u) = D_n^j u\Big|_S = \varphi_j(x'),$$

$x' \in S$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$, де

$$u \in W_2^{2m}(G),\ f(x) \in L_2(G),\ \varphi_j(x') \in W_2^{2m-j-\frac{1}{2}}(S),$$

D_n^j - похідна порядку j по напрямку зовнішньої нормалі до границі S, G -обмежена область в R^n, для якої мають місце теореми вкладення Соболєва. На коефіцієнти накладаються природні умови.

При доведенні теорем існування основним є перевірка виконання умови α_0). Виконання умови α_0) слідує із існування для сімейства еліптичних операторів

$$T_v u = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha (x, v, \ldots, D^{2m-1} v) D^\alpha u$$

еліптичного оператора

$$\mathcal{M} u = \sum_{|\alpha| \le 2m} b_\alpha (x) D^\alpha u$$

з нескінчено диференційовними коефіцієнтами в G таких, що з деякими постійними C_1, C_2 виконується нерівність коерцитивності

$$\langle T_v u, \mathcal{M} u \rangle \geq C_1 \| u \|^2_{2m} - C_2 \| u \|^2_0 ,$$

$$u(x) \in W_2^{2m}(G) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^{m}(G).$$

В цьому випадку за оператор K беремо оператор $\mathcal{M}$.

Знову теореми існування розв'язків одержуються переформулюванням відповідних теорем для операторних рівнянь.

В третій главі розглядається проблема Ландесмана- Лазера, тобто напівлінійні рівняння, у яких лінійна частина має ненульове ядро.

В § 3.1 розглядається рівняння виду

$$Au + Bu = f \tag{1}$$

де A - лінійний фредгольмовий оператор нульового індексу, -нелінійний оператор такий, що $Bu = o(\|u\|)$ при $\|u\| \to \infty$, причому $T = A + B$ задовільняє умові α_0). T діє із банахового простору X в банаховий простір Y .

Згідно теорії лінійних операторів можна зробити слідуючі представлення

$X = Ker A + X_1$, $Y = R(A) + Y_1$, причому $\dim R(A)^\perp = \dim Ker A = \dim Y_1$, $R(A)^\perp = \{ \ell : \langle \ell, g \rangle = 0 \; \forall g \in R(A) \}$.

Тут $R(A)$ -область значення оператора A , $Ker A$ - ядро оператора A .

Припускаємо, що існують слідуючі допоміжні оператори M і H : M - лінійний оператор, який здійснює взаємнооднозначну відповідність між $Ker A$ і Y_1, H - лінійний оператор, який здійснює взаємнооднозначну відповідність між $Ker A$ і $R(A)^\perp$, причому для довільних $y \in Ker A \, (y \neq 0) \; \langle My, Hy \rangle > 0$.

Якщо $Ker A = 0$, то рівняння (1) має розв'язок для довільної функції $f \in Y$.

Якщо ж $Ker A \neq 0$, то має місце

Теорема 3.2. Якщо A - лінійний оператор нульового індекса, $Bu = o(\|u\|)$ при $\|u\| \to \infty$, $T = A + B$ замкнутий на довільній $B(0,r)$ (куля радіуса r з центром в нулі в просторі X) і задовільняє умові α_0), то рівняння (1) має розв'язок , якщо можна побудувати такий компактний оператор C , що одна із множин

$$\Delta^{\pm} = \{ u : Au + Bu \pm \delta Cu - f = 0, \delta > 0 \}$$

обмежена при $\delta \to 0$.

Із цієї теореми легко одержується слідуюча теорема, яка безпосередньо застосовує ься до диференціальних рівнянь в частинних похідних.

Теорема 3.3. Якщо A - лінійний оператор нуль(ого індекса, $Bu = o(\|u\|)$ при $\|u\| \to \infty$, $T = A + B$ замкнутий для довільної $B(0,r)$ і задовільняє умові α_0), то рівняння (1) має розв'язок, якщо виконується одна із умов

а) $\overline{\lim\limits_{k \to \infty}} \langle Bu_k, Hy \rangle > \langle f, Hy \rangle$

або

б) $\underline{\lim\limits_{k \to \infty}} \langle Bu_k, Hy \rangle < \langle f, Hy \rangle$

при $u_k \in X$, $\|u_k\| \to \infty$, $\frac{u_k}{\|u_k\|} \to y \in Ker A$, де H - оператор, введений вище..

Функції із простору X можна представляти різними способами через складові $Ker A$ і X_1 і відповідно можна змінювати формулювання теореми 3.3.

В заключних параграфах дається застосування теореми 3.3 до еліптичних рівнянь. З її допомогою одержується існування розв'язків еліптичних рівнянь в просторах Соболева $W_p^m(G)$ ($p > n$). Аналогічні результати в просторах $W_p^m(G)$, одержані в роботах Петришина В.В.

В § 3.2 розглядається задача

$$\Delta u(x) - g(x, u, \nabla u, \Delta u) + h(u) = f(x) \; (x \in G), \quad (2)$$
$$\partial u / \partial n = 0 \quad (x \in S)$$

в просторах $W_p^2(G)$. Доведена

Теорема 3.6. При виконанні відповідних умов для функцій g, h, задача (2) має розв'язок при довільній функції $f(x) \in L_p(G)$ в просторі W_p^2, якщо виконується одна із умов

$$\lim_{t \to +\infty} h(t) = +\infty \quad \text{або} \quad \lim_{t \to -\infty} h(t) = -\infty .$$

В § 3.3 розглядається еліптична задача

$$Au + g(x,u) = f(x) \ (x \in G, \ A = \sum_{|\alpha| \le 2m} a_\alpha(x) \mathcal{D}^\alpha), \quad (3)$$
$$\sum_{|\beta| \le m_j} b_j(x) \mathcal{D}^\beta u \Big|_S = 0$$

де $a_\alpha(x)$, $b_j(x)$, $f(x)$ вимірні функції, а $g(x,t)$ - дійсна вимірна по x і неперервна по t функція така, що

$$|g(x,t)| < a(x) \quad (a(x) \in L_p(G))$$

причому існують границі

$$\lim_{t \to \pm\infty} g(x,t) = g_\pm(x)$$

Позначимо

$$G^+ y(x) = \{x \in G : y(x) > 0\}, \ G^- y(x) = \{x \in G : y(x) < 0\}.$$

Має місце

Теорема 3.7. Задача (3) має розв'язок в W_p^{2m} при існуванні для оператора A апріорної оцінки в L_p і виконанні одної із умов

а) $$\int_{G^+(y)} g_+(x) H(y) dx + \int_{G^-(y)} g_-(x) H(y) dx > \int_G f(x) H(y) dx$$

або

б) $$\int_{G^+(y)} g_+(x) H(y) dx + \int_{G^-(y)} g_-(x) H(y) dx < \int_G f(x) H(y) dx$$

де H -оператор, введений в § 3.1 і

$$y = \lim_{k \to \infty} \frac{u_k}{\|u_k\|_{W_{p,B}^{2m}}}, \ y \in \operatorname{Ker} A$$, причому A - фредгольмовий.

В § 3.4 розглядається еліптична задача

$$Au + b(x, u, \dots, \mathcal{D}^{2m-1} u) = f(x) \ (x \in G),$$
$$B_j u = 0 \ (j = 1, \dots, m, \ x \in S),$$
$$A = \sum_{|\alpha| \le 2m} a_\alpha(x) \mathcal{D}^\alpha, \quad B_j = \sum_{|\beta| \le m_j} b_\beta(x) \mathcal{D}^\beta$$

в області G з достатньо гладкою границею S. Припустимо, що

$$b_\beta(x), a_\alpha(x) \in L_\infty(G), \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x)\xi^\alpha \geq d|\xi|^{2m}$$

і крайова задача

$$Au=0, \quad B_j u|_S = 0$$

є фредгольмовою нульового індекса, причому $\operatorname{Ker} A \neq \{0\}$.
Відносно функції b припустимо, що виконані умови:

$$1. \ |b(x,\xi)| \leq C\Big(\sum_{|\beta|\leq 2m-1} |\xi_\beta|^\sigma + K(x)\Big)$$

де $\sigma \in [0,1)$, $K(x) \in L_p(G)$ $(p>n)$.

2. При $x \in G$, $|\xi^{(n)}|=1$ існує рівномірна по x границя

$$\lim_{\tau_n \to \infty} \frac{b(x, \tau_n \xi^{(n)})}{\tau_n^\sigma} = h(x,\xi),$$

причому

$$|h(x,\xi)| < h(x) \in L_{p/p-1-\sigma}$$

При допущеннях 1., 2 існує функціонал

$$g(y) = \int h\Big(x, \frac{\xi(y)}{|\xi(y)|}\Big) |\xi(y)|^\sigma H(y)\,dx.$$

Має місце

Теорема 3.8. Задача (3) має розв'язок в $W^{2m}_{p,B}(G)$, якщо виконується одна із умов:

1) $\sigma \in [0,1)$, $g(y)>0$, $f=0$;
2) $\sigma \in (0,1)$, $g(y)>0$;
3) $\sigma=0$, $g(y) > \langle f, Hy\rangle$.

Основні результати, які виносяться на захист:

1. Виділення класу операторів, які діють із одного банахового простору в інший банаховий простір, і введення поняття обертання векторного поля на границі деякої області, відмінність від нуля якого гарантує існування в області критичної точки для оператора, тобто існування розв'язку у відповідного рівняння.
2. Побудова допоміжного оператора $K : X \to Y^*$, який виникає при

дослідженні монотонних операторів в банахових просторах. Дослідження його властивостей, які необхідні при вивченні недивергентних еліптичних рівнянь.

3. Приклади застосування операторної теорії до встановлення існування розв'язків у недивергентних еліптичних рівнянь вищих порядків.

4. Застосування топологічного методу для дослідження проблеми Ландесмана-Лазера для еліптичних рівнянь вищого порядку із слабкою нелінійністю в просторах Соболєва.

Основні результати дисертації опубліковані в слідуючих роботах:

1. Щербина В.П. О вращении векторного поля для одного класса операторов // Математическая физика.- Киев: Наук. думка.- 1974.- Вып. 2.- С.190-193.
2. Щербина В. П. Вычисление индекса критической точки // Математическая физика.- Киев: Наук. думка.- 1975.- Вып. 18.- С.159-162.
3. Скрыпник И.В., Щербина В.П. О бифуркации решений граничных задач для недивергентных уравнений // Математическая физика.- Киев: Наук. думка.- 1975.- Вып. 20.- С.99- 103.
4. Щербина В.П. Частичная регулярность решений одного класса недивергентных квазилинейных эллиптических уравнений // Математическая физика .- Киев: Наук. думка.- 1977.- Вып. 22.-С.112-115.
5. Щербина В.П. Краевая задача Неймана в резонансном случае // Нелинейные граничные задачи.- Киев: Наук. думка. - 1990.- №2.- С. 113-117.
6. Щербина В. П. Полулинейные эллиптические уравнения с необратимой линейной частью // Мат. физика и нел. мех. Киев: Наук думка.- 1990.- №14.- С.80-82.
7. Щербина В.П. Возмущение необратимых линейных граничных задач // Нелинейные граничные задачи. Киев: Наук. думка.- 1991.- №3.- С. 108-112.

Щербина

Подписано к печати 14.04.94 Заказ 319 тираж 120
Изд. уч. изд. Способ печати офсетный.
Донецкая городская типография