КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ім.Тараса Шевченка

на правах рукопису

ТРИГУБ СВІТЛАНА ГРИГОРІВНА

ЗБІЖНІСТЬ ВИПАДКОВИХ РЯДІВ У НОРМАХ ПРОСТОРІВ ОРЛІЧА

01.01.05 - теорія ймовірностей та
математична статистика

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття вченого ступеня
кандидата фізико-математичних наук

КИЇВ - 1994

Дисертація є рукопис.

Роботу виконано на кафедрі теорії ймовірностей та математичної статистики механіко-математичного факультету **Київського університету** ім.**Тараса Шевченка**.

Науковий керівник - доктор фізико-математичних наук, професор **Ю.В.Козаченко**.

Офіційні опоненти - доктор технічних наук, професор **Ю.Д.Попов**; кандидат фізико-математичних наук, **І.М.Зелепугіна**.

Провідна установа: **інститут кібернетики АН України.**

Захист відбудеться "23" травня 1994 року о _____ год. на засіданні спеціалізованої ради **К 01.01.14** у Київському університеті ім.Тараса Шевченка за адресою:

252127 м.Київ, просп. акад. Глушкова, 6, механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Київського університету ім.Тараса Шевченка (вул. Володимирська, 58).

Автореферат розіслано "20" квітня 1994 р.

Вчений секретар спеціалізованої ради **Курченко О.О.**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ.

<u>**Актуальність теми.**</u> Вивчення збіжності стохастичних рядів у різних функціональних просторах є актуальним напрямом розвитку теорії випадкових процесів. Основи цього напряму сучасної теорії випадкових процесів були створені у роботах **Р.Пелі, А.Зігмунда, Н.Вінера**. Серед робіт, присвячених цьому напряму, необхідно відмітити роботи **М.Й.Ядренка, Ю.В.Козаченка, В.В.Булдигіна, М.Талаграна**. Різні властивості випадкових рядів Фур'є досліджувались у роботах **Кахана Ж., Джейна Н., Маркуса М.**, а також у роботі **Іто К.** та **Нісіо М.**

У 60-ті роки у роботах **Булдигіна В.В.** була створена загальна теорія збіжності з імовірністю одиниця випадкових рядів з незалежними елементами зі значеннями у топологічних просторах.

У 70-ті роки у роботах **В.В.Булдигіна**, **Ю.В.Козаченка** вивчалась збіжність за ймовірністю у різних функціональних просторах випадкових рядів із залежними членами.

При розв'язанні багатьох задач теорії випадкових процесів з'являється необхідність знайти швидкість збіжності випадкових рядів у різних нормах. Але, незважаючи на велику кількість робіт, присвячених випадковим рядам, особлива увага приділялась умовам та оцінкам швидкості збіжності таких рядів у рівномірній метриці. Пізніше з'явились роботи **Ю.В.Козаченка**, **І.М.Зелепугіної** та **В.Н.Рязанцевої**, в яких досліджувались умови збіжності випадкових рядів у нормах деяких просторів Орліча. У роботах **Ю.В.Козаченка**, **І.М.Зелепугіної**, **В.Н.Рязанцевої** вивчалися умови збіжності та оцінки швидкості збіжності гауссових випадкових рядів у нормах деяких просторів Орліча, а також оцінки точності побудови моделей випадкових полів у просторах L_p.

Дисертаційна робота присвячена вивченню умов збіжності випадкових рядів, які належать до експоненціальних просторів Орліча, у нормах просторів Орліча. У роботі було розглянуто більш широкий клас просторів Орліча, ніж у попередніх роботах, та у більшості випадків покращені вже відомі оцінки. Крім того, при більш обмежуючих умовах одержані більш точні оцінки швидкості збіжності випадкових рядів у просторах Орліча.

Мета роботи. Мета дисертації полягає у вивченні умов збіжності та оцінок швидкості збіжності випадкових рядів, які належать до експоненціальних просторів Орліча, у просторах Орліча, та у застосуванні одержаних результатів при розв'язанні задач математичної фізики з випадковими початковими умовами та при побудові моделей випадкових процесів, які належать до просторів Орліча.

Методика досліджень, яка використана у роботі, базується на методах теорії випадкових процесів та теорії просторів Орліча.

Наукова новизна. В дисертації містяться такі нові результати:

- одержані умови збіжності та оцінки швидкості збіжності строго субгауссових випадкових рядів у нормі простору L_p;
- знайдені умови збіжності та оцінки швидкості збіжності випадкових рядів, які належать до експоненціальних просторів Орліча,у нормах просторів Орліча;
- одержані умови, за якими узагальнений розв'язок задачі математичної фізики з випадковими початковими умовами належить до простору Соболева;
- побудовані моделі випадкових процесів, що відтворюють задані з певною точністю у нормах просторів Орліча.

Практична і теоретична цінність. Загалом результати дисертації носять теоретичний характер і можуть бути застосовані у різних розділах теорії випадкових процесів, наприклад, при дослідженні розподілу числа виходів випадкових процесів за фіксований рівень, при дослідженні диференціальних рівнянь у частинних похідних з випадковими крайовими умовами, при побудові моделей випадкових процесів.

Апробація роботи. Результати дисертації доповідались на конференції молодих вчених Київського університету ім.Т.Г.Шевченка (Київ,1990), на другій Донецькій конференції (Донецьк,1990),на науково-технічній конференції пам'яті академіка М.П.Кравчука (Київський політехнічний інститут, 1992).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані у роботах [1-5].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, трьох розділів, що містять загалом 8 параграфів, та переліку літератури, який налічує 56 найменувань. Обсяг роботи 118 сторінок машинописного тексту.

ЗМІСТ РОБОТИ.

У вступі обгрунтовується актуальність теми дисертації, дається огляд найбільш близьких до цієї теми результатів та коротко викладено зміст дисертації.

Перший розділ присвячений вивченню збіжності строго субгауссових випадкових рядів у нормі простору L_p.

В §1 наведені необхідні відомості про простір L_p і простір строго субгауссових випадкових величин.

Означення 1.3. *Будемо говорити, що простір строго субгауссових випадкових величин - це сукупність випадкових величин* $\{\xi(\omega)\}$, *для кожної з яких* $\mathrm{M}\xi = 0$ *та для усіх* $\lambda \in \mathbf{R}$ *виконується нерівність*

$$\mathrm{M}\exp\{\lambda\xi\} \le \exp\left\{\frac{\lambda^2 \mathrm{M}\xi^2}{2}\right\}.$$

Означення 1.4. *Випадковий вектор* $\bar{\xi} \in \mathbf{R}^n$ *назвемо строго субгауссовим, якщо* $\mathrm{M}\bar{\xi} = 0$ *і для будь-якого* $\vec{u} \in \mathbf{R}^n$ *виконується нерівність*

$$\mathrm{M}\exp\{(\bar{u},\bar{\xi})\} \le \exp\left\{\frac{1}{2}(B\bar{u},\bar{u})\right\},$$

де B *-коваріаційна матриця вектора* $\bar{\xi}$.

У цьому випадку іноді кажуть, що компоненти вектора $\bar{\xi}$*-сумісно строго субгауссові випадкові величини.*

Означення 1.5. *Випадкове поле* $\xi(\bar{t}), \bar{t} \in \mathbf{R}^n$ *назвемо строго субгауссовим (сумісно строго субгауссовим), якщо для будь-якого набору* $\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_n \in \mathbf{R}^n, n \geq 1$, *вектор* $\left(\xi(\bar{t}_1), \ldots, \xi(\bar{t}_n)\right)$ *є строго субгауссовим.*

У §2 знайдена оцінка розподілу норми строго субгауссових випадкових процесів у просторі L_p.

Означення 2.1. *Нехай* $c(\bar{t}')$, *де* $\bar{t}' = (t_1, \ldots, t_m) \in [0,\infty)^m$ *- неперервна функція така, що* $\left|c(\bar{t}')\right| \leq 1$ *і*

$$\int_{[0,\infty)^m} c(\bar{t}')d\bar{t}' < 1.$$

Будемо говорити, що така функція $c(\bar{t}'), \bar{t}' \in [0,\infty)^m$ *задовольняє умові* Z.

Позначимо $Q = [0,\mathrm{T}]^{n-m} \times [0,\infty)^m$.

Теорема 2.1. *Нехай* $\xi(\bar{t})$ *- строго субгауссове випадкове поле,* $\mathrm{M}\xi(\bar{t}) = 0$ *і* $\sigma^2 = \sup\limits_{\bar{t}} \mathrm{M}\xi^2(\bar{t}), \bar{t} \in Q$. *Нехай функція* $c(\bar{t}'), \bar{t}' \in [0,\infty)^m$ *задовольняє умові* Z.

Тоді випадкове поле $c(\bar{t}')\,\xi(\bar{t})$ *з імовірністю 1 належить до простору* $L_p(Q)$ *і вірна нерівність*

$$\mathrm{P}\left\{\left\|\xi(\bar{t})\right\|_p > x\right\} \leq 2\exp\left\{\frac{-x^2}{2T^{\frac{2(n-m)}{p}}\sigma^2}\right\} + \exp\{p\}\exp\left\{\frac{-x^2}{T^{\frac{2(n-m)}{p}}\sigma^2}\right\}.$$

Але треба відмітити, що, накладаючи більш сильні обмеження, можна отримати більш точні оцінки для розподілу норми. Це було зроблено у §3, де були знайдені умови збіжності та оцінки швидкості збіжності за ймовірністю у нормі простору L_p строго субгауссових випадкових рядів вигляду

$$S(\bar{t}) = c(\bar{t}')\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\varphi_k(\bar{t}) \qquad \textbf{(1)},$$

де ξ_k -сумісно строго субгауссові випадкові величини, $\varphi_k(\bar{t}), k=\overline{1,\infty}$ -послідовність функцій з простору L_p, а функція $c(\bar{t}'),\ \bar{t}' \in [0,\infty)^m$ задовольняє умові Z.

***<u>Означення 3.1.</u>* Будемо говорити,що послідовність функцій $\left\{f_k(\bar{t}), \bar{t}\in Q, k=\overline{1,\infty}\right\}$ належить до класу $\mathbf{D}$, якщо існує така послідовність $\{c_n, n\ge 1\}$, $0 < c_n \le c_{n+1}$, що для будь-якої числової послідовності $\left\{q_k, k=\overline{1,\infty}\right\}$ виконується нерівність**

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} q_k f_k(\bar{t})\right\|_p \le c_n\left\|\sum_{k=1}^{n} q_k f_k(\bar{t})\right\|_2 \qquad \textbf{(2)}$$

Нехай $S_m^{\infty}(\bar{t}) = c(\bar{t}')\sum_{k=m}^{\infty}\xi_k\varphi_k(\bar{t})$.

***<u>Теорема 3.1.</u>* Нехай існує монотонно неспадна послідовність $\bar{a} = \{a_k, k\ge 1\}, a_k > 0, a_k\to\infty, k\to\infty$, для якої виконується умова**

$$\sum_{k=m}^{\infty} c_k \sum_{i=m}^{k}\sum_{j=m}^{k} a_i a_j \,\mathrm{M}\,\xi_i\xi_j \int_Q c^2(\bar{t}')\varphi_i(\bar{t})\varphi_j(\bar{t})d\bar{t}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right) < \infty$$

Тоді ряд* (1) *збігається за ймовірністю у нормі простору* $L_p(Q)$, *субгауссове випадкове поле* $S(\bar{t})$ *належить до

простору $L_p(Q)$, *і при* $z > 4e^{-1}\delta_m(\bar{a})$ *виконується нерівність*

$$\mathrm{P}\left\{\left\|S_m^{\infty}(\bar{t})\right\|_p > z\right\} \le \exp\left\{-\frac{\left(z - 4e^{-1}\delta_m(\bar{a})\right)^2}{72e^{-1}\left(\delta_m(\bar{a})\right)^2}\right\},$$

де

$$\delta_m(\bar{a}) = \sum_{k=m}^{\infty} c_k \left(\sum_{i=m}^{k}\sum_{j=m}^{k} a_i a_j \,\mathrm{M}\,\xi_i \xi_j \int_Q c^2(\bar{t})\varphi_i(\bar{t})\varphi_j(\bar{t})d\bar{t}\right)^{\frac{1}{2}} \left(a_k^{-1} - a_{k+1}^{-1}\right),$$

c_k *- коефіцієнти з нерівності Бернштейна* **(2)**.

Якщо випадкові величини ξ_k *незалежні, то ряд* **(1)** *збігається з імовірністю 1 у нормі простору* $L_p(Q)$.

Розділ другий присвячений вивченню збіжності випадкових рядів, які належать до простору Орліча, у нормах просторів Орліча. В §4 наведені необхідні відомості про простір Орліча.

<u>*Означення 4.1.*</u> N*-функцією Орліча називається неперервна парна опукла функція* $\mathrm{U}(x), x \in \mathbf{R}$, *така що* $\mathrm{U}(x) > 0$ *при* $x \neq 0, \mathrm{U}(0) = 0$ *і*

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{U}(x)x^{-1} = \infty, \quad \lim_{x\to 0} \mathrm{U}(x)x^{-1} = 0.$$

<u>*Означення 4.7.*</u> *Будемо говорити, що* $L_U(\Omega)$ *- це породжений деякою* N*-функцією Орліча* $\mathrm{U}(x)$ *простір Орліча випадкових величин* ξ *таких, що для деякої константи* $r_\xi > 0$:

$$\mathrm{MU}\left(\frac{\xi}{r_\xi}\right) < \infty.$$

Означення 4.8. *Будемо говорити, що* $L_U(Q)$, *де* $Q=[0,T]$ *- це породжений деякою N–функцією Орліча* $U(x)$ *простір Орліча вимірних функцій* $x(t), t \in Q$, *таких, що для деякої константи* r_x : $\int_Q U(x(t)/r_x)dt < \infty$.

Нехай (Ω, F, P) - стандартний ймовірностний простір; $u(x)=\exp\{\varphi(x)\}-1$ -деяка N-функція Орліча; $L_U(\Omega)$ простір Орліча випадкових величин, що породжується N-функцією $u(x)$; $L_U(Q)$ - функціональний простір Орліча, що породжується функцією $u(x)$.

Розглядається випадковий ряд вигляду:

$$R(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k f_k(t) \tag{3}$$

де ξ_k - випадкові величини з простору Орліча, $f_k(t), t \in Q=[0,T]$ - послідовність функцій з $L_u(Q)$.

Далі вивчаються два випадки:

1) $\varphi(x)$ є функцією Орліча,
2) $\varphi(x)$ не є функцією Орліча.

У §5 знайдені оцінки швидкості збіжності випадкових рядів **(3)** у нормі простору $L_U(Q)$у випадку, коли $\varphi(x)$ є функцією Орліча.

У просторі $L_u(\Omega)$ розглянемо норму Люксембурга:

$$\|\xi\|=\inf\left\{r>0: \mathrm{M}\exp\varphi\left(\frac{\xi}{r}\right)<2\right\} \tag{4}$$

У просторі $L_u(Q)$ розглянемо норму

$$\|\xi(t)\|_u = \inf\left\{ r > 0 : \int_0^T \exp\left\{ \varphi\left(\frac{\xi(t)}{r} \right) \right\} dt < 2 \right\} \tag{5}$$

Позначимо $\|\xi(t)\| = \sigma(t)$.

Означення 5.1. *Будемо говорити, що послідовність функцій* $\left\{ f_k(t), t \in Q, k = \overline{1,\infty} \right\}$ *з* $L_u(Q)$ *належить до класу* $B(U,V)$, *якщо існує така послідовність* $\{d_n, n \geq 1\}$, $0 < d_n \leq d_{n+1}$, *що для будь-якої числової послідовності* $\left\{ q_k, k = \overline{1,\infty} \right\}$ *виконується нерівність*

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} q_k f_k(t) \right\|_U \leq d_n \left\| \sum_{k=1}^{n} q_k f_k(t) \right\|_V \tag{6}$$

Нехай $R(t)$ - випадковий процес з простору Орліча, який може бути зображенийй у вигляді ряду **(3)**. Нехай

$$R_m^n(\bar{a},t) = \sum_{k=m}^{n} a_k \xi_k f_k(t), \qquad R_m^\infty(t) = \sum_{k=m}^{\infty} \xi_k f_k(t).$$

Нехай $u^*(y), y \in \mathbf{R}$ - перетворення Юнга-Фенхеля функції $u(y)$ і позначимо $\tilde{u}(y) = \ln 2 / r(T/y)$.

Теорема 5.1. *Нехай* $R(t), t \in Q$ *- випадковий процес, який може бути зображений у вигляді ряду* **(3)**. *Нехай* $L_u(\Omega)$*-простір Орліча випадкових величин, що породжується* N*-функцією* $u(x) = \exp\{\varphi(x)\} - 1$, $L_u(Q)$ *- функціональний простір Орліча. Нехай* $u_2(x)$ *-* N *-функція Орліча така, що* $u(x)$ *підпорядкована функції* $u_2(x)$. *Якщо існує* N *-функція* $u_1(x)$ $(u_1(x) \sim u_2(x))$, *така, що функції* $u_1\left(\sqrt{x}\right)$ *і*

$$K(x) = u^{(-1)}(u_1(x)) = \varphi^{(-1)}(\ln(u_1(x)+1))$$

опуклі, де функція $\varphi(x)$ *задовольняє умові*

$$\varphi(xy) \le r(x)\varphi(y),$$

де $r(x)$ *- деяка монотонно неспадна опукла функція, існує монотонно неспадна послідовність* $\bar{a} = \{a_k, k \ge 1\}$, $a_k > 0$, $a_k \to \infty, k \to \infty$, *для якої виконується умова:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k \sigma_1^k \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) < \infty,$$

де $\sigma_m^k = \sup\limits_{t \in Q} \left\| R_m^k(\bar{a}, t) \right\|$, $f_k(t), k = \overline{1,\infty}, t \in Q$ *- послідовність функцій з простору Орліча, яка належить до класу* $\mathrm{B}(u, u_1)$, *а* d_k *- коефіцієнти з нерівності Бернштейна* **(6)**, *а також для будь-якого* $y \in \mathbf{R}$ *функція* $\tilde{u}(y)$ *є* N*-функцією Орліча, то ряд* **(3)** *збігається за ймовірністю у нормі простору* $L_{u_2}(Q)$, *випадковий процес* $R(t)$ *з імовірністю 1 належить до* $L_{u_2}(Q)$, *і при*

$$z > \max\left[\frac{\mathrm{T} \sum\limits_{k=m}^{\infty} d_k \sigma_m^k \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right)}{r^{(-1)}\left(\frac{2c \ln 2}{1+2c} \right)}, p\left(\tilde{u}^{*(-1)}(1) \sum_{k=m}^{\infty} d_k \sigma_m^k \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) \right) \right]$$

виконується нерівність:

$$\mathrm{P}\left\{ \left\| R_m^{\infty}(t) \right\|_u > z \sum_{k=m}^{\infty} d_k \sigma_m^k \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) \right\} \le$$

$$\le 2c \cdot c_u e^2 \tilde{u}(z) \tilde{u}^*\left(p^{(-1)}(z) \right) \exp\{-\tilde{u}(z)\},$$

де $p(x)$ - неперервна справа та монотонно неспадна функція, яка визначається виразом:

$$\tilde{u}^*(y) = \int_0^{|y|} p(u)du,$$

а C, C_u - деякі константи.

Якщо випадкові величини ξ_k незалежні, то ряд **(3)** *збігається з імовірністю 1 у нормі простору $L_{u_2}(Q)$.*

У §6 досліджується швидкість збіжності випадкових рядів, які належать до просторів Орліча, у нормі простору $L_u(Q)$ у випадку, коли $\varphi(x)$ не є функцією Орліча.

Нехай $u(x) = \exp\{\varphi(x)\} - 1$ - N-функція Орліча, де $\varphi(x)$ при $|x| > x_0 > 0$ - монотонно неспадна угнута функція.

У просторі $L_u(\Omega)$ розглянемо норму Люксембурга, яка визначається формулою **(4)**. Позначимо $\sigma(t) = \|\xi(t)\|$.

Нехай $L_{(u)}(Q)$ - функціональний простір Орліча з нормою, яка еквівалентна нормі **(5)**:

$$\|\xi(t)\|_{(u)} = \inf_{r>0}\left\{\frac{1}{r}\int_Q \exp\{\varphi(r\xi(t))\}d\mu\right\}, \tag{7}$$

де $d\mu = \dfrac{dt}{T}$.

Так як норма **(7)** еквівалентна нормі **(5)**, то будемо вважати, що послідовність функцій $\{f_k(t), t \in Q, k = \overline{1,\infty}\}$ з простору $L_{(u)}(Q)$ належить до класу $B^*(u,u_1)$, тобто коефіцієнти з нерівності Бернштейна для цих функцій

$d_n^* = c^* \cdot d_n$, де d_n - коефіцієнти з нерівності Бернштейна **(6)**, а c^* - деяка константа.

Теорема 6.1. *Нехай $R(t), t \in Q$ - випадковий процес, який може бути зображений у вигляді ряду* **(3)**. *Нехай $L_u(\Omega)$ - простір Орліча випадкових величин, який породжується N-функцією $u(x) = \exp\{\varphi(x)\} - 1$, $L_{(u)}(Q)$ - функціональний простір Орліча. Нехай $u_2(x)$ - N-функція така, що $u(x)$ підпорядкована до функції $u_2(x)$. Якщо існує N-функція $u_1(x)$ $(u_1(x) \sim u_2(x))$ така, що функції $u_1(\sqrt{x})$ та*

$$K_1(x) = u^{(-1)}(u_1(x)) = \varphi^{(-1)}(\ln(u_1(x)+1))$$

опуклі, функція $\varphi(x)$ задовольняє умові:

$$\varphi(xy) \geq \psi(x)\varphi(y),$$

де $\psi(x)$ - деяка монотонно неспадна угнута функція, існує монотонно неспадна послідовність $a = \{a_k, k \geq 1\}$, $a_k > 0$, $a_k \to \infty, k \to \infty$, для якої виконується умова:

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k^* \sigma_1^k \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) < \infty,$$

де $\sigma_m^k = \sup_{t \in Q} \left\| R_m^k(\bar{a}, t) \right\|$, $f_k(t), t \in Q, k = \overline{1, \infty}$ - послідовність неперервних функцій з $L_{(u)}(Q)$, яка належить до класу $B^*(u, u_1)$, а d_k^* - коефіцієнти з нерівності Бернштейна, то для будь-якої послідовності $\{c_k, k \geq 1\}$, $c_k > 0$ для якої виконується умова $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k!} < \infty$, ряд **(3)** *збігається за* *ймовірністю у нормі простору* $L_{(u_2)}(Q)$, *випадковий процес* $R(t)$ *з ймовірністю 1 належить до простору* $L_{(u_2)}(Q)$ *та вірна нерівність:*

$$\mathrm{P}\left\{\left\|R_m^{\infty}(t)\right\|_{(u_1)} > z\sum_{k=m}^{\infty} d_k^* \sigma_m^k \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)\right\} \le$$

$$\le \mathrm{A}(c_k)\exp\{-\varphi(z)s\},$$

де $s = \inf\limits_{k\ge 1} \dfrac{c_k^{\frac{1}{k}}}{\varphi\left(2^{\frac{1}{k}}\psi^{(-1)}(k)\right)}.$

Якщо ξ_k *- незалежні випадкові величини, то ряд* **(3)** *збігається з імовірністю 1 у нормі простору* $L_{(u_2)}(Q)$.

Розділ III присвячений використанню одержаних результатів для обгрунтування застосовності методу Фур'є до розв'язання крайових задач з випадковими початковими умовами, та для моделювання випадкових процесів,що відтворюють задані з певною точністю у нормах просторів Орліча.

§7 присвячений обгрунтуванню застосовності методу Фур'є до розв'язання крайових задач математичної фізики з випадковими початковими умовами, а також знаходженню умов, за якими узагальнений розв'язок цієї задачі належить до простору Соболева. Розглядається крайова задача для однорідного гіперболічного рівняння з випадковими початковими умовами:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right) - q(x)u(x,t) - \rho(x)\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = 0 \quad \textbf{(8)}$$

$$0 \le x \le \pi,\ t \ge 0,$$

$$u(0,t)\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial t}u(0,t)\sin\alpha=0, \qquad \textbf{(9)}$$

$$u(\pi,t)\cos\beta+\frac{\partial}{\partial t}u(\pi,t)\sin\beta=0, \qquad \textbf{(10)}$$

$$u(x,0)=\xi(x) \qquad \textbf{(11)},$$

де $0\le\alpha,\beta\le 2\pi,\quad \cos\alpha\sin\alpha\le 0,\quad \cos\beta\sin\beta\ge 0;\quad p(x),$ $\frac{d}{dx}p(x)$, $q(x)$ **і** $\rho(x)$ **- неперервні функції на** $[0,\pi]$, **причому** $p(x)\ge 0$, $\rho(x)>0$, $q(x)\ge 0$, **а випадкові процеси** $\xi(x)$ **і** $\eta(x)$ **є строго субгауссовими. Кореляційні функції цих процесів**

$$\mathrm{B}(x,y)=\mathrm{M}\,\xi(x)\xi(y) \quad \text{і} \quad \mathrm{R}(x,y)=\mathrm{M}\,\eta(x)\eta(y)$$

вважаються неперервними в області $0\le x\le\pi,\ 0\le y\le\pi.$

Крім того,обмеження на коефіцієнти p,q,ρ **та величини** α **і** β **забеспечують додатність власних значень відповідної задачі Штурма-Ліувілля.**

Нехай $X_n(x)$ **- ортонормовані з вагою** $\rho(x)$ **власні функції задачі Штурма-Ліувілля, а** λ_n **- відповідні власні числа. Якщо застосувати метод Фур'є, формально можна записати розв'язок задачі (8)-(11):**

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}X_k(x)\left(A_k\cos\sqrt{\lambda_k}\,t+\frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}\,t\right) \qquad \textbf{(12)}$$

де $A_k=\int\limits_0^{\pi}\xi(x)X_k(x)\rho(x)dx$ **та** $B_k=\int\limits_0^{\pi}\eta(x)X_k(x)\rho(x)dx$ **є коефіцієнтами розкладу випадкових функцій,які надходять до початкових умов,за власними функціями задачі Штурма-Ліувілля.**

У цьому параграфі знайдені умови існування узагальненого розв'язка крайової задачі у просторі Соболева $W^{*}_{p,2}(Q_1)$, тобто у просторі з нормою

$$\|f(x,t)\|_{W^{*}_{p,2}(Q_1)} = \|f(x,t)\|_{L_p(Q_1)} + \left\|\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right\|_{L_p(Q_1)} +$$

$$+\left\|\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right\|_{L_p(Q_1)} + \left\|\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}\right\|_{L_p(Q_1)} + \left\|\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2}\right\|_{L_p(Q_1)} \quad \textbf{(13)},$$

де $Q_1 = [0,\pi]\times[0,\mathrm{T}]$.

Позначимо

$$u_m^{\infty}(x,t) = \sum_{k=m}^{\infty} X_k(x)\left(A_k\cos\sqrt{\lambda_k}\,t + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}\,t\right)$$

<u>Теорема 7.3.</u> ***Нехай для будь-якої монотонно неспадної послідовності*** $a=\{a_k, k\ge 1\}, a_k>0,\ a_k\to\infty, k\to\infty$, ***для якої збігається ряд*** $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{\frac{3}{4}-\frac{3}{2p}}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)<\infty$

виконуються такі умови:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}a_k a_l\lambda_k\lambda_l|\mathrm{M}A_kA_l|<\infty \quad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}a_k a_l\lambda_k^{1/2}\lambda_l^{1/2}|\mathrm{M}B_kB_l|<\infty.$$

Тоді з імовірністю одиниця існує узагальнений розв'язок задачі* (8)-(11) *у просторі $W^{*}_{p,2}(Q_1)$, ***який можна зобразити у вигляді збіжного за ймовірністю у нормі простору*** $W^{*}_{p,2}(Q_1)$ ***ряду* (12), *і при*** $z>40\delta e^{-1}\max_i\Delta_i(\bar{a}), i=\overline{1,10}$ ***виконується нерівність***

$$\mathrm{P}\left\{\left\|u_m^{\infty}(x,t)\right\|_{W_{p,2}^{\bullet}(Q_1)} > z\right\} \le \sum_{i=1}^{10} \exp\left\{-\frac{\left(\frac{z}{10\delta} - 4e^{-1}\Delta_i(\bar{a})\right)^2}{72e^{-1}\left(\Delta_i(\bar{a})\right)^2}\right\},$$

де $\Delta_i(\bar{a})$ визначені у дисертації, а δ-деяка константа.

Крім того, розглянуто більш часткову задачу та наведено умови на кореляційні функції випадкових процесів, які надходять до початкових умов, за якими у даної часткової задачі існує узагальнений розв'язок у просторі Соболева.

У §8 результати, які були одержані у розділах I та II, застосовані до побудови моделей випадкових процесів, які відтворюють задані з певною точністю у нормах просторів Орліча.

РОБОТИ АВТОРА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ.

1. **Тригуб С.Г**. К вопросу о сходимости некоторых случайных рядов в нормах пространств Орлича // Вероятностные модели процессов в управлении и надежности. Вторая Донецкая конференция,1990. Тезисы докладов.- С.65.

2. **Тригуб С.Г**.. Обоснование метода Фурье для решения краевой задачи математической физики со случайными начальными условиями // Теория вероятностей и матем.статистика. 1991.- Вып.45.- С.127-134.

3. **Тригуб С.Г**..О скорости сходимости некоторых случайных рядов в нормах пространств Орлича // Украинский математический журнал.- 1991.- т.43,N6.- С.841-848.

4. **Тригуб С.Г**.. К вопросу о скорости сходимости строго субгауссовских случайных рядов в норме пространства L_p // Доповіді Науково-технічної конференції пам'яті академіка М.П.Кравчука.Київський політехничний інститут.-1992.- С.39.

5. **Козаченко Ю.В.,Тригуб С.Г**.. Про швидкість збіжності строго субгауссових випадкових рядів у нормі простору L_p // Теорія ймовірностей та математична статистика.-1993.- Вип.48.-С.51-66.

Підп.до друку 9.02.94.Формат 60x84/16.Папір друк. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 1,16. Ум. фарбо-відб. 1,16. Обл.-вид.арк. 0,85.
Тираж 100 пр. Зам.200.

Підп. до друку 9.02.93. Формат 60x84 1/16. Папір друк. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 1,16. Ум. фарбо-відб. 1,16. Обл.-вид. арк. 0,85.
Тираж 100 пр. Зам. 200.