МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ УКРАИНЫ
ОДЕССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. И.И. МЕЧНИКОВА

на правах рукописи

АМЕР Касем Ахмед

Асимптотическое интегрирование некоторых классов линейных сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений в бесконечном промежутке изменения аргумента

01.01.02 Дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

ДИССЕРТАЦИИ НА СОИСКАНИЕ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ
КАНДИДАТА ФИЗИКО - МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

Одесса 1994

Диссертация является рукописью.

Работа выполнена на кафедре высшей математики Одесского государственного университета им. И.И. Мечникова.

Научный руководитель — доктор физико-математических наук, профессор Костин А.В.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор, академик АН Грузии Кигурадзе И.Т.,

кандидат физико-математических наук, профессор Клих Ю.А.

Ведущая организация — Киевский педагогический университет

Защита состоится "17" июня 1994 г. в 15⁰⁰ час. на заседании специализированного совета К 05.01.02. по физико-математическим наукам (математика) при Одесском государственном университете им. И.И.Мечникова по адресу: 270000, Одесса, ул. Петра Великого, 2.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Одесского государственного университета по адресу: 270000, Одесса, ул. Советской Армии, 24.

Автореферат разослан "14" мая 1994 г.

Ученый секретарь специализированного ученого совета доктор физико-математических наук, профессор Третьяк А.И.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Многочисленные процессы в физике, механике, химии, биологии и т.д. описываются с помощью дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр ε.

Поскольку лишь в исключительных случаях удается получить точное решение таких уравнений, то приходится прибегать к различным приближенным методам интегрирования. Весьма эффективными методами приближенного интегрирования таких уравнений являются асимптотические методы, в основе которых лежит идея разложения искомого решения в ряд по степеням малого параметра. В настоящее время существует обширная литература, посвященная исследованиям в этой области. Это работы Д.Биркгоффа, А.Шлезингера, Я.Д.Тамаркина, Р.Фаулера, Локка, В.Тржитзинского, В.Вазова, В.С.Пугачева, Х.Территина, Р.Сибуя, С.Ф.Фещенко, Н.И.Шкиля, Н.Н.Моисеева, И.С.Градштейна, И.М.Рапопорта, М.В.Федорюка, К.А.Абгаряна, Г.С.Жуковой, И.И.Старуна, Ю.А.Митропольского, А.Н.Тихонова, С.А.Ломова, А.Б.Васильевой и многих других авторов. В частности, в работах С.Ф.Фещенко, Н.И.Шкиля и их учеников всесторонне исследованы системы типа (4) в случае $k = 1, \ell \in N$ при условии, что $t \in [0, L[$, где L − конечное число, при этом собственные значения матрицы $P_{11}(\tau, \varepsilon)$ могут быть как простыми, так и кратными. С этими исследованиями тесно связаны исследования А.Пуанкаре, Н.П.Еругина, Н.Левинсона, Ф.Хартмана, И.Т.Кигурадзе, А.В.Костина и других авторов, которые изучали поведение решений линейных систем при $t \to +\infty$.

Актуальность темы. Темой настоящей диссертации является нахождение асимптотических представлений при $\varepsilon \to 0$, $t \in < T_1, T_2 >$, $-\infty \le T_1 < T_2 \le +\infty$, для решений линейной однородной или неоднородной системы вида (4). Актуальность темы диссертации объясняется тем, что случай системы (4) с несколькими неизвестными векторами типа $Y_1, \ldots, Y_n$ в случае бесконечного промежутка изменения аргумента t является мало исследованным.

Объекты исследования

1. Изучается вспомогательная квазилинейная система дифферен− циальных уравнений вида

$$\varepsilon^k \frac{dX}{dt} = Q(\tau, \varepsilon) + P(\tau, \varepsilon)X + F(\tau, \varepsilon, X), \tag{1}$$

которая удовлетворяет следующим условиям:

I/ ε — малый параметр, $\varepsilon \in I =]0, \varepsilon_0]$ $\tau = \varepsilon t$, $t \in \Delta = [0, +\infty[$, $\tau \in \Delta$, $k \in N_0$,

$X \in G_1 = \{X : X \in C^{n \times 1}, \|X\| \le a\}$, $Q(\tau, \varepsilon) \in C\{D, C^{n \times 1}\}$, $P(\tau, \varepsilon) \in C\{D, C^{n \times n}\}$,

$F(\tau, \varepsilon, X) \in C\{G, C^{n \times 1}\}$, где $D = \Delta \times I$, $G = D \times G_1$, $\varepsilon_0, a \in R_+$.

II/ существует $F'_X(\tau, \varepsilon, X) \in C(G)$ (F'_X — матрица Якоби для вектор-функции F) такая, что

$$\|F'_X(\tau, \varepsilon, X)\| \le L(a) \in R_+, \quad L(a) \to 0 \quad (a \to 0),$$

где L(a) — некоторая скалярная функция,

III/ имеют место асимптотические разложения при $\varepsilon \to 0$, $X \to 0$

$$Q(\tau, \varepsilon) \approx \sum_{s=1}^{\infty} Q_s(\tau)\varepsilon^s = Q^*(\tau, \varepsilon), \qquad P(\tau, \varepsilon) \approx \sum_{s=0}^{\infty} P_s(\tau)\varepsilon^s = P^*(\tau, \varepsilon),$$

$$F(\tau, \varepsilon, X) \approx \sum_{|K| \ge 2} F_K(\tau, \varepsilon) X^K = F^*(\tau, \varepsilon, X),$$

$$K = (k_1, \dots, k_n), \ |K| = k_1 + \dots + k_n, \ X^K = x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}, \ F_K = (F_{K1}(\tau), \dots, F_{Kn}(\tau))^T,$$

$$F_K(\tau, \varepsilon) \approx \sum_{s=0}^{\infty} F_{Ks}(\tau)\varepsilon^s = F_K^*(\tau, \varepsilon) \quad (|K| \ge 2),$$

причем

$$Q_s(\tau), P_s(\tau), F_{Ks}(\tau) \in C^{\infty}(\Delta) \quad (s \in N_0, |K| \ge 2), \tag{2}$$

$$\sup_{\tau \in \Delta}\left(\left\|\frac{d^m Q_s}{d\tau^m}\right\| + \left\|\frac{d^m P_s}{d\tau^m}\right\| + \left\|\frac{d^m F_{Ks}}{d\tau^m}\right\|\right) < +\infty \quad (m, s \in N_0; \ |K| \ge 2) \tag{3}$$

где считаем $Q_0(\tau) \equiv 0$,

IV/ $\inf\limits_{\tau \in \Delta} |\det P_0(\tau)| > 0$,

V/ собственные значения матрицы $P_0(\tau)$ $\lambda^j_{P_0}(\tau)$ $(j = \overline{1, n})$ удовлетворяет условию П:

$$\inf_{\Delta} |\mathrm{Re}\, \lambda^j_{P_0}(\tau)| > 0 \quad (j = \overline{1, n}).$$

Выполнение условий (2) и (3) условимся записывать в дальнейшем кратко $-$ $Q_s(\tau), P_s(\tau), F_{Ks}(\tau) \in M \quad (s \in N_0;\ |K| \geq 2)$.

2. Изучается линейная однородная или неоднородная система вида

$$\varepsilon^{k-1}\frac{dY_k}{dt} = \sum_{j=1}^{n} P_{kj}(\tau,\varepsilon)Y_j + Q_k(\tau,\varepsilon)\exp\int_T^t \frac{\Lambda(\tau,\varepsilon)}{\varepsilon^\ell}dt \quad (k = \overline{1,n}), \tag{4}$$

где $\quad \varepsilon$ $-$ малый параметр, $\varepsilon \in I$, $\tau = \varepsilon t$, $t \in \Delta$, $\tau \in \Delta$, $\quad Y_k \in C^{m_k \cdot 1} \left(m_k \geq 1; k = \overline{1,n}\right)$,

$P_{kj}(\tau,\varepsilon) \in C\left(D, C^{m_k \cdot m_j}\right) \ \left(k, j = \overline{1,n}\right), \quad Q_k(\tau,\varepsilon) \in C\left(D, C^{m_k \cdot 1}\right)\left(k = \overline{1,n}\right)$,

$\Lambda(\tau,\varepsilon) \in C(D,C)$,

и имеют место асимптотические разложения при $\varepsilon \to 0$

$$P_{kj}(\tau,\varepsilon) \approx \sum_{s=0}^{\infty} P_{kjs}(\tau)\varepsilon^s = P_{kj}^*(\tau,\varepsilon)\ , \qquad Q_k(\tau,\varepsilon) \approx \sum_{s=0}^{\infty} Q_{ks}(\tau)\varepsilon^s = Q_k^*(\tau,\varepsilon) \quad \left(k, j = \overline{1,n}\right),$$

$$\Lambda(\tau,\varepsilon) \approx \sum_{s=0}^{\infty} \Lambda_s(\tau)\varepsilon^s = \Lambda^*(\tau,\varepsilon).$$

3. Изучается линейное однородное или неоднородное дифферен$-$ циальное уравнение вида

$$\sum_{m=n}^{k+1} \varepsilon^{m-k} p_m(\tau,\varepsilon)\frac{d^m y}{dt^m} + \sum_{m=k}^{0} p_m(\tau,\varepsilon)\frac{d^m y}{dt^m} + q(\tau,\varepsilon)\exp\int_T^t \frac{\Lambda(\tau,\varepsilon)}{\varepsilon^\ell}dt = 0, \tag{5}$$

где $\quad k \in \{1,\dots,n-1\}, \quad \varepsilon \in I, \quad \tau = \varepsilon t, \quad t \in \Delta, \quad \tau \in \Delta, \quad p_n \equiv 1$,

$p_m(\tau,\varepsilon) \in C(D,C) \quad \left(m = \overline{0,n}\right), \quad q(\tau,\varepsilon) \in C(D,C), \quad \ell \in N$,

которое сводится к системе типа (4).

Цель диссертации

1. Исследовать вопрос о существовании и об асимптотическом характере формального частного решения (в виде ряда по степеням параметра ε) квазилинейной системы (1) (задача А).

2. Исследовать вопрос о существовании и об асимптотическом характере формальных частных решений линейной однородной системы (4) $(Q_k \equiv 0, k = \overline{1,n})$, отвечающих простым собственным значениям некоторых матриц $\bar{P}_{kk0}(\tau) \quad (k = n,\dots,1)$ (задача В).

3. Исследовать вопрос о существовании и об асимптотическом характере формального частного решения линейной неоднородной системы (4) (задача С).

4. Исследовать задачи В и С для уравнения (5).

Методика исследования. Используются результаты работы К.П.Персидского, работы С.Ф.Фещенко и Н.И.Шкиля, работы А.В.Костина, а также специальный метод последовательных приближений.

Научная новизна работы заключается в следующем.

1. Известная теорема К.П.Персидского о приведении линейной однородной системы к почти диагональному виду распространяется на случай линейной однородной системы с медленно меняющимися коэффициентами.

2. В случае квазилинейной системы (1) разработан эффективный метод исследования задачи А.

3. Для линейной однородной системы (4) $(Q_k \equiv 0, k = \overline{1,n})$ разработан эффективный метод исследования задачи В.

4. В случае линейной неоднородной системы (4) разработан эффективный метод исследования задачи С.

При этом основное внимание уделяется изучению случая, когда промежуток изменения аргумента является бесконечным.

Теоретическая ценность. Диссертация носит характер фундаментально-теоретического исследования. С помощью результатов диссертации могут быть рассмотрены задачи аналогичного типа для более общих чем (4) типов линейных дифференциальных систем, а также для дифференциально-разностных и интегро-дифференциальных уравнений.

Практическая ценность. Полученные результаты могут иметь приложения в различных областях естествознания: теоретической физике, механике, теории упругости и т.д.

Апробация работы. Материалы диссертации обсуждались на научном семинаре кафедры высшей математики Одесского государственного университета (научный руководитель — проф. Костин А.В.), на расширенных заседаниях Института Прикладной Математики им. И.Н.Векуа АН Грузии (1992 г.), а также на ежегодных отчетных конференциях профессорско – преподавательского состава Одесского государственного университета.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1 – 6].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из списка некоторых вспомогательных обозначений, введения, трех глав, содержащих 15 параграфов, и списка литературы, включающего 68 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В первой главе исследуется задача А для квазилинейной системы дифференциальных уравнений (1). Наряду с системой (1) рассматривается формальная система

$$\varepsilon^{k}\frac{dX^{*}}{dt}=\sum_{s=1}^{\infty}Q_{s}(\tau)\varepsilon^{s}+\left(\sum_{s=0}^{\infty}P_{s}(\tau)\varepsilon^{s}\right)X^{*}+\sum_{|K|\geq 2}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty}F_{kj}(\tau)\varepsilon^{j}\right)\left(X^{*}\right)^{K} \qquad (1_1)$$

В §1.1 на основе результатов К.П.Персидского рассмотрена вспомогательная задача о приведении линейной однородной системы с медленно меняющимися коэффициентами к почти диагональному виду.

В § 1.2. доказана следующая теорема.

Теорема 1.1. Если выполнены условия III/ – IV/, то у системы (1_1) существует формальное частное решение вида

$$X^{*}=\sum_{s=1}^{\infty}X_{s}(\tau)\varepsilon^{s}\quad(\tau\in\Delta),\qquad X_{s}(\tau)\in M\quad(s\in N). \qquad (6)$$

В §1.3. изучается асимптотический характер формального частного решения (6). Частное неформальное решение системы (1) ищется в форме

$$X=S_{N}(\tau,\varepsilon)+Z(\tau,\varepsilon),\qquad S_{N}=\sum_{s=1}^{q}X_{s}(\tau)\varepsilon^{s},\quad Z(\tau,\varepsilon)=O(\varepsilon^{q+1}).$$

Теорема 1.2. Если выполнены условия I/ – V/, то существует такое достаточно малое число ε_1, $0<\varepsilon_1\leq\varepsilon_0$, что при $\varepsilon\in\left]0,\varepsilon_1\right]$ система (1) допускает неформальное частное решение вида

$$X = \sum_{s=1}^{q} X_s(\tau)\varepsilon^s + O(\varepsilon^{q+1}) \quad (\tau \in \Delta).$$

В §1.4. приведены аналоги теорем 1.1 – 1.2 для системы (1) в случае, когда $\tau \in < T_1, T_2 >$, $-\infty \le T_1 < T_2 \le +\infty$.

Во второй главе рассматривается задача В для однородной системы (4) ($Q_k \equiv 0$, $k = \overline{1,n}$), для которой выполняются условия А и В.

Будем говорить, что однородная система (4) удовлетворяет условию А, если для некоторого натурального q имеют место представления

$$P_{jk}(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{q} P_{kjs}(\tau)\varepsilon^s + O(\varepsilon^{q+1}), \quad P_{kjs}(\tau) \in M \quad (j,k = \overline{1,n}, s \in N_0). \tag{7}$$

Будем также говорить, что однородная система (4) удовлетворяет условию В, если при любом натуральном q соблюдается условие (7), причем существуют такие $k, r \in \{1,\dots,m_n\}$, что алгебраические дополнения $A_{k1}(\tau),\dots,A_{kn}(\tau)$ k – й строки определителя

$$\det\left(P_{nn0}(\tau) - \lambda^r_{P_{nn0}}(\tau)E\right)$$

удовлетворяют неравенству

$$\inf_{\tau\in\Delta} \sum_{j=1}^{n} \left|A_{kj}\right|^2 > 0.$$

В случае выполнения условия В имеют место асимптотические разложения по параметру ε

$$P_{kj}(\tau,\varepsilon) \approx P^*_{kj}(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} P_{kjs}(\tau)\varepsilon^s \quad (j,k = \overline{1,n},\ \tau \in \Delta).$$

Одновременно с однородной системой (4) будем рассматривать формальную систему

$$\varepsilon^{k-1}\frac{dY^*_k}{dt} = \sum_{j=1}^{n} P^*_{kj}(\tau,\varepsilon)Y^*_j \quad \left(k = \overline{1,n}\right). \tag{4_1}$$

В §2.1. доказана следующая лемма о формальном расщеплении системы (4_1).

Лемма 2.1. Если система (4_1) удовлетворяет условию В и, кроме того,

$$\inf_{\tau\in\Delta}\left|\det P_{nn0}(\tau)\right| > 0,$$

то существует формальное преобразование

$$Y_k^* = X_k^* + D_{kn}^*(\tau,\varepsilon)X_n^* \quad (k=\overline{1,n-1}), \quad Y_n^* = X_n^*,$$

где $D_{kn}^*(\tau,\varepsilon)$ – формальные $m_k\times m_n$ – матрицы , $(k=\overline{1,n-1})$,

$$D_{kn}^*(\tau,\varepsilon)=\sum_{s=n-k}^{\infty}D_{kns}(\tau)\varepsilon^s, \quad D_{kns}(\tau)\in M \quad (k=\overline{1,n-1}, s\ge n-k), \tag{8}$$

которое приводит систему (4_1) к виду

$$\varepsilon^{k-1}\frac{dX_k^*}{dt}=\sum_{j=1}^{n-1}\tilde{P}_{kj}^*(\tau,\varepsilon)X_j^* \qquad (k=\overline{1,n-1}),$$

$$\varepsilon^{n-1}\frac{dX_n^*}{dt}=\sum_{j=1}^{n-1}P_{nj}^*(\tau,\varepsilon)X_j+\tilde{P}_{nn}^*(\tau,\varepsilon)X_n^*,$$

где

$$\tilde{P}_{kj}^*(\tau,\varepsilon)=P_{kj}^*(\tau,\varepsilon)-\varepsilon^{j-n}D_{kn}^*(\tau,\varepsilon)P_{nk}^*(\tau,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\tilde{P}_{kjs}(\tau)\varepsilon^s \quad (k,j=\overline{1,n-1}),$$

причем

$$\tilde{P}_{n-1n-10}(\tau)=P_{n-1n-10}(\tau)-P_{n-1n0}(\tau)P_{nn0}^{-1}(\tau)P_{nn-10}(\tau), \tag{9}$$

$$\tilde{P}_{nn}^*(\tau,\varepsilon)=P_{nn}^*(\tau,\varepsilon)+\sum_{j=1}^{n-1}P_{nj}^*(\tau,\varepsilon)D_{jn}^*(\tau,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\tilde{P}_{nns}(\tau)\varepsilon^s,$$

$$\tilde{P}_{nn0}(\tau)=P_{nn0}(\tau).$$

В §2.2. доказана следующая теорема.

Теорема 2.1. Если выполнены условия леммы 2.1 и функция $\lambda_{P_{nn0}}^r(\tau)$, $r\in\{1,\dots,m_n\}$ такова, что

$$\inf_{\tau\in\Delta}\left|\lambda_{P_{nn0}}^r(\tau)-\lambda_{P_{nn0}}^j(\tau)\right|>0 \qquad (j=\overline{1,m_n}, j\ne r),$$

то система (4_1) допускает в Δ формальное частное решение вида

$$Y_k^* = D_{kn}^*(\tau,\varepsilon)Y_n^* \qquad (k=\overline{1,n-1}),$$

$$Y_n^* = R^*(\tau,\varepsilon)\exp\int_T^t \frac{\Lambda^*(\varepsilon t_1,\varepsilon)}{\varepsilon^{n-1}}dt_1 \quad (\tau\in\Delta),$$

где D_{kn}^* $(k=\overline{1,n-1})$, определяются формулами (8),

$R^*(\tau,\varepsilon)=B_r(\tau)+\sum\limits_{s=0}^{\infty}B_{rs}(\tau)\varepsilon^s$, $\Lambda^*(\tau,\varepsilon)=\lambda^r_{P_{nn0}}(\tau)+\sum\limits_{s=0}^{\infty}\mu_{rs}(\tau)\varepsilon^s$ – формальные ряды размерности m_n и 1 соответственно,

$B_r(\tau)=\left(A_{k_1},\dots,A_{k_n}\right)^T$, $B_{rs}(\tau),\mu_{rs}(\tau)\in M$ $(s\in N)$.

В §2.3. доказывается лемма 2.2 о неформальном расщеплении однородной системы (4), в которой предполагается, что для однородной системы (4) выполняется условие А для некоторого $q>n-1$ и, кроме того, собственные значения $\lambda^j_{P_{nn0}}(\tau)$ $(j=\overline{1,m_n})$ удовлетворяют условию П.

Полную формулировку леммы 2.2 опускаем.

В §2.4. изучается асимптотический характер формального решения (22).

Теорема 2.2. Если выполнены условия леммы 2.2 и, кроме того, существует $r\in\{1,\dots,m_n\}$ такое, что разности $\lambda^r_{P_{nn0}}(\tau)-\lambda^j_{P_{nn0}}(\tau)$ $(j=\overline{1,m_n},\ j\neq r)$ удовлетворяют условию П, то однородная система (4) допускает в Δ неформальное частное решение типа

$$Y_k = D_{kn}(\tau,\varepsilon)Y_n \qquad (k=\overline{1,n-1}),$$

$$Y_n = R(\tau,\varepsilon)\exp\int_T^t \frac{\Lambda(\varepsilon t_1,\varepsilon)}{\varepsilon^{n-1}}dt_1 \quad (T\in\Delta),$$

где

$$D_{kn}(\tau,\varepsilon)=\sum_{s=n-k}^{q}D_{kns}(\tau)\varepsilon^s+O(\varepsilon^{q+1}) \quad (k=\overline{1,n-1}),$$

$$R(\tau,\varepsilon)=B_r(\tau)+\sum_{s=1}^{q}B_{rs}(\tau)\varepsilon^s+O(\varepsilon^{q+1}),$$

$$\Lambda(\tau,\varepsilon)=\lambda^r_{P_{nn0}}(\tau)+\sum_{s=1}^{q}\mu_{rs}(\tau)\varepsilon^s+O(\varepsilon^{q+1}).$$

В §2.5. доказаны следующие утверждения.

Теорема 2.3. Если для системы (4_1) выполняются условия леммы 2.1,

$$\inf_{\tau\in\Delta} \left|\det \bar{P}_{n-1n-10}(\tau)\right| > 0,$$

где $\bar{P}_{n-1n-10}(\tau)$ определяется формулой (9) и, кроме того, существует функция $\lambda^r_{\bar{P}_{n-1n-10}}(\tau)$, $r\in\{1,\ldots,m_{n-1}\}$, такая, что

$$\inf_{\tau\in\Delta} \left|\lambda^r_{\bar{P}_{n-1n-10}}(\tau) - \lambda^j_{\bar{P}_{n-1n-10}}(\tau)\right| > 0 \quad (j=\overline{1,m_{n-1}},\ j\neq r),$$

то система (4_1) допускает в Δ формальное частное решение вида

$$Y^*_k = \left(\sum_{j=w_k}^{\infty} Y_{kj}(\tau)\varepsilon^j\right)\exp\int_T^t \frac{\Lambda^*(\varepsilon t_1,\varepsilon)}{\varepsilon^{n-2}}dt_1, \quad \left(k=\overline{1,n};\ T\in\Delta\right)$$

где $w_n = w_{n-1} = 0,\ w_k = n-1-k\ \left(k=1,\ldots,n-2\right)$.

Теорема 2.4. Если для однородной системы (4) выполняются условия леммы 2.2 , функции $\lambda^j_{\bar{P}_{n-1n-10}}(\tau)$ $(j=\overline{1,m_{n-1}})$ удовлетворяют условию П и, кроме того, существует $r\in\{1,\ldots,m_{n-1}\}$ такое, что разности $\lambda^r_{\bar{P}_{n-1n-10}}(\tau)-\lambda^j_{\bar{P}_{n-1n-10}}(\tau)$ $(j=\overline{1,m_{n-1}},\ j\neq r)$ удовлетворяют также условию П, то однородная система (4) допускает в Δ неформальное частное решение типа

$$Y_k = \left(\sum_{j=w_k}^{q} Y_{kj}(\tau)\varepsilon^j + O(\varepsilon^{q+1})\right)\exp\int_T^t \frac{\Lambda(\varepsilon t_1,\varepsilon)}{\varepsilon^{n-2}}dt_1, \quad \left(k=\overline{1,n};\ T\in\Delta\right),$$

где $w_n = w_{n-1} = 0,\ w_k = n-1-k\ \left(k=1,\ldots,n-2\right)$.

В §2.6. рассматривается линейное однородное дифференциальное уравнение (5) $(q(\tau,\varepsilon)\equiv 0)$, т.е.

$$\sum_{m=n}^{k+1} \varepsilon^{m-k} p_m(\tau,\varepsilon)\frac{d^m y}{dt^m} + \sum_{m=k}^{0} p_m(\tau,\varepsilon)\frac{d^m y}{dt^m} = 0. \tag{10}$$

Наряду с уравнением (10) рассматривается соответствующее ему формальное уравнение

$$\sum_{m=n}^{k+1} \varepsilon^{m-k} p_m^{*}(\tau,\varepsilon)\frac{d^m y^{*}}{dt^m} + \sum_{m=k}^{0} p_m^{*}(\tau,\varepsilon)\frac{d^m y^{*}}{dt^m} = 0 \qquad (10_1)$$

и доказаны следующие теоремы.

Теорема 2.5. Если для уравнения (10_1) выполняется условие

$$\inf_{\tau\in\Delta} |p_{k0}(\tau)| > 0, \qquad (11)$$

$p_m(\tau,\varepsilon)\,(m=\overline{0,n})$ удовлетворяют условию типа B и, кроме того, непрерывный корень $\lambda_r(\tau)$ $(r=\{\overline{1,n-k}\}$, r − фиксировано) уравнения

$$\lambda_r^{n-k} + \lambda_r^{n-k-1} p_{n-10}(\tau) + \ldots + \lambda_r p_{k+1}(\tau) + p_{k0}(\tau) = 0$$

обладает свойством

$$\inf_{\tau\in\Delta} |\lambda_r(\tau) - \lambda_j(\tau)| > 0 \quad (j=\overline{1,n-k},\ j\neq r),$$

то уравнение (10_1) допускает в Δ формальное частное решение такое, что справедливы формальные разложения вида

$$\frac{d^i y^{*}}{dt^i} = \left((\lambda_r)^{i-k}\varepsilon^{k-i} + \sum_{s=k-i+1}^{\infty} S_s(\tau)\varepsilon^s\right)\exp\int_T^t \frac{\Lambda^{*}(\varepsilon t_1,\varepsilon)}{\varepsilon}dt_1, \quad \left(i=\overline{0,n-1},\ T\in\Delta\right),$$

где

$$\Lambda^{*}(\tau,\varepsilon) = \lambda_r(\tau) + \sum_{s=1}^{\infty}\mu_s(\tau)\varepsilon^s,$$

$\mu_s(\tau)$ $(s\in N)$ − скалярные функции, $\mu_s(\tau)\in M$ $(s\in N)$.

Теорема 2.6. Если для уравнения (10) функции $\lambda_j(\tau)$ $(j=\overline{1,n-k})$ удовлетворяют условию П, $p_m(\tau,\varepsilon)\,(m=\overline{0,n})$ удовлетворяют условию A с $q>k+1$ и для фиксированного $r\in\left\{\overline{1,n-k}\right\}$ разности $\lambda_r(\tau)-\lambda_j(\tau)$ $(j=\overline{1,n-k},\ j\neq r)$, удовлетворяют условию П, то уравнение (10) допускает в Δ неформальное частное решение вида

$$\frac{d^i y}{dt^i} = \left((\lambda_i)^{i-k} \varepsilon^{k-i} + \sum_{s=k-i+1}^{q} S_{is}(\tau)\varepsilon^s + O(\varepsilon^{q+1}) \right) \exp \int_T^t \frac{\Lambda(\varepsilon t_1, \varepsilon)}{\varepsilon} dt_1, \quad \left(i = \overline{0, n-1};\ q > k+1,\ T \in \Delta \right),$$

где
$$\Lambda(\tau, \varepsilon) = \lambda_i + \sum_{s=1}^{q} \mu_{is}(\tau)\varepsilon^s + O(\varepsilon^{q+1}).$$

Теорема 2.7. Если для уравнения (10_1) выполняется условие (11), $p_m(\tau, \varepsilon)$ $(m = \overline{0, n})$ удовлетворяют условию типа В и, кроме того, корень $\beta_\rho(\tau)$ $(\rho \in \{1, \dots, k\}$, ρ – фиксировано) уравнения

$$\beta_\rho^k p_{k0}(\tau) + \beta_\rho^{k-1} p_{k-1,0}(\tau) + \dots + \beta_\rho^2 p_{20}(\tau) + \beta_\rho p_{10}(\tau) + p_{00}(\tau) = 0$$

обладает свойством

$$\inf_{\tau \in \Delta} \left| \beta_\rho(\tau) - \beta_j(\tau) \right| > 0 \quad (j = \overline{1, k},\ j \neq \rho),$$

то уравнение (10_1) допускает в Δ формальное частное решение такое, что справедливы формальные разложения вида

$$\frac{d^i y^*}{dt^i} = \left(\beta_\rho^i(\tau) + \sum_{s=1}^{\infty} S_{is}(\tau)\varepsilon^s \right) \exp \int_T^t \Lambda_1^*(\varepsilon t_1, \varepsilon) dt_1, \quad \left(i = \overline{0, n-1},\ T \in \Delta \right),$$

где

$$\Lambda_1^*(\tau, \varepsilon) = \beta_\rho(\tau) + \sum_{s=1}^{\infty} \mu_{\rho s}(\tau)\varepsilon^s,$$

$\mu_{\rho s}(\tau)$ $(s \in N)$ – скалярные функции, $\mu_{\rho s}(\tau) \in M$ $(s \in N)$

Теорема 2.8. Если для уравнения (10) функции $\beta_j(\tau)$ $(j = \overline{1, k})$ удовлетворяют условию П, $p_m(\tau, \varepsilon)$ $(m = \overline{0, n})$ удовлетворяют условию А с $q > k+1$ и, кроме того, для фиксированного $\rho \in \{\overline{1, k}\}$ разности $\beta_\rho(\tau) - \beta_j(\tau)$ $(j = \overline{1, k},\ j \neq \rho)$, удовлетворяют условию П, то уравнение (10) допускает в Δ неформальное частное решение такое, что

$$\frac{d^i y}{dt^i} = \left(\beta_\rho^i(\tau) + \sum_{s=1}^{q} S_{is}(\tau)\varepsilon^s + O(\varepsilon^{q+1}) \right) \exp \int_T^t \Lambda_1(\varepsilon t_1, \varepsilon) dt_1, \quad \left(i = \overline{0, n-1},\ q > k+1,\ T \in \Delta \right).$$

где $\quad \Lambda_1(\tau,\varepsilon)=\beta_\rho(\tau)+\sum_{s=1}^{q}\mu_{\rho s}(\tau)\varepsilon^s+O(\varepsilon^{q+1})$.

В §2.3. рассматривается частный случай $k=n-1$ уравнения (10) и сформулированы аналоги теорем 2.5 – 2.8.

В третьей главе изучается задача С для неоднородной системы (4).

Наряду с системой (4) рассматривается соответствующая ей формальная система

$$\varepsilon^{k-1}\frac{dY_k^*}{dt}=\sum_{j=1}^{n}P_{kj}^*(\tau,\varepsilon)Y_j^*+Q_k^*(\tau,\varepsilon)\exp\int_T^t\frac{\Lambda^*(\tau,\varepsilon)}{\varepsilon^\ell}dt \quad (k=\overline{1,n}). \tag{4_2}$$

В §§ 3.1., 3.2., 3.3. рассматриваются различные случаи значений числа ℓ: $\ell>n-1$, $\ell=n-1$, $\ell=n-2$ и доказаны следующие теоремы.

Теорема 3.1. Если выполняется условие II/ и, кроме того,

$$\inf_{\tau\in\Delta}|\Lambda_0(\tau)|>0, \tag{12}$$

то у системы (4_2) в случае $\ell>n-1$ существует в Δ формальное частное решение вида

$$Y_k^*=\left(\sum_{s=\ell-(k-1)}^{+\infty}Y_{ks}(\tau)\varepsilon^s\right)\exp\int_T^t\frac{\Lambda^*(\tau,\varepsilon)}{\varepsilon^\ell}dt, \qquad Y_{ks}(\tau)\in M\ (k=\overline{1,n};\ s\geq\ell-(n-1)).$$

Теорема 3.2. Если выполняются условия I/ – II/ и, кроме того, функция $\Lambda_0(\tau)$ удовлетворяет условию П, то существует такое достаточно малое число $\varepsilon_1, 0<\varepsilon_1\leq\varepsilon_0$, что при $\varepsilon\in]0,\varepsilon_1]$ у системы (4) в случае $\ell>n-1$ существует неформальное частное решение вида

$$Y_k=\left(\sum_{s=\ell-(k-1)}^{q}Y_{ks}(\tau)\varepsilon^s+O(\varepsilon^{q+1})\right)\exp\int_T^t\frac{\Lambda(\tau,\varepsilon)}{\varepsilon^\ell}dt \quad (k=\overline{1,n};\ q\geq\ell,\ \tau\in\Delta).$$

Теорема 3.3. Для системы (4_2) в случае $\ell = n-1$ остается справедливым утверждение теоремы 3.1, если выполнены условия II/, (12) и условие

$$\inf_{\tau\in\Delta} \left|\det(P_{nn0}(\tau) - \Lambda_0 E)\right| > 0.$$

Если, кроме того, функции $\Lambda_0(\tau)$ и $\lambda^j_{P_{nn0}}(\tau)\,(j=\overline{1,m_n})$ удовлетворяют условию П, то для этой системы справедливо утверждение теоремы 3.2.

Теорема 3.4. Если выполнено условие II/ и, кроме того, выполняются следующие условия

$$1.\ \inf_{\tau\in\Delta} \left|\Lambda_0(\tau)\right| > 0,$$

$$2.\ \inf_{\tau\in\Delta} \left|\det(P_{nn0}(\tau)\right| > 0,$$

$$3.\ \inf_{\tau\in\Delta} \left|\det(\overline{\theta}_{n-1n-10}(\tau)\right| > 0,$$

$$\overline{\theta}_{n-1n-10}(\tau) = (P_{n-1n-10}(\tau) - P_{n-1n0}(\tau)P^{-1}_{nn0}(\tau)P_{nn-10}(\tau) - \Lambda_0 E_{n-1n-1}),$$

то у системы (4_2) в случае $\ell = n-2$ существует формальное частное решение вида

$$Y^*_k = \left(\sum_{s=n-k-1}^{\infty} Y_{ks}(\tau)\varepsilon^s\right)\exp\int_T^t \frac{\Lambda^*(\tau,\varepsilon)}{\varepsilon^\ell}dt \quad (k=\overline{1,n-1};\ \tau\in\Delta),$$

$$Y^*_n = \left(\sum_{s=0}^{\infty} Y_{ns}(\tau)\varepsilon^s\right)\exp\int_T^t \frac{\Lambda^*(\tau,\varepsilon)}{\varepsilon^\ell}dt \quad (\tau\in\Delta),$$

где $Y_{ks}(\tau)\in M\ (k=\overline{1,n-1}, s\geq n-k-1;\ k=n, s\in N_0)$.

Теорема 3.5. Если выполняются условия I/–II/ и, кроме того, функции $\Lambda_0(\tau)$, $\lambda^j_{P_{nn0}}(\tau)\,(j=\overline{1,m_n})$ и $\lambda^i_{\overline{\theta}_{n-1n-10}}(\tau)\,(i=\overline{1,m_{n-1}})$ удовлетворяют П, где

$$\overline{\theta}_{n-1n-10}(\tau) = (P_{n-1n-10}(\tau) - P_{n-1n0}(\tau)P^{-1}_{nn0}(\tau)P_{nn-10}(\tau) - \Lambda_0 E_{n-1n-1}),$$

то система (4) в случае $\ell = n-2$ допускает неформальное частное решение вида

$$Y_k = \left(\sum_{s=n-k-1}^{q} Y_{ks}(\tau)\varepsilon^s + O(\varepsilon^{q+1}) \right) \exp \int_T^t \frac{\Lambda(\tau,\varepsilon)}{\varepsilon^\ell} dt \quad (k = \overline{1, n-1}, q \geq n-2;\ \tau \in \Delta),$$

$$Y_n = \left(\sum_{s=0}^{q} Y_{ns}(\tau)\varepsilon^s + O(\varepsilon^{q+1}) \right) \exp \int_T^t \frac{\Lambda(\tau,\varepsilon)}{\varepsilon^\ell} dt \quad (q \geq 0,\ \tau \in \Delta).$$

В §3.4. изучается неоднородное дифференциальное уравнение (5) и сформулированы аналоги теорем 3.1 – 3.3.

Основные научные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Амер К.А., Костин А.В. Асимптотика решений линейного однородного уравнения с малым параметром при старшей производной и медленно меняющимися коэффициентами // Доклады расширенного заседания семинара Института Прикладной Математики им.И.Н.Векуа. – 1992. – 7, №5. – с. 9 – 11.
2. Амер К.А., Костин А.В. Об асимптотическом представлении решений линейного дифференциального уравнения n – го порядка с малыми параметрами при старших производных и медленно меняющимися коэффициентами // Известия АН Грузии. – 1994. – 149, №2. – с. 5 – 8.
3. Амер К.А., Костин А.В. Об асимптотических представлениях на полуоси решений линейных однородных систем с малыми параметрами при производных // Известия АН Грузии. – 1994. – 150, №2. – с.8 – 12.
4. Амер К.А., Костин А.В. О существовании частных решений специального вида у квазилинейной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при производных и медленно меняющимися коэффициентами. Деп. в Укр ІНТЕІ, 16.03.94 г., №584 – Ук 94, 14 с.
5. Амер К.А., Костин А.В. Об асимптотических представлениях на полуоси решений линейных однородных систем с малыми параметрами при производных и медленно меняющимися коэффициентами. Деп. в Укр ІНТЕІ, 01.03.94 г., №444 – Ук 94, 23 с.
6. Амер К.А. Об асимптотических представлениях на полуоси решений линейных неоднородных систем с малыми параметрами при производных и медленно меняющимися коэффициентами. Деп. в Укр ІНТЕІ, 16.03.94 г., №583 – Ук 94, 17 с.

Подписано к печати 11.05. 1994г.
Заказ 504 Тираж 100

Бумага типографская N1
Печать офсетная

Отдел оперативной полиграфии, 270001, г. Одесса, ул. Ленина,28