ХАРЬКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ГАНДЕЛЬ Юрий Владимирович

ПАРНЫЕ СУММАТОРНЫЕ И СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ: ТЕОРИЯ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

01.04.03 — радиофизика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

ХАРЬКОВ 1994

Работа выполнена в Харьковском государственном университете.

Официальные оппоненты:

— доктор физико-математических наук, профессор, начальник отделения Национального научного центра «Харьковский физико-технический институт **Хижняк Николай Антонович;**

— доктор физико-математических наук, профессор Харьковского военного университета **Сухаревский Илья Владимирович;**

— доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник НИИ ядерных проблем при Белорусском государственном университете **Слепян Григорий Яковлевич.**

Ведущая организация — Радиоастрономический институт АН Украины.

Защита состоится « 10 » июня 1994 г. в 14 час. на заседании специализированного ученого совета Д 02.01.07 Харьковского государственного университета (310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4, ауд. 3-9).

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке ХГУ.

Автореферат разослан « 5 » мая 1994 г.

Ученый секретарь
специализированного ученого
совета **Чеботарев В. И.**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Стремительное развитие математического моделирования с применением ЭВМ в электродинамике и радиофизике /для численного анализа электромагнитных полей при рассеянии и дифракции, для расчета устройств СВЧ и ускорительной техники/ зачастую опережает работу по строгому обоснованию как выбора самих математических моделей, так и применяемых при их реализации вычислительных процедур. Поэтому остаются весьма актуальными, с одной стороны, построение математических моделей в электродинамике и радиофизике на базе строгой теории электромагнетизма, с другой - исследование и обоснование соответствующих дискретных математических моделей, используемых для численного анализа электромагнитных полей, а также оценка погрешности этих моделей и устойчивости применяемых вычислительных процедур. При решении задач дифракции особенно актуальны эти проблемы в средневолновом диапазоне, где, как правило, неприменимы ни аналитические методы, работающие в длинноволновом диапазоне, ни асимптотические, с успехом применяемые в коротковолновом диапазоне.

Построение достаточно общих и строго обоснованных численных методов решения возможно более широкого класса модельных задач актуально еще и потому, что создает предпосылки для использования их в качестве эталонных при расширительной трактовке применимости разработанных на основе этих методов дискретных математических моделей реальных задач электродинамики и радиофизики. Проведение на их основе численного эксперимента дает возможность определить практические границы применимости построенных математических моделей.

Математические модели широкого класса задач теории дифракции - смешанные краевые задачи для уравнения Гельмгольца, их решение методом Фурье приводит к парным уравнениям - интегральным в случае непрерывного спектра и сумматорным в случае дискретного. Сведение парных уравнений к уравнению Фредгольма второго рода самый распространенный способ решения смешанных краевых задач математической физики. В последние годы в связи с бурным развитием численных методов решения сингулярных интегральных уравнений в вычислительной физике все большее внимание уделяется математическим моделям, основанным на сингулярных интегральным уравнениях /СИУ/. Среди методов построения таких моделей особое место занимают методы дискретных особенностей /МДО/. Их эвристической основой является метод дискретных вихрей /МДВ/ С.М. Белоцерковского в аэродинамике. После строгого обоснования И.К. Лифановым МДВ как численного метода решения СИУ открылись новые возможности обобщения этого метода, применения разработанной вычислительной техники к новым классам задач.

Задачи дифракции на решетках - классическая математическая модель, на которой отрабатывались и отрабатываются многие численно-аналитические и численные методы решения задач акустики, электродинамики и радиофизики. Предлагаемый в работе новый подход к решению задач дифракции на решетках из конечного числа лент, многоэлементных периодических решетках, а также ленточных диафрагмах в волноводах, основанный на сведении парных интегральных и парных сумматорных уравнений к СИУ, открыл широкие возможности для построения новых дискретных математических моделей краевых задач электродинамики.

Цель работы - построение строгой теории парных интегральных и парных сумматорных уравнений на базе СИУ, обоснование приближенного численного метода их решения и построение на этой основе математических моделей широкого класса задач электродинамики, радиофизики, краевых задач математической физики.

Методы исследования: функционально аналитические с использованием теории операторов в гильбертовом пространстве и теории аппроксимации /конструктивной теории функций/; численно-аналитические с использованием интерполяционных квадратур для несобственных и сингулярных интегралов; эвристические с использованием численного эксперимента для определения практических границ применимости разработанных строгих вычислительных методов.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

I. Единый численно-аналитический метод решения парных сумматорных и парных интегральных уравнений задач дифракции электромагнитных волн на многоэлементных решетках, состоящий в сведении парных уравнений к СИУ на системе отрезков и обосновании прямого метода их численного решения с использованием МДО.

I.I. Сведение к СИУ парных интегральных уравнений задач дифракции E - и H - поляризованных волн на решетках из конечного числа идеально проводящих бесконечно тонких лент, лежащих в одной плоскости /первая и вторая краевые задачи/.

I.2. Сведение к СИУ третьей и четвертой краевых задач на ограниченных решетках.

I.3. Сведение к СИУ парных сумматорных уравнений задач дифракции E - и H - поляризованных волн на многоэлементных периодических решетках из идеально проводящих бесконесно тонких лент /первая и вторая краевые задачи, периодический случай/.

I.4. Сведение к СИУ третьей и четвертой краевых задач на периодических решетках.

I.5. Сведение к СИУ парных сумматорных уравнений задач дифракции на ленточных диафрагмах в плоских волноводах.

I.6. Построение и обоснование численного метода решения парных интегральных и парных сумматорных уравнений на базе МДО, оценка погрешности метода.

I.7. Выделены широкие классы краевых задач электродинамики, приводящие к парным интегральным и парным сумматорным уравнениям, которые с помощью разработанной аналитической техники сводятся к СИУ первого рода на системе отрезков; описаны функциональные классы, в которых рассматриваемые парные уравнения эквивалентны соответствующим СИУ.

2. Математические модели в электродинамике на базе теории парных уравнений, СИУ и МДО.

2.1. Математическая модель для учета толщина лент в задачах дифракции на многоэлементных решетках и численный эксперимент на ее основе.

2.2. Математические модели для расчета дифракции волн на ступеньке в плоском волноводе, на системе ступенчатых расширений в плоском волноводе и в волноводе кругового сечения, на периодически повторяющейся системе кольцевых диафрагм в волноводе кругового сечения.

2.3. Численный метод решения систем СИУ на всей оси и новый подход к численному анализу дифракции электромагнитных волн на волноведущих структурах. Численный эксперимент: исследование задачи дифракции плоской монохроматической волны на диэлектрическом и идеально проводящем прямоугольных клиньях с общей гранью.

2.4. Дискретная математическая модель /на базе нового подхода к решению систем СИУ на всей оси /для расчета электронно-микроскопического контраста и анализа физико-механических свойств тонких пленок в микроэлектронике.

2.5. Дискретная математическая модель на основе МДО для вычисления собственных плазменных частот в системе сдвоенных проводящих каналов.

3. Обоснование метода дискретных токов - варианта МДО - численного решения СИУ двумерных краевых задач дифракции электромагнитных волн на системе замкнутых и разомкнутых проводящих цилиндрических поверхностей.

3.I. Дискретизация по МДО систем СИУ с ядрами Гильберта и Коши, а также дополнительных условий общего вида; регуляризация по Лифанову и доказательство разрешимости СЛАУ.

3.2. Оценка скорости сходимости приближенного решения системы СИУ к точному в метрике специально построенных гильбертовых пространств и на этой основе получение равномерных оценок отклонения приближенных значений физических характеристик электромагнитного поля от точных.

4. Численно-аналитический метод решения парных интегральных уравнений задач дифракции на круговом диске и его строгое обоснование.

4.I. Аналитические выражения для поля на диске и в дальней зоне через решение интегрального уравнения Ахиезера.

4.2. Сведение уравнения Ахиезера к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с экспоненциальным ядром и его приближенное решение.

4.3. Построение приближенных решений парных интегральных уравнений и численный анализ рассеянных и дифрагированных полей, оценка погрешности метода.

5. Построение и строгое обоснование метода дискретных зарядов - варианта МДО - численного решения основной задачи электростатики проводников.

Результаты диссертационной работы составляют содержание нового научного направления "Метод дискретных особенностей в задачах электродинамики".

Научная новизна. В работу включены только оригинальные результаты. Впервые теория парных интегральных и парных сумматорных уравнений строится на основе СИУ; впервые получено СИУ задач дифракции волн на многоэлементных решетках, причем изучены все четыре краевые задачи для уравнения Гельмгольца как в случае ограниченных так и периодических решеток.

Впервые дано строгое обоснование МДО для решения задач дифракции волн на цилиндрических структурах.

Построены математические модели на основе теории парных уравнений и МДО для расчета параметров волноведущих структур.

Дано строгое обоснование численного решения МДО основной задачи электростатики цилиндрических проводников.

Обоснованность и достоверность полученных в диссертации теоретических результатов гарантируется тем, что они получены строгими математическими методами. Численные результаты, полученные при решении эталонных и модельных задач методами дискретных особенностей и предложенными в работе их модификациями, хорошо согласуются с известными точными решениями, а также с результатами, найденными другими методами, и экспериментальными данными.

Теоретическая и практическая значимость работы состоит в построении новой теории парных интегральных и сумматорных уравнений широкого класса задач дифракции электромагнитных волн; строгом обосновании численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач электростатики проводников и задач дифракции на системах цилиндрических проводников.

Полученные при изучении парных уравнений представления полей в виде сингулярных интегралов позволили разработать единообразный подход к построению математических моделей широкого класса прикладных задач электродинамики и радиофизики, а предложенные модификации МДО служат основой для численного анализа электромагнитных полей.

Полученные в диссертационной работе результаты открывают новые возможности для исследования спектральных свойств полосковых и щелевых линий передачи, расчета их параметров.

Результаты работы послужили основой спецкурсов, которые читаются студентам механико-математического факультета, специализирующимся по математической физике, вычислительной математике и механике: "Численный метод дискретных особенностей в задачах электродинамики", "Парные и сингулярные интегральные уравнения теории дифракции и методы их численного решения". Изданы учебные пособия по этим курсам.

Результаты работы использованы в курсовых и дипломных работах, а также в кандидатских диссертациях.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на Всесоюзных симпозиумах: "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики" /г. Харьков - 1983, 1985, 1987, 1989 г.г.; г. Одесса - 1991 г./; по дифракции и распространению волн /г. Тбилиси - 1964 г.; г. Харьков - 1967 г.; г.Ленинград - 1970 г./; на конференциях: "Комплексный анализ и дифференциальные уравнения" /Черноголовка - 1979, 1981, 1983, 1985, 1987, 1989 г.г./; "Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения" /г. Одесса - 1987 г./; "Численные методы, основанные на решении сингулярных интегральных уравнений" /ВЦ СО АН СССР, ИВВАИУ, г. Иркутск, 1984 г./; "Эффективные численные методы решения краевых задач механики твердого деформируемого тела" /г. Харьков - 1989 г./; на рабочих совещаниях "Метод граничных интегральных уравнений. Задачи, алгоритмы, программная реализация" в Научно-исследовательском ВЦ АН СССР /г. Пущино на Оке - 1985, 1986, 1987 г.г./; на Всесоюзной научной сессии, посвященной дню радио /г. Москва - 1991 г./; на Всесоюзном научно-техническом семинаре "Математическое моделирование и создание САПР для расчета, анализа и синтеза антенно-фидерных систем и их элементов" /г. Ростов - 1990 г./; на I Украинском симпозиуме "Физика и техника ММ и СУБММ радиоволн" /г. Харьков - 1992 г./; на Международной научной конференции "Дифференциальные и интегральные уравнения. Математическая физика и специальные функции" /г. Самара - 1992 г./; на Международной конференции памяти акад. М.П. Кравчука /г. Киев - 1992 г./; на Международном симпозиуме "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики" /г. Харьков - 1993 г./; на Всесоюзных семинарах в ЦАГИ, руководитель проф. С.М. Белоцерковский /г. Москва/; в

ВВИА, руководитель проф. И.К. Лифанов /г. Москва/; на семинаре в ИРЭ АН Украины, руководитель акад. В.П. Шестопалов /г. Харьков/; на семина в РИ АН Украины, руководитель акад. Л.Н. Литвиненко /г. Харьков/; на семинаре по вычислительной математике ИФТТ АН СССР, руководитель проф. Ю.П. Боглаев /Черноголовка Моск. обл./; на семинаре по интегральным уравнениям в ИППММ АН Украины, руководитель проф. Ю.И. Черский /г. Львов/; на семинаре фак ВМиК МГУ, руководители проф. Е.В. Захаров и проф. И.К. Лифанов /г. Москва/; на республиканском семинаре "Эффективные методы решения задач математической физики", руководитель проф. В.А. Щербина /г. Харьков/.

Публикации. Основаные результаты диссертации опубликованы в 36 работах, список которых приведен в конце автореферата.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, семи глав, приложения, заключения и списка литературы. Общий обьем диссертации 359 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ.

Во введении обоснована актуальность исследований, проводимых в диссертации, дан обзор литературы, сформулирована цель работы, кратко изложено содержание диссертации и описаны основные результаты.

В первой главе доказана эквивалентность парных интегральных уравнений задач дифракции Е - и Н - поляризованной волны на плоской ограниченной решетке из идеально проводящих бесконечно тонких лент сингулярному интегральному уравнению первого рода на системе отрезков, в выделенном классе функций. Разработанный при этом аналитический аппарат позволил провести сведение к СИУ не только указанных первой и второй краевых задач для уравнения Гельмгольца, но и получить СИУ третьей и четвертой краевых задач.

Выделены и изучены более общие классы парных интегральных уравнений /а затем и их дискретных аналогов - парных сумматорных уравнений/ сводящихся к СИУ первого рода на системе отрезков. Поскольку речь идет о парных уравнениях корректных краевых задач математической теории дифракции эти уравнения однозначно разрешимы в соответствующих классах функций, определяемых условием на ребре.

Вводятся обозначения

$$\mathbb{L} = \bigcup_{q=1}^{m} (a_q, b_q), \quad C\mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{L}, \quad -\infty < a_1 < b_1 < \ldots < a_m < b_m < \infty$$

$$\gamma = \sqrt{\lambda^2 - k^2}, \quad Re\,\gamma \geq 0, \quad Im\,\gamma \leq 0.$$

Рассматривается парное интегральное уравнение вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda = 0, \quad y \in C\mathbb{L} \tag{I}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda) \gamma V(\gamma) e^{i\lambda y} d\lambda = f(y), \quad y \in \mathbb{L} \tag{2}$$

где $f(y)$, $y \in \overline{\mathbb{L}}$ заданная гладкая функция, $V(\gamma)$ - заданная функция, причем существует отличный от нуля предел

$$\lim_{\gamma \to +\infty} V(\gamma) = V(\infty) \neq 0$$

и абсолютно сходится к гладкой функции интеграл

$$\mathcal{K}(x)=\int_0^\infty \{|\lambda|V(\infty)-\gamma V(\gamma)\}\frac{\sin\lambda x}{\lambda}\,d\lambda$$

/в частности, к парному уравнению вида (1) - (2) при $V(\gamma)\equiv 1$ сводится задача дифракции H - поляризованной электромагнитной волны на плоской решетке из конечного числа идеально проводящих лент/. Доказан следующий результат. Решение парного интегрального уравнения (1) - (2) представляется в виде

$$C(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{L}} F(\xi)\frac{e^{-i\lambda\xi}-1}{\lambda}\,d\xi,\quad \lambda\in\mathbb{R} \tag{3}$$

а функция $F(\xi),\ \xi\in\mathbb{L}$ должна и может быть найдена из СИУ первого рода на системе отрезков

$$\frac{V(\infty)}{\pi}\int_{\mathbb{L}}\frac{F(\xi)\,d\xi}{y-\xi}+\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{L}}\mathcal{K}(\xi-y)F(\xi)\,d\xi=f(y),\quad y\in\mathbb{L} \tag{4}$$

в классе функций, удовлетворяющих дополнительным условиям

$$\int_{a_q}^{b_q}F(\xi)\,d\xi=0,\quad q=1,\dots,m, \tag{5}$$

сужения которых $F_q(\xi),\ \xi\in\mathbb{L}_q$ на интервалы $\mathbb{L}_q=(a_q;\,b_q)$, $q=1,\dots,m$ имеют вид

$$F_q(\xi)=\frac{v_q(\xi)}{\sqrt{(\xi-a_q)(b_q-\xi)}},\quad a_q<\xi<b_q \tag{6}$$

где $v_q(\xi),\ \xi\in\overline{\mathbb{L}}_q$ гладкие функции.

Далее строится теория парного интегрального уравнения вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda = 0, \; y \in C\mathbb{L} \tag{7}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda) e^{i\lambda y} V(\gamma) \frac{d\lambda}{\gamma} = f(y), \; y \in \mathbb{L} \tag{8}$$

где заданная функция $V(\gamma)$ удовлетворяет условиям: существует отличный от нуля предел

$$\lim_{\gamma \to +\infty} V(\gamma) = V(\infty) \neq 0$$

и абсолютно сходится к гладкой функции интеграл

$$\mathcal{K}(x) = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{\lambda}{|\lambda|} V(\infty) - \frac{\lambda}{\gamma} V(\gamma) \right\} \sin \lambda x \, d\lambda$$

/в частности, к парному уравнению (7) - (8) сводится задача дифракции Е - поляризованной электромагнитной волны на плоской решетке из конечного числа идеально проводящих лент при $V(\gamma) \equiv 1$/.

Доказано, что решение парного интегрального уравнения (7) - (8) представляется в виде

$$C(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{L}} F(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi, \; \lambda \in \mathbb{R} \tag{9}$$

где функция $F(\xi), \xi \in \mathbb{L}$ должна и может быть найдена из СИУ первого рода

$$\frac{V(\infty)}{\pi} \int_{\mathbb{L}} \frac{F(\xi) d\xi}{\xi - y} + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{L}} \mathcal{K}(y-\xi) F(\xi) d\xi = f'(y), \; y \in \mathbb{L} \tag{10}$$

с дополнительными условиями

$$\int_{\mathbb{L}} H(y_q-\xi)F(\xi)\,d\xi = f(y_q), \quad q=1,\dots,m \tag{11}$$

$$H(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty V(\gamma)\frac{\cos\lambda x}{\gamma}\,d\lambda$$, y_q - фиксированная точка интервала $\mathbb{L}_q=(a_q, b_q)$, и сужения $F_q(\xi)$, $\xi\in\mathbb{L}_q$ функции $F(\xi)$ имеют представления (6) .

К сингулярному интегральному уравнению на системе отрезков сведены третья и четвертая краевые задачи для ограниченных решеток с использованием аналитической техники, развитой при изучении парных уравнений (I) - (2) и (7) - (8).

Во <u>второй главе</u> рассматриваются дискретные аналоги парных интегральных уравнений первой главы - парные сумматорные уравнения задач дифракции электромагнитных волн на периодических многоэлементных решетках. Сведение этих задач к СИУ первого рода на системе отрезков проведено не только для первой и второй краевых задач /случаи Е - и Н - поляризации, ленты идеально проводящие/, но и для третьей и четвертой краевых задач.

Выделены и изучены парные сумматорные уравнения достаточно широкого класса периодических задач дифракции волн, сводящихся к СИУ первого рода на системе отрезков. Вводятся обозначения

$$\mathcal{L}=\bigcup_{q=1}^{m}(\alpha_q,\beta_q),\ C\mathcal{L}=[-\pi,\pi]\setminus\mathcal{L},\ -\pi<\alpha_1<\beta_1<\dots<$$
$$<\alpha_m<\beta_m<\pi;\quad \gamma_n=\sqrt{n^2-\varkappa^2},\ \mathrm{Re}\,\gamma_n\geq 0,\ \mathrm{Im}\,\gamma_n\leq 0.$$

Рассматривается парное сумматорное уравнение

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\varphi} = 0, \quad \varphi \in C\mathcal{L} \tag{12}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n V(\gamma_n^{\nu}) \gamma_n e^{in\varphi} = f(\varphi), \ \varphi \in \mathcal{L} \tag{13}$$

где $f(\varphi), \varphi \in \overline{\mathcal{L}}$ заданная гладкая функция, $V(\gamma_n), n \in \mathbb{Z}$ задано, причем существует отличный от нуля предел

$$\lim_{n\to\infty} V(\gamma_n^{\nu}) = V_\infty \neq 0$$

и абсолютно сходится к гладкой функции ряд

$$k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n V_\infty - \gamma_n V(\gamma_n^{\nu}) \right\} \frac{\sin nx}{n}$$

/в частности к парному уравнению вида (12) - (13) при $V(\gamma_n^{\nu}) \equiv 1$ сводятся задачи дифракции и Е - и Н - поляризованных волн на периодической многоэлементной решетке из идеально проводящих лент в случае ортогонального падения/.

Доказано, что решение парного сумматорного уравнения (12) - (13) представляется в виде

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \mathcal{F}(\theta) \frac{e^{-in\theta} - 1}{n} d\theta, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{14}$$

а функция $\mathcal{F}(\theta), \theta \in \mathcal{L}$ должна и может быть найдена из СИУ первого рода на системе отрезков

$$\frac{V_\infty}{\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{\mathcal{F}(\theta) d\theta}{\varphi - \theta} + \frac{1}{\pi} \int_{\mathcal{L}} \mathcal{K}(\varphi, \theta) \mathcal{F}(\theta) d\theta = f(\varphi), \ \varphi \in \mathcal{L} \tag{15}$$

где $\mathcal{K}(\varphi,\theta)=V_\infty\left\{\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\theta}{2}-\frac{1}{\varphi-\theta}\right\}+k(\varphi-\theta)+\frac{i\varkappa V(\gamma_0)}{2}\theta,$

с дополнительными условиями

$$\int_{\alpha_q}^{\beta_q}\mathcal{F}(\theta)d\theta=0,\quad q=1,\dots,m \tag{16}$$

причем для сужений $\mathcal{F}_q(\theta)$ функции $\mathcal{F}(\theta)$, $\theta\in\mathcal{L}$ на интервалы $\mathcal{L}_q=(\alpha_q,\beta_q)$, $q=1,\dots,m$ имеют место представления, аналогичные (6).

Проведено сведение к СИУ первого рода на системе отрезков парных сумматорных уравнений задач дифракции волн на ленточных диафрагмах в плоском волноводе

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos n\varphi=0,\quad \varphi\in C\mathcal{L},\quad -\mathcal{L}\equiv\mathcal{L}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n\gamma_n^{\pm1}\cos n\varphi=f(\varphi),\quad \varphi\in\mathcal{L},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin n\varphi=0,\quad \varphi\in C\mathcal{L},\quad -\mathcal{L}\equiv\mathcal{L}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}B_n\gamma_n^{\pm1}\sin n\varphi=f(\varphi),\quad \varphi\in\mathcal{L}$$

и их обобщений, а также парных сумматорных уравнений задач дифракции волн на периодической многоэлементной решетке при наклонном падении.

Широкий класс краевых задач теории дифракции волн приводит к рассмотренным парным интегральным и парным сумматорным уравнениям. С постановок конкретных задач такого рода, обладающих плоской или цилиндрической симметрией, начинается третья глава. Это задачи дифракции электромагнитных волн на ограниченных и периодических многоэлементных экранированных решетках, краевые задачи для уравнения Гельмгольца в областях, граница которых состоит из систем колец на поверхности прямого кругового цилиндра. Во всех случаях выписаны явные представления для функций $V(\gamma)$, которые входят в выражения для регулярных ядер СИУ.

Описаны схемы МДО численного решения СИУ на системе отрезков с дополнительными условиями первого /задачи (4) - (5), (I5) - (I6) / и второго типа /задача (I0) - (II) /, причем во всех случаях решение ищется в виде, определяемом представлениями (6). Детально анализируется вопрос о вычислении матричных элементов СЛАУ, которые являются значениями ядер СИУ в фиксированных точках.

Строгое обоснование МДО проведено для систем СИУ на отрезке [-I,I] /с соответствующими дополнительными условиями/, эквивалентных рассматриваемым задачам:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u_p(t)}{t-t_0}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}+$$

$$+\sum_{q=1}^{m}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\mathcal{K}_{pq}(t_0,t)\,u_q(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=f_p(t_0),\ p=1,\dots,m \qquad (I7)$$

с дополнительными условиями первого типа:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}u_p(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=0,\ p=1,\dots,m \qquad (I8)$$

или второго типа:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \ln|t-t_0^p|\, u_p(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} +$$

$$+\sum_{q=1}^{m}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} H_{pq}(t)\, u_q(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = C_p\,,\ p=1,\ldots,m \qquad (19)$$

Здесь $f_p(t_0),\ H_{pq}(t),\ K_{pq}(t_0,t),\ p,q=1,\ldots,m$ известные гладкие функции.

Дискретизация задачи (17), (18) проведена интерполяционными методами с использованием гауссовых квадратур, теоретико функциональными методами исследован вопрос об однозначной разрешимости полученной СЛАУ и дана оценка скорости сходимости приближенных решений к точному в метрике специально построенных гильбертовых пространств.

Задача (17), (19) /с дополнительными условиями второго типа/ являет частным случаем проблемы, детально изученной в пятой главе.

Далее, через приближенные решения СИУ выражаются /с использованием гауссовых квадратур/ приближенные решения парных уравнений и соответствующих задач дифракции. Получены простые формулы для приближенных значений интегральных характеристик рассеянных и дифрагированных полей и дана оценка скорости сходимости приближенных значений к точным.

В <u>четвертой главе</u> построены математические модели ряда задач электродинамики и радиофизики на базе аналитического аппарата, разработанного при сведении парных уравнений к СИУ, а также численного МДО. Это краевые задачи дифракции на решетках из металлических брусьев, на конечном числе щелей в проводящем слое, на ступенчатых неоднородностях в плоском волноводе, на системах расширений в плоском волноводе и волноводе кругового сечения, на периодически повторяющихся системах диафрагм. Во всех случаях получены граничные СИУ и указаны схемы МДО для их численного решения.

Построен оригинальный численный метод - модификация МДО - для решения СИУ и их систем на всей оси и на его основе предложен новый подход к численному анализу дифракции электромагнитных волн на структурах с перпендикулярными границами.

Впервые используется МДО для решения спектральных задач. Построена дискретная математическая модель для вычисления собственных плазменных частот в системе сдвоенных проводящих каналов.

Эффективность предложенных математических моделей проверялась в численных экспериментах, результаты в виде графиков и таблиц приводятся.

<u>Пятая глава</u> посвящена математическим вопросам метода дискретных особенностей в двумерных задачах дифракции электромагнитных волн. Дано строгое обоснование численного решения системы СИУ с ядрами Гильберта и Коши, к которым приводит задача дифракции на цилиндрических структурах /направляющие цилиндрических поверхностей - замкнутые и разомкнутые гладкие кривые, которые лежат в конечной части плоскости и не пересекаются/.

Речь идет о системе СИУ вида

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\frac{\varphi_0-\varphi}{2}u_p(\varphi)\,d\varphi+\sum_{q=1}^{m_1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}K_{pq}(\varphi_0,\varphi)u_q(\varphi)\,d\varphi+$$

$$+\sum_{q=m_1+1}^{m}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}K_{pq}(\varphi_0,t)u_q(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=f_p(\varphi_0),\ p=1,\dots,m_1 \qquad (20)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u_p(t)}{t-t_0}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}+\sum_{q=m_1+1}^{m}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\mathcal{K}_{pq}(t_0,t)\,u_q(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}+$$

$$+\sum_{q=1}^{m_1}\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\mathcal{K}_{pq}(t_0,\varphi)\,u_q(\varphi)\,d\varphi=f_p(t_0),\quad |t_0|<1 \tag{21}$$

$$p=m_1+1,\ldots,m$$

с дополнительными условиями

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\ln\left|\sin\frac{\varphi_0^p-\varphi}{2}\right|u_p(\varphi)\,d\varphi+$$

$$+\sum_{q=1}^{m_1}\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}H_{pq}(\varphi)\,u_q(\varphi)\,d\varphi+$$

$$+\sum_{q=m_1+1}^{m}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}H_{pq}(t)\,u_q(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=C_p,\quad p=1,\ldots,m_1 \tag{22}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|t-t_0^p|\,u_p(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}+\sum_{q=m_1+1}^{m}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}H_{pq}(t)\,u_q(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}+$$

$$+\sum_{q=1}^{m_1}\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}H_{pq}(\varphi)\,u_q(\varphi)\,d\varphi=C_p,\quad p=m_1+1,\ldots,m \tag{23}$$

f_p, $\mathcal{K}_{pq}$, H_{pq} – известные гладкие функции / 2π – периодические по φ и φ_0 /, удовлетворяющие некоторым естественным условиям, в частности, для функций $f_p(\varphi_0)$, $\mathcal{K}_{pq}(\varphi_0,\varphi)$,

$q=1,\dots,m_1$. $\mathcal{K}_{pq}(\varphi_0,t)$, $q=m_1+1,\dots,m$ имеем

$$\int_0^{2\pi} f_p(\varphi_0)d\varphi_0=0,\quad \int_0^{2\pi}\mathcal{K}_{pq}(\varphi_0,\xi)d\varphi_0=0,\quad p=1,\dots,m.$$

Рассматриваемая система СИУ с указанными дополнительными условиями эквивалентна корректной краевой задаче теории дифракции, она однозначно разрешима и речь идет о построении и строгом обосновании численного метода решения задачи. Корректная дискретная математическая модель строится интерполяционными методами с использованием лифановской регуляризации. Доказательство однозначной разрешимости полученной СЛАУ и оценка скорости сходимости приближенных решений к точным проведены теоретико функциональными методами. Дана оценка погрешности дискретной математической модели двумерных задач теории дифракции.

Отметим, что при $m_1=0$ изученная система СИУ переходит в систему (I7) , а дополнительные условия - в (I9) , так что, в частности, получено обоснование второй схемы МДО из третьей главы.

В шестой главе дано строгое обоснование численного метода решения задач дифракции волн на круговом диске с использованием теории парных интегральных уравнений Н.И. Ахиезера, сводящей рассматриваемые задачи к интегральному уравнению второго рода с вещественным симметричным ядром, чисто мнимым параметром

$$u(t)-\frac{i}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{sh}\varkappa(t+s)}{t+s}u(s)ds=f(t),\quad -1<t<1 \qquad (24)$$

/здесь $\varkappa=ka$, k - волновое число, a - радиус диска/. Искомые поля выражаются через решение этого уравнения аналитически, а его приближенное решение получено оригинальным численным методом, использующим то обстоятельство, что интегральный оператор в уравнении (24) является квадратом интегрального оператора с ядром $\sqrt{\varkappa}\, e^{\varkappa t s}$, $|t| \leq 1$, $|s| \leq 1$. Дело сводится к решению двух интегральных уравнений второго рода с ядром $e^{\varkappa t s}$, замена которого выражденным и использование соображений симметрии позволили построить эффективную вычислительную схему для решения уравнения (24). Дана оценка скорости сходимости приближенных решений к точным. Было проведено вычисление полей на диске и в дальней зоне в широком диапазоне значений $\varkappa$ с высокой точностью. Результаты вычислений сведены в таблицы и сравниваются с известными, полученными ассимпотическими методами.

В <u>седьмой главе</u> предложена дискретная математическая модель для решения основной задачи электростатики системы цилиндрических проводников на основе варианта МДО - метода дискретных зарядов. Рассматриваемые краевые задачи в строгой постановке приводят к граничным СИУ вида (20) - (21) с дополнительными условиями

$$\int_0^{2\pi} u_p(\varphi)\,d\varphi = C_p,\ p=1,\dots,m_1; \quad \int_{-1}^{1} u_p(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = C_p,\ p=m_1+1,\dots,m \tag{25}$$

Это позволило провести обоснование метода дискретных зарядов функционально аналитическими методами, изложенными в пятой главе.

Предложены также математические модели электростатических задач с использованием разработанного аналитического аппарата теории парных интегральных и сумматорных уравнений и вычислительных процедур МДО. Они могут быть использованы при расчете устройств экранировки, электростатической фокусировки пучков заряженных частиц в электронике СВЧ и ускорительной технике, исследовании характеристик полосковых и щелевых линий передачи.

В приложении построена математическая модель для исследования физико-механических свойств тонких пленок в микроэлектронике. Здесь задача расчета упругих полей дефектов кристаллической решетки сводится к системе четырех СИУ на всей оси, а их дискретизация произведена методом, предложенным в четвертой главе.

В заключительном разделе намечены возможности распространения разработанных методов на более широкие классы задач электродинамики. Так указано, какие изменения следует внести в ядра СИУ задач дифракции на решетках в случае, когда эти решетки расположены на границе двух различных изотропных однородных сред. Рассмотрен также случай, когда решетка лежит на анизотропном полупространстве: задача дифракции электромагнитных волн на решетке с поперечно намагниченным ферритом сведена к СИУ второго рода.

Предложен новый подход к численному анализу спектра полосковых и щелевых линий передачи. Он основан на сведении соответствующих краевых задач со спектральным параметром к СИУ /при этом используется техника, разработанная в первых двух главах/ и их дискретизации по одной из схем МДО. Это приводит к СЛАУ, коэффициенты которой - известные функции спектрального параметра. Условие нетривиальной разрешимости СЛАУ и дает трансцендентное уравнение, которому удовлетворяют приближенные величины первых собственных значений краевой задачи.

В заключение отметим, что разработанные методы парных и сингулярных интегральных уравнений, парных сумматорных и сингулярных интегральных уравнений вместе с численным методом дискретных особенностей позволяют строить дискретные математические модели не только в электродинамаке, но и в других разделах математической и вычислительной физики.

Основные публикации по теме диссертации.

1. Гандель Ю.В. О парных рядах Фурье некоторых смешанных краевых задач математической физики // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. - Харьков: Вища школа, 1982. - Вып. 38. - С. 16-18.

2. Гандель Ю.В. О парных интегральных уравнениях, приводящих к сингулярному интегральному уравнению на системе отрезков // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. - Харьков: Вища школа, 1983. - Вып. 40. - С. 33-36.

3. Гандель Ю.В., Забуга Т.А. Численный метод дискретных особенностей в задачах дифракции волн на решетках / Харьк. ун-т. - Харьков, 1983. - 31 с. - Деп. в УкрНИИНТИ, № 1286 - Ук-83.

4. Гандель Ю.В., Лифанов И.К., Матвеев А.Ф. Численное решение смешанных краевых задач математической физики, сводящихся к сингулярному интегральному уравнению на системе отрезков. - Препринт / Институт Теоретической и Экспериментальной Физики. - Москва, 1984. - № 174. - 55 с.

5. Гандель Ю.В., Полянская Т.С. Обоснование метода дискретных особенностей для систем сингулярных интегральных уравнений, к которым сводятся смешанные краевые задачи математической физики / Харьк. ун-т. - Харьков. - 1984. - 34 с. - Деп. в УкрНИИНТИ, № 720. - Ук - 84.

6. Гандель Ю.В. Метод дискретных особенностей в задачах электростатики и электродинамики / В кн.: Метод дискретных особенностей в задачах математической физики. Тезисы докладов П Всесоюзного симпозиума. - Харьков, 1985. - С. 30-31.

7. Гандель Ю.В. Метод дискретных особенностей в задачах электродинамики // Вопросы кибернетики. Москва: Изд. АН СССР. - 1986. - № 124. - С. 166-183.

8. Гандель Ю.В., Наумов А.И., Соломенцева Н.М. Численное решение сингулярного интегрального уравнения одной задачи дифракции на круговом цилиндре / В кн.: Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их приложения. - М.: Изд. ВВИА им. Н.Е. Жуковского, 1986. - С. 7-12.

9. Гандель Ю.В. Прямой численный метод решения сингулярных интегральных уравнений на всей оси / В кн.: Ш Всесоюзный симпозиум."Методы дискретных особенностей в задачах математической физики и его роль в развитии численного эксперимента" Тезисы докладов. - Харьков, 1987. - С. 49-51.

10. Гандель Ю.В. Численное решение сингулярных интегральных уравнений некоторых краевых задач математической физики // Республ. научн. конф. "Диффер. и интегр. уравнения и их приложения". Тезисы докладов. - Одесса, 1987. - С. 59-60.

II. Гандель Ю.В., Литвяков В.Н. Численное решение модельных задач электростатики методом дискретных особенностей // Методы и алгоритмы параметрического анализа линейных и нелинейных моделей переноса. - М.: МГЗПИ, 1987. - Вып. 4. - С. 60-74.

I2. Гандель Ю.В., Полянская Т.С. О численном решении двумерных задач электростатики проводников // Вестник Харьк. ун-та. № 334. - Х.: Вища школа, 1989. - С. 36-42.

I3. Гандель Ю.В., Полянская Т.С. К обоснованию метода дискретных особенностей для численного решения двумерных краевых задач электродинамики / В кн.: Методы дискретных особенностей в задачах математической физики. Тезисы докладов IУ Всесоюзного симпозиума. Ч. I. Харьков, 1989. - С. 70-72.

I4. Гандель Ю.В. Метод численного анализа упругих полей дефектов кристаллической решетки в пластинах конечной толщины / В кн.: Эффективные численные методы решения краевых задач механики твердого деформируемого тела. Тезисы докладов республ. н.-т. конф., Ч. I. Харьков, 1989. - С. 67-69.

I5. Гандель Ю.В., Соломенцева Н.М., Хорошун В.В. Численное исследование поляризационной восприимчивости многоэлементных решеток / В сб.: Математическое моделирование и создание САПР для расчета, анализа и синтеза антенно-фидерных систем и их элементов. Сб. тезисов Всесоюзного н.-т. семинара. - Ростов, 1990. - С. 92.

16. Гандель Ю.В. Математическое моделирование методом дискретных особенностей в теории полосковых линий передачи / В сб.: Тезисы докладов У Всесоюзного симпозиума "Метод дискретных особенностей в задачах математической физики". Ч. I. - Одесса, 1991. - С. 57-58.

17. Гандель Ю.В., Хорошун В.В. Расчет основных параметров полосковых линий передачи методом дискретных особенностей / В кн.: 46-я Всесоюзная научная сессия, посвященная дню радио. Тезисы докладов. - М.: Радио и связь, 1991. - С. 33.

18. Гандель Ю.В., Загинайлов Г.И. Об одном подходе к решению задач дифракции на структурах с перпендикулярными границами / В кн.: I Украинский симпозиум "Физика и техника ММ и СУБММ радиоволн". Тезисы докладов. Ч. I. Харьков, 1991. - С. 24-25.

19. Гандель Ю.В. Теория парных интегральных уравнений Н.И. Ахиезера и задача дифракции волн на круговом диске // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. - Х.: Вища школа, 1991. - Вып. 56. - С. 46-55.

20. Гандель Ю.В. Спаренные интегральные уравнения и решение некоторых задач теории дифракции волн / В кн.: Третий Всесоюзный симпозиум по дифракции волн. Тбилиси, 1964. Рефераты докладов. - М.: Наука, 1964. - С. 51-52.

21. Гандель Ю.В. Задача о дифракции электромагнитных волн у кругового отверстия в плоском экране // Радиотехника. Х., 1965. - Вып. I. - С. 155-164.

22. Гандель Ю.В. О решении одного интегрального уравнения математической теории дифракции волн // Вестник Харьк. ун-та, серия мех.-матем., 1970. - Т. 35. - С. 23-28.

23. Гандель Ю.В. Интегральные уравнения некоторых аксиально симметричных задач дифракции волн. У Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн. Ленинград 13-17 июня 1970. - Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1970. - С. 9.

24. Гандель Ю.В. Парные ряды Фурье-Бесселя и Дини краевых задач для уравнения Гельмгольца / В кн.: Международная научная конференция "Дифференциальные и интегральные уравнения. Математическая физика и специальные функции". Тезисы докладов. - Самара, 1992. - С. 67.

25. Гандель Ю.В. К теории парных рядов Фурье-Бесселя // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. - Х.: Вища школа, 1970. - Вып. 12. - С. 59-69.

26. Гандель Ю.В. Замечание к теории парных рядов Фурье-Бесселя // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. - Х.: Вища школа, 1975. - Вып. 22. - С. 35-41.

27. Gandel Yu.V. and Polyanskaya T.S. Systems of Singular Integral Equations of Certain Mixed Boundary - Value Problems of Matrematical Physics // Journal of Soviet Mathematics. - New York, 1990. - Volume 48, N 2. P. 144-152.

28. Gandel Yu.V. and Lifanov I.K. Solving the Singular Integral Equations of the Robin Problem // Jounal of Soviet Mathematics. - New York, 1990. - Volume 48, N 5. P. 509-511.

29. Гандель Ю.В. Сингулярные интегральные уравнения двумерных краевых задач электродинамики / В кн.: Международная научная конференция "Дифференциальные и интегральные уравнения. Математическая физика и специальные функции". Тезисы докладов. - Самара, 1992. - С. 68.

30. Гандель Ю.В. Приближение многочленами решений систем сингулярных интегральных уравнений двумерных задач математической физики / Тези Міжнародної конференції, присвяченої пам'яті акад. М.П. Кравчука. - Київ, 1992. - С. 40.

31. Гандель Ю.В. Парные и сингулярные интегральные уравнения смешанных краевых задач для уравнения Гельмгольца в полупространстве / В сб.: Республиканская конференция, посвященная 200-летию со дня рождения Н.И. Лобачевского. Тезисы докладов, Ч. 2. Одесса, 1992, - С. 61-62.

32. Gandel Yu.V., Zaginailov G.I. A new numerical method to solve wide variety of diffraction problems / Proceedings of ISAP'92, V.1. - Sapporo, Japan, 1992. - P. 225-228.

33. Гандель Ю.В. Математические модели в электродинамике на основе теории парных уравнений и метода дискретных особенностей / В кн.: Методы дискретных особенностей в задачах математической физики. Тезисы докладов УI Международного симпозиума, Ч. I. - Харьков, 1993. - С. 16-17.

34. Гандель Ю.В. Метод дискретных особенностей в задачах дифракции волн на ограниченной ленточной решетке / Там же. - С. 119-120.

35. Гандель Ю. В., Полянская Т. С. Математические вопросы метода дискретных зарядов. Учебное пособие. Харьков: Изд. ХГУ, 1991. — 67 с.
36. Гандель Ю. В., Еременко С. В., Полянская Т. С. Математические вопросы метода дискретных токов. Обоснование численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач дифракции электромагнитных волн: Учебное пособие. Ч. II. — Харьков: Изд. ХГУ, 1992.— 145 с.

Подп. к печ. 06.04.94. Формат $60\times84^1/_{16}$. Бумага тип. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 2,0. Уч.-изд. л. 2,0. Тираж 100 экз. Зак. 715. Бесплатно.

Харьковское арендное полиграфическое предприятие.
310093, Харьков, ул. Свердлова, 115.